This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06909540 8

TRAITÉ

DE TRIGONOMÉTRIE.

LIBRARY

ПИЗЬМА
В ПИТЕ
НЕАЛЬЯН

Trigonom... (I.C.)

TRAITÉ

DE TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,

CONTENANT des Méthodes et des Formules nouvelles, avec des applications à la plupart des problêmes de l'Astronomie.

PAR M. CAGNOLI,

Citoyen de Vérone, Membre de la Société Italienne, &c.

TRADUIT DE L'ITALIEN PAR M. CHOMPRÉ.

...TOR LIBRARY
NEW-YORK

DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT L'AÎNÉ.

A PARIS,

Chez DIDOT fils aîné, = JOMBERT jeune, Libraire, rue Dauphine.

M. DCC. LXXXVI.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

PRÉFACE.

Si ce Traité peut faciliter l'étude de la Trigonométrie; si, par la disposition des tables et par les formules nombreuses qu'il renferme, il peut être d'un usage commode pour les Savants, j'aurai rempli le double but que je me suis proposé. J'espere que les Commençants me sauront gré d'avoir très souvent sacrifié à la clarté l'élégance des démonstrations. Rien de plus facile sans doute à comprendre et à pratiquer que les substitutions, et ce moyen est presque le seul dont je me suis servi pour établir les propositions et résoudre les problêmes, en partant pour l'ordinaire d'une construction géométrique : car représenter une question par une figure, c'est soumettre cette question à l'esprit et aux yeux tout à la fois; et si d'ailleurs on fait, pour la résoudre, une heureuse application de l'analyse, il résulte de cette méthode mixte des démonstrations plus précises, des figures moins compliquées.

Quoique les Traités de Trigonométrie soient très multipliés, celui-ci ne paroîtra peut-être pas tout-à-fait dépourvu d'utilité. Ce qui sur-tout m'a déterminé à le publier, ce sont des formules nouvelles, qui donnent, sous des expressions

très simples, les différentielles finies des lignes trigonométriques. Parmi les usages nombreux et importants qu'on peut faire de ces formules, je me contenterai d'en indiquer ici deux principaux.

En premier lieu, si l'on emploie ces formules pour différentier une équation, on obtient une équation différentielle finie, c'est-à-dire mathématiquement rigoureuse et vraie, quelle que soit la grandeur des variations ou différences. D'où il résulte une nouvelle masse d'équations trigonométriques qui servent à résoudre autant de problêmes qu'il y a de diverses quantités dans ces équations, puisque chacune de ces quantités peut être seule inconnue. Je démontre par les exemples qu'en effet cette classe d'équations donne une solution facile de bien des problêmes résolus jusqu'à présent par des voies beaucoup plus pénibles.

En second lieu, si on convertit ces mêmes équations en proportions, et qu'on les compare ainsi transformées avec les analogies différentielles infinitésimales, dont on fait un si grand usage dans les cas où les variations sont petites à la vérité, mais finies, et non pas infiniment petites; on parvient à connoître avec précision les quantités négligées dans les analogies infinitési-

males, et l'on a un moyen facile de tenir compte de ces quantités quand elles sont d'une certaine importance. À l'aide de quelques exemples, je fais voir que les erreurs des analogies différentielles infinitésimales, dans les applications journalieres qu'on en fait, sont plus graves qu'on ne le croit communément.

Les analogies différentielles fondées sur l'hypothese de deux parties constantes dans le triangle, peuvent encore s'appliquer avec autant de facilité que d'utilité aux cas où cinq parties et même où toutes les parties du triangle varient. Je donne à cet effet une méthode générale, à l'usage de laquelle concourt particulièrement l'emploi des signes + et — par lesquels j'ai eu soin d'indiquer dans la construction des analogies, si les variations des diverses parties du triangle se font en un même sens ou en sens contraires.

Pour ce qui regarde la résolution des triangles, principal objet de la Trigonométrie, mes recherches dans cette partie n'ont pas été non plus absolument infructueuses. Sans parler des formules nouvelles, que le Lecteur distinguera, j'ai cherché des solutions commodes pour les cas particuliers; lorsque, par exemple, au lieu de la valeur absolue de quelques parties du triangle, on ne connoît que

leur somme ou leur différence; ou lorsqu'à raison de leur grandeur les sinus ou les cosinus ne peuvent donner avec précision, au moyen des tables ordinaires, la valeur des arcs correspondants. J'épargne au Calculateur la considération de la perpendiculaire dans les triangles sphériques; et pourvu qu'on observe seulement les regles des signes pour les lignes trigonométriques dans les divers quarts du cercle, j'ai disposé les solutions de sorte qu'on ne peut se tromper en aucun cas sur l'espece de l'arc cherché; c'est un point sur lequel des Auteurs célebres ont donné des regles inexactes, ainsi qu'il me semble l'avoir démontré. J'ai aussi restreint les limites des cas douteux, autant qu'on peut le faire par la seule Trigonométrie. Enfin j'ai rapproché les triangles sphériques des triangles rectilignes, et cette comparaison, si je ne me trompe, curieuse autant que neuve, peut avoir encore son utilité.

Quant à la pratique de la Trigonométrie sur le terrein, j'expose avec détail ce qu'il y a de plus essentiel pour mettre l'Ingénieur ou le Géographe en état d'opérer avec l'exactitude la plus scrupuleuse.

La Trigonométrie fournit des moyens pour se servir commodément des logarithmes dans les ad-

ditions et dans les soustractions, quels que soient les cas et les expressions. L'idée de ces moyens n'est pas absolument neuve ; mais faute d'une méthode générale facile à pratiquer, telle que la méthode que je propose, on n'a point imaginé d'avoir recours à ces expédients dans une infinité d'occasions où on peut en retirer un avantage réel.

De cette méthode générale découlent naturellement les solutions de toutes les équations du second et du troisieme degré par le moyen de la Trigonométrie.

Je trouve aussi que le calcul différentiel conduit aisément à la valeur de l'inconnue, quel que soit le degré ou la nature d'une équation. Quoique le moyen que j'indique se présente de lui-même, je le crois nouveau, et mes Lecteurs jugeront si, en l'employant ainsi que me l'ont suggéré mes formules différentielles trigonométriques, il est digne de quelque attention.

Il m'a paru convenable d'insérer dans ce Traité les premiers principes du calcul différentiel, et de la méthode du retour des séries, attendu les applications continuelles que j'ai faites de ces principes. Je me suis attaché surtout à les expliquer avec clarté, parcequ'en général je suppose le Lecteur seulement initié dans les Mathé-

matiques. Il peut entreprendre de parcourir cette Trigonométrie, pourvu qu'il sache résoudre une équation, qu'il possede le calcul arithmétique, sur-tout pour les décimales, et qu'il connoisse les proportions, les progressions, les premieres propositions de la Géométrie, l'usage et la théorie élémentaire des logarithmes.

Si je ne parle ni de la réduction des logarithmes imaginaires aux arcs circulaires, ni de la sommation des séries infinies par le moyen de la circonférence du cercle, ni de l'usage des facteurs imaginaires des sinus pour trouver le terme général des séries récurrentes, ni de quelques autres sujets semblables déjà traités avec autant de précision que de netteté dans *l'Analyse des infinis* du grand Euler; je crois que j'ai dû m'en dispenser, ces diverses questions étant à proprement parler du ressort de l'analyse.

J'ai multiplié les applications aux problêmes de l'Astronomie, science dans laquelle la Trigonométrie joue le rôle principal, et les solutions que je donne de la plupart de ces problêmes sont neuves en général, ou pour la méthode, ou pour les résultats. C'est sur-tout ici qu'on aura lieu de reconnoître l'utilité du grand nombre de formules nouvelles contenues dans ce Traité.

Je ne dis rien des tables mises à la fin de l'Ouvrage : elles indiquent assez par elles-mêmes et leurs usages et leurs avantages. Au moyen de formules expéditives qui font partie de celles que j'ai données, j'ai calculé les logarithmes de la table (BB), depuis le logarithme du nombre 1163. Pour être sûr de n'avoir commis aucune erreur dans leur calcul, j'ai formé tous les logarithmes des nombres intermédiaires, et j'ai pris jusqu'à la septieme différence. Cette opération m'a fourni l'occasion de vérifier l'exactitude d'un grand nombre d'autres logarithmes de la même table.

Je ne nomme point ici les Auteurs desquels j'ai emprunté ce que j'ai jugé ne pouvoir être mieux. Il m'a paru plus à propos de leur faire hommage de ce qui leur appartient, dans le cours même de l'Ouvrage.

Je crois n'avoir omis que des méthodes compliquées et inutiles à la Trigonométrie ; ensorte que ce Traité peut être regardé comme complet. C'est ce dont on se convaincra en parcourant la table des matieres.

La partie typographique a été revue avec soin tant par moi que par quelques Gens de Lettres qui ont bien voulu m'aider dans cette revision : on sait combien les fautes d'impression fatiguent et rebu-

tent, sur-tout dans un Livre de Mathématiques.

Il me reste à prier le Lecteur de consulter l'Appendice qui termine cette Trigonométrie ; il y trouvera des corrections, des explications et des additions utiles.

La traduction françoise de ce Traité, publiée en même temps que le texte, mérite une entiere confiance : non-seulement cette Version est d'une main exercée dans les deux Langues et dans les Mathématiques *, mais de plus elle a été écrite de concert avec moi, pour ainsi dire sous mes yeux, et avec toute l'attention que je devois attendre du Traducteur, d'après les motifs qui l'ont déterminé à se charger de ce travail, son amitié pour moi et le desir d'être utile.

---

* M. Chompré a donné des Éléments d'Arithmétique, d'Algebre et de Géométrie (à Paris, chez Nyon l'aîné), dont il vient de paroître une seconde édition.

TABLE

TABLE DES CHAPITRES

ET DES MATIERES PRINCIPALES.

CHAPITRE I. Définitions et Notions préliminaires.

Explications de quelques signes et abréviations dont on fait usage dans ce Traité, art. 8

CHAP. II. Valeur relative des lignes trigonométriques.

Des signes des lignes trigonométriques, 35

Table des signes des lignes trigonométriques dans les quatre quarts du cercle, 42

CHAP. III. Idée préliminaire de la résolution des triangles rectilignes.

CHAP. IV. Valeurs relatives des lignes trigonométriques appartenantes à la somme ou à la différence de deux arcs, et aux arcs multiples.

CHAP. V. Expressions des arcs en parties du rayon, et des lignes trigonométriques par les puissances des arcs.

Éléments du calcul différentiel, 130

Nouvelles formules pour les différentielles finies des lignes trigonométriques, 139

Différentielles infinitésimales des lignes trigonométriques, 140

Regle *de maximis*, 141

Exposition et explication de la méthode du retour des séries, 148

Des signes des lignes trigonométriques des arcs négatifs, 154

CHAP. VI. Des tables trigonométriques en nombres naturels.

Exposition de méthodes nouvelles pour calculer la table des sinus, &c., 157

Instructions sur l'usage des tables, 162

CHAP. VII. Des tables trigonométriques en logarithmes.

Des logarithmes des fractions décimales, 164

Des logarithmes des nombres, art. 170
Construction de formules très convergentes pour la formation des logarithmes des nombres, 175
Tables pour la conversion des logarithmes hyperboliques en logarithmes vulgaires et *vice versâ*, 181 et 182
Méthode pour la construction des tables trigonométriques en logarithmes, 189
Application des nouvelles formules ci-dessus (175) à l'extraction des racines numériques, 190
Du complément arithmétique, 194
Méthode générale pour l'application facile des logarithmes aux additions et aux soustractions, dans tous les cas, 195 à 209
CHAP. VIII. Résolution des triangles rectilignes rectangles.
Table pour la résolution d'un triangle ABC rectangle en A, 213
Formules pour avoir les arcs avec précision, nonobstant la grandeur des sinus ou des cosinus, 217
Résolution des triangles rectangles dans quelques cas particuliers, 218
CHAP. IX. Résolution des triangles rectilignes obliquangles.
Résolution de ces triangles dans quelques cas particuliers, 237
CHAP. X. Des analogies différentielles des triangles rectilignes.
Expressions finies et nouvelles des analogies différentielles, 251 ; et 264 à 277
Des limites de l'usage des analogies différentielles sous la forme infinitésimale ordinaire, 258 à 260
Table des analogies différentielles finies et infinitésimales des triangles rectilignes, 279
Application de ces analogies aux cas où toutes les parties du triangle sont variables, à l'exception d'une seule, ou sans exception, 283 à 285
CHAP. XI. Pratique de la Trigonométrie rectiligne sur le terrein.

De la mesure d'une base, art. 289
De la mesure des angles, 294
Des vérifications du graphometre, 298
De la mesure des hauteurs, et des corrections pour les angles d'élévation, 302 à 310
De la mesure des distances, 312
De la réduction des angles au centre de la station, 318
De la réduction des triangles d'un plan à un autre plan, 320
Des meilleures conditions des triangles, et de la construction des signaux, 331
De la maniere de lever les plans, et de construire les cartes topographiques et les cartes géographiques de peu d'étendue, 337
Problêmes de Trigonométrie-pratique, 342
CHAP. XII. Résolution numérique, par la Trigonométrie, de toute équation du second et du troisieme degré.
CHAP. XIII. De la résolution numérique d'une équation quelconque.
Méthode indirecte, générale et nouvelle, 364
Application aux équations transcendantes, 367
Résolution particuliere de certaines équations trigonométriques finies ou infinies, 369
CHAP. XIV. Définitions, notions et propositions préliminaires, particulieres à la Trigonométrie sphérique.
CHAP. XV. Résolution des triangles sphériques rectangles.
Regles générales pour parvenir à appliquer les formules de la Trigonométrie sphérique aux triangles rectilignes, même lorsque ces formules contiennent des cotangentes ou des cosinus de côtés, 425
Table pour la résolution d'un triangle sphérique ABC rectangle en A, 430
Formules pour avoir les arcs avec précision, nonobstant la grandeur des sinus ou des cosinus, 432

Table pour la résolution, en certains cas, d'un triangle sphérique rectangle, art. 438
Résolution des triangles sphériques rectilateres, 440
Résolution de deux triangles sphériques rectangles lorsqu'ils ont un angle commun, 441
Lorsqu'ils ont un côté commun, 447
Lorsqu'ils ont une même hypothénuse, 454
CHAP. XVI. Résolution des triangles sphériques obliquangles. 458
Résolution du triangle isoscele, 498
De la mesure de la surface du triangle sphérique, 499
Exemples du calcul des triangles obliquangles, 500
CHAP. XVII. Résolution des triangles sphériques par la regle et le compas.
CHAP. XVIII. Comparaison des triangles sphériques et des triangles rectilignes.
Comparaison des parties du triangle sphérique aux parties correspondantes du triangle rectiligne formé par les cordes des arcs que le premier a pour côtés, 510 à 516
Résolution des triangles sphériques par le moyen des formules de la Trigonométrie rectiligne, 517 à 533
Des erreurs notables qu'on s'expose à commettre, en résolvant comme rectilignes rectangles les petits triangles sphériques dans lesquels un des côtés de l'angle droit est un arc de petit cercle, 534
Moyens faciles pour éviter ces erreurs, 536
CHAP. XIX. Des analogies différentielles des triangles sphériques.
Table contenant un grand nombre de nouvelles analogies finies ou infinitésimales, 541 à 679
Démonstration des analogies de cette table, 680
Observations sur l'usage et l'utilité de ces analogies, 721
Exemples du calcul des analogies différentielles des triangles sphériques, 731

Des erreurs graves qu'occasionnent souvent les analogies infinitésimales dont on a fait usage jusqu'à présent, art. 735

CHAP. XX. Résumé sur l'application de la Trigonométrie à la résolution des problêmes.

CHAP. XXI. Applications de la Trigonométrie à l'Astronomie.

Connoissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, trouver sa longitude et sa latitude, 740

Connoissant la longitude et la latitude d'un astre, trouver son ascension droite et sa déclinaison, 745

Connoissant les différences d'ascension droite et de déclinaison entre deux astres, et ces différences étant petites, trouver les différences de longitude et de latitude, 746

Déduire les différences en ascension droite et en déclinaison, des petites différences en hauteur et en azimuth, 752

Méthode expéditive pour calculer une table des azimuths, des distances au zénith, et des angles de variation, 755

Trouver l'heure par l'observation de deux étoiles dans un même vertical, connoissant d'ailleurs leurs déclinaisons et leurs ascensions droites, 756

De l'effet de la réfraction sur le moment du lever et du coucher des astres, 757

Déterminer le temps que le disque du soleil emploie à se lever ou à se coucher, 761

Déterminer la durée du crépuscule, *Ibid.*

Du changement d'amplitude produit par la réfraction horizontale, 762

Trouver l'élongation d'une planete, au temps de sa station apparente, 766

Équations fondamentales de la théorie des planetes, 767

Problême de Kepler. Solution I, 769

Solution II, 771

Méthode très expéditive pour calculer les tables de l'équation du centre, et du rayon vecteur d'une planete, art. 772
Trouver la plus grande équation du centre, 773
Méthode très expéditive pour calculer plus exactement qu'on ne l'a fait jusqu'ici la table générale du mouvement des cometes dans une orbite parabolique, 774
Trouver le mouvement horaire d'une planete en longitude, 775
Trouver le mouvement horaire en latitude, 776
Trouver le mouvement des nœuds des orbites des planetes, sur l'écliptique, produit par les attractions réciproques, 777
Trouver le *maximum* du mouvement du nœud d'un satellite sur l'orbite de Jupiter, causé par l'attraction d'un autre satellite, 780
Trouver le changement de l'ascension droite, de la longitude, de la latitude et de l'angle de position des astres, et celui de l'obliquité de l'écliptique, occasionnés par l'attraction des planetes sur la Terre, 782
Trouver la correction de l'ascension droite et de la déclinaison d'un point quelconque de l'écliptique, relativement à la diminution de l'obliquité, 783
Trouver les changements de l'ascension droite, de la déclinaison, et de l'angle de position des astres, causés par la précession des équinoxes, 784
Des effets de la nutation, 785
Des effets de l'aberration, 786
Déterminer les dimensions de la Terre, en la supposant de figure elliptique, 793
Méthode facile pour tenir compte de l'ellipticité de la Terre dans le calcul des parallaxes, 800
Formules pour le calcul des diverses parallaxes, 803
Trouver la distance apparente des centres de deux astres, 806

Table des angles de la verticale, et des logarithmes des rayons terrestres, art. 807
Trouver la longitude d'un lieu de la Terre, 813
Corriger les observations faites en employant un réticule de 45° non situé dans la direction exacte du mouvement diurne, 821
Corriger les erreurs auxquelles les observations sont sujettes, à raison de la différence entre le parallele vrai et le parallele apparent, 822
Trouver le moment où le mouvement d'un astre en hauteur est le plus rapide, 831
Déduire la hauteur méridienne, des hauteurs observées près du méridien, 833
Ayant trois hauteurs d'un astre, et connoissant le temps où chacune de ces hauteurs a été observée, trouver l'angle horaire et la déclinaison de l'astre, et la hauteur du pôle, 834
Connoissant la déclinaison et deux hauteurs d'un astre, et les moments des observations des hauteurs, trouver l'angle horaire de l'astre et la hauteur du pôle, 835
Ayant les mêmes données et de plus la hauteur du pôle, trouver l'angle horaire de l'astre, 836
Connoissant trois longitudes et trois latitudes héliocentriques ou sélénocentriques d'une tache, trouver l'inclinaison de l'équateur solaire ou lunaire sur l'écliptique, le lieu des nœuds de cet équateur, et la distance de la tache au pôle de rotation, 837
CHAP. XXII. Des projections, et des planispheres géographiques et astronomiques. 839
APPENDICE.

Fin de la Table.

CORRECTION ESSENTIELLE.

Table I, formule 42°, $\sqrt{\frac{1+\cos.2A}{1-\cos.2A}}$ *lisez* $\sqrt{\frac{1-\cos.2A}{1+\cos.2A}}$

Fautes reconnues depuis l'impression de l'Appendice.

Pag. 94, lig. 4; des autres nombres composés *lisez* des nombres composés qui y ont leurs facteurs

Pag. 420, lig. avant-derniere; de la parallaxe *lisez* du logarithme de la parallaxe

Art. 840, lig. 2; égaux à ceux de latitude. *lisez* égaux dans l'étendue d'une même carte.

EXTRAIT des registres de l'Académie Royale des Sciences, du 11 Février 1786.

MM. DE LA LANDE et MÉCHAIN, qui avoient été nommés pour examiner le *Traité de Trigonométrie* par M. CAGNOLI, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet ouvrage digne d'être approuvé et imprimé sous son Privilege. En foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris le 11 Février 1786.

LE Mis DE CONDORCET, Séc. perp.

AVIS AU RELIEUR.

Les six Planches des Figures doivent être placées à la fin du Volume.

Les Tables numérotées depuis I jusqu'à IX, se placeront de même à la fin, avant ou après les Planches.

TRAITÉ
DE
TRIGONOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Définitions et Notions préliminaires.

1. TRIGONOMÉTRIE, mot tiré du Grec, signifie *mesure des triangles*. Etant données quelques parties d'un triangle, la Trigonométrie enseigne les moyens de *trouver la valeur* de chacune des autres. Cette opération s'appelle *résolution des triangles*. Les parties que la Trigonométrie considere dans le triangle sont les angles et les côtés. La mesure des surfaces renfermées entre les côtés des triangles, est du ressort de la Géométrie plutôt que de la Trigonométrie.

2. Il est aisé de concevoir combien la Trigonométrie est une science utile et même agréable; puisqu'au moyen de ses calculs on mesure, avec autant d'exactitude que de facilité, les distances accessibles et inaccessibles : par exemple, la largeur d'un fossé, d'un fleuve, d'un lac; la hauteur d'un clocher, d'une montagne; les dimensions d'un bastion, d'un retranchement; les distances respectives des lieux; enfin celles des astres et leurs divers mouvements dans l'immensité de l'espace.

3. Le triangle formé par des lignes droites appartient à la Trigono-

métrie *plane* ou *rectiligne*. Si les côtés sont des arcs de cercle considérés ou décrits sur la surface d'une sphere, la résolution du triangle est alors l'objet de la Trigonométrie *sphérique*.

Je suppose le lecteur instruit de la division du cercle adoptée par les géometres, en 360 *parties* ou *degrés* égaux; de celle de chaque degré en 60 *minutes* ou *minutes premieres*, de chaque minute premiere en 60 *secondes*, de chaque seconde en 60 *tierces*, et ainsi de suite. Pour abréger, si l'on veut désigner, par exemple, un arc de six degrés vingt-sept minutes quarante-huit secondes, on écrit 6° 27′ 48″.

4. La Trigonométrie fait usage de quelques lignes auxquelles on a attribué les dénominations suivantes.

Fig. 1. Etant donné un arc tel que BD, moindre que de 90°, terminé par les rayons CB, CD: si de l'une des extrémités de cet arc, du point B, par exemple, on mene la perpendiculaire BA sur l'autre rayon CD; BA s'appelle le *sinus*, AC le *cosinus* et AD le *sinus verse* de l'arc BD ou de l'angle ACB. La perpendiculaire est donc le sinus; la partie du rayon comprise entre cette perpendiculaire et le centre est le cosinus; et la portion du rayon qui reste entre la perpendiculaire et l'arc, c'est-à-dire la différence entre le rayon et le cosinus, est le sinus verse, qu'on nomme aussi la *fleche*.

Comme la valeur d'un angle dépend de l'arc qui le mesure, nous emploierons indifféremment l'un ou l'autre: or l'arc appartient à la Trigonométrie sphérique, et l'angle formé par deux lignes droites à la Trigonométrie plane; tout ce que nous dirons des *lignes trigonométriques* convient donc également à ces deux especes de Trigonométrie. Aussi avons-nous jugé inutile de diviser cet ouvrage en deux parties.

5. Des définitions précédentes il résulte que si BE est perpendiculaire à CF, BE sera le sinus, CE le cosinus, EF le sinus verse de BF. Supposons que BF soit le complément de l'arc BD, ou, ce qui revient au même, que ACE soit un angle droit; BE sera parallele et égale à AC, CE sera parallele et égale à AB; c'est-à-dire que le

sinus de BF = le cosinus de BD = le cosinus de (90° — BF), et que le cosinus de BF = le sinus de BD = le sinus de (90° — BF). Donc *le sinus d'un angle est égal au cosinus du complément de cet angle, et le cosinus est égal au sinus du complément.* D'où il suit que le sinus de 45° = le cosinus de 45°. Ce qui est d'ailleurs évident, puisqu'alors le triangle auquel ces deux lignes appartiennent est isoscele et rectangle. Fig. 1.

EF se nomme le *cosinus verse* de BD, et AD le *cosinus verse* de BF. Le cosinus verse n'est que la différence entre le sinus et le rayon.

6. Si la perpendiculaire (4) étoit menée de l'autre extrémité D sur le rayon CB, il en naîtroit un triangle égal absolument à ABC: puisqu'il auroit de même un angle droit; que l'angle C seroit commun, et l'hypothénuse BC de l'un, égale à l'hypothénuse CD de l'autre. Donc la nouvelle perpendiculaire seroit égale à BA, et diviseroit BC en deux parties respectivement égales à AC et à AD. Les résultats sont donc les mêmes, quelque soit celle des deux extrémités d'un arc, d'où l'on fasse partir la perpendiculaire.

7. Si de l'extrémité D d'un rayon CD, on éleve une perpendiculaire DG jusqu'à la rencontre d'un autre rayon CB prolongé, la perpendiculaire DG se nomme la *tangente*, et le rayon prolongé CG la *sécante* de l'arc BD.

La droite FH étant de même la tangente et CH la sécante de BF complément de BD, la premiere se nomme *cotangente* et la seconde *cosécante* de l'angle ACB. Par la même raison DG est la cotangente, et CG la cosécante de BF.

8. Pour abréger, on écrit R au lieu de *rayon*, sin. au lieu de *sinus*, cos. pour *cosinus*; tang., cot., séc., coséc., au lieu de *tangente*, *cotangente*, *sécante*, *cosécante*; enfin sin.v. et cos.v., pour *sinus verse* et *cosinus verse*. Par exemple, sin.BD signifie le sinus de l'arc BD, et sin.BCD le sinus de l'angle BCD.

Nous écrirons aussi log. au lieu de *logarithme*, ∞ au lieu de l'*infini*, et compl. pour *complément arithmétique* (194); $a > b$

signifie a plus grand que b, et $a < b$ signifie a moins grand que b.

Nous emploierons aussi le signe $\backsim$ pour indiquer la différence positive entre deux quantités, c'est-à-dire pour indiquer que la plus petite doit être soustraite de la plus grande. Par exemple, $a \backsim b$ signifie $a - b$ quand on a $a > b$, et $b - a$ quand on a $a < b$. Ainsi $a \backsim b$ se prononcera *la différence positive* de a et de b, et $a \overset{\backsim}{+} b$, *la somme* ou *la différence positive* de a et de b.

Enfin je désigne souvent un angle par une seule lettre, lors même que son sommet est commun à d'autres angles. Mais alors dans la figure je place entre les deux côtés de cet angle la lettre par laquelle je le désigne. Par exemple, fig. 1, l'angle C est la même chose que l'angle ACB.

9. Nous prévenons les Commençants que nous ferons un usage continuel des transformations suivantes, dont il seroit trop long, et trop ennuyeux pour ceux qui sont plus avancés, de donner à chaque fois le développement. Si quelques lecteurs ne connoissent pas assez l'algebre pour entendre ces transformations et se les être rendues familieres, la meilleure voie pour y parvenir promptement, et pour vérifier la justesse de ces transformations, est de substituer aux lettres des nombres à volonté.

On ne change pas la valeur d'un rapport géométrique, lorsqu'on le multiplie ou qu'on le divise par une même quantité. Ainsi en général, $a : b :: 1 : \frac{b}{a} :: \frac{a}{b} : 1 :: am : bm :: \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$.

Toute fraction est un rapport géométrique. Ainsi $\frac{a}{b}$ est la même chose que $a : b$. Quelques auteurs préferent même cette maniere d'écrire à la précédente.

De là il suit que la regle donnée pour les rapports convient à toute fraction.

10. Les proportions géométriques admettent toutes les transformations qui n'alterent pas l'égalité entre le produit des termes moyens et celui des extrêmes. Ainsi la proportion $a : b :: c : d$ peut éprouver les changements suivants :

$$a+b : a-b :: c+d : c-d$$
$$a \pm b : a :: c \pm d : c$$
$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$
$$a : a \pm b :: c : c \pm d$$
$$b : a \pm b :: d : c \pm d$$

11. Le signe double $\pm$ signifie que si l'on adopte le signe $+$ dans le premier rapport d'une proportion, il faut aussi, dans le second rapport, prendre le signe positif. Il en est de même du signe négatif.

En général dans les équations et les proportions, lorsqu'on trouve le signe double $\pm$ ou $\mp$, il indique que si l'on prend le signe supérieur dans l'un des termes, il faut prendre de même le signe supérieur pour chacun des autres termes. On en doit dire autant du signe inférieur.

12. La proportion fondamentale $a : b :: c : d$, pouvant se changer en celle-ci, $a : c :: b : d$, il en résulte que les transformations ci-dessus ont encore lieu en mettant c au lieu de b, et b au lieu de c.

Nous avons supposé le premier terme plus grand que le second, et par conséquent le troisieme plus grand que le quatrieme. Quand le contraire aura lieu, comme dans cette proportion, $2 : 4 :: 3 : 6$, on renversera la proportion, et on écrira $6 : 3 :: 4 : 2$; alors en la comparant avec la proportion générale $a : b :: c : d$, c'est-à-dire en faisant $a = 6$, $b = 3$, &c., on la trouvera susceptible de toutes les transformations indiquées ci-dessus.

Enfin si deux proportions ont ou les deux moyens ou les deux extrêmes communs; si on a, par exemple, $a : b :: c : d$, et $a : m :: n : d$, on aura aussi, $b : m :: n : c$.

13. Si l'on multiplie ou qu'on divise deux proportions l'une par l'autre, terme à terme, les produits ou les quotients sont encore en proportion. En combinant de ces deux manieres l'analogie $m : n :: p : q$, avec l'analogie $a : b :: c : d$, on aura

$am : bn :: cp : dq$, et $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} :: \frac{c}{p} : \frac{d}{q}$, ou bien $\frac{m}{a} : \frac{n}{b} :: \frac{p}{c} : \frac{q}{d}$. Par la même raison, on aura $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$; et par conséquent $\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{c} : \sqrt{d}$.

Multiplier ou diviser une équation par une même quantité, ajouter une même quantité à chacun de ses membres ou l'en soustraire, n'altere point l'équation. Soit $ad = bc$; on aura $amd = bmc$, et $\frac{ad}{n} = \frac{bc}{n}$, et $ad + m = bc + m$, et $ad - n = bc - n$.

14. Pour introduire un facteur sous le signe radical, il faut l'élever à la puissance indiquée par l'exposant du radical, et le multiplier par tous les termes contenus sous le radical. Réciproquement si l'on veut faire sortir une quantité contenue sous le radical, il faut diviser par cette quantité tous les termes sous le radical, et faire précéder le radical par la racine de cette même quantité. Par exemple, $\frac{a}{b}\sqrt{m^2+n^2} = \frac{1}{b}\sqrt{a^2m^2+a^2n^2}$ $= a\sqrt{\frac{m^2+n^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{a^2m^2+a^2n^2}{b^2}} = \frac{an}{b}\sqrt{\frac{m^2}{n^2}+1} = \frac{am}{b}$, $\sqrt{1+\frac{n^2}{m^2}}$.

Si la quantité à faire sortir étoit un diviseur, on inultiplieroit l'expression sous le radical, au lieu de la diviser.

Ainsi $\sqrt{m^2+\frac{n^2}{r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{m^2r^2+n^2}$.

15. J'ai vu des Commençants arrêtés à de certaines transformations, parcequ'ils s'efforcent de les concevoir, au lieu de penser à les vérifier. Je suppose, par exemple, que nous ayons substitué ab à la quantité $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; en effectuant les quarrés qui ne sont qu'indiqués, et faisant la soustraction, on reconnoîtra qu'en effet cette expression composée se réduit à ab. On reconnoîtra de même que a^2+b^2 est la même chose que $2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. En pareil cas, il faut faire les opérations indiquées dans une expression, quand on veut la vérifier et l'entendre.

16. *Toute quantité qui en variant passe par* zéro, *se change de*

positive en négative, ou de négative en positive. Cette vérité est une conséquence de la nature des progressions. Par exemple, dans la série arithmétique décroissante $\div 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3$, on voit que la quantité 3, en diminuant successivement, passe par zéro, et devient -3, comme il seroit arrivé, si ces diminutions successives eussent été faites à la fois, en retranchant 6 de 3. Le changement du signe positif en négatif est donc évident; celui du signe négatif en positif ne l'est pas moins; il suffit pour s'en convaincre de renverser la même progression ainsi qu'il suit; $\div -3 \cdot -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Nous verrons dans peu (36) que les quantités éprouvent le même changement en passant par l'infini. La démonstration en seroit plus abstraite, si nous la donnions *à priori*.

CHAPITRE II.

Valeur relative des lignes triganométriques.

17. Lorsque BCD $= 45°$, le triangle rectangle CDG est isoscèle, et DG $=$ CD. Donc tang. $45° =$ R $=$ cot. $45°$. Fig. 1.

Mais nous verrons (34) que tang. $90°$ est infinie, tandis que l'arc de $90°$ n'est que le double de l'arc de $45°$. On peut donc observer déja l'extrême disproportion entre la marche des angles et celle de leurs tangentes.

18. D'après la définition donnée (4), il est clair que le sinus d'un arc n'est que la moitié de la corde de l'arc double. On sait que la corde de $60°$ est égale au rayon : donc sin. $30° = \frac{R}{2}$.

Mais nous verrons (34) que sin. $90° =$ R; (d'où le rayon prend aussi le nom de *sinus droit, sinus total*). Qu'on observe donc encore que *les sinus ne croissent pas dans la même proportion que les arcs.*

Fig. 1. 19. Toute corde divise le cercle en deux segments, dont chacun est pour l'autre le supplément à 360°. Un arc MTY plus grand que 180° ne peut donc avoir une autre corde que celle de son supplément YDM à 360°. Donc le sinus ML de la moitié DM de ce second arc (18) est nécessairement le même que le sinus de la moitié MT du premier. Donc un angle obtus TCM ne peut avoir d'autre sinus que celui de l'angle aigu DCM qui est son supplément à 180°.

Nous verrons bientôt que les autres lignes trigonométriques sont de même communes pour l'angle aigu et pour son supplément.

20. En supposant toujours DCF = 90°, les triangles semblables BCA, GCD, FCH donnent les proportions suivantes :

$$AC : AB :: CD : GD, \quad GD : CD :: CF : FH,$$
$$AC : BC :: CD : CG, \quad AB : BC :: CF : CH.$$

En substituant les dénominations trigonométriques, on aura, pour un arc quelconque BD, que nous désignerons généralement par A, les proportions qui suivent :

21. $\text{Cos.A} : \text{sin.A} :: R : \text{tang.A} = \frac{R \times \text{sin.A}}{\text{cos.A}}$.

22. $\text{Tang.A} : R :: R : \text{cot.A} = \frac{RR}{\text{tang.A}} = \frac{R \times \text{cos.A}}{\text{sin.A}}$, (21).

23. $\text{Cos.A} : R :: R : \text{séc.A} = \frac{RR}{\text{cos.A}}$.

24. $\text{Sin.A} : R :: R : \text{coséc.A} = \frac{RR}{\text{sin.A}}$.

25. L'expression générale R du rayon suffit pour faire voir que les équations trigonométriques sont vraies, quelque soit la grandeur du cercle dans lequel on les considère. *La valeur du rayon est donc arbitraire*, pourvu qu'une fois fixée, on la conserve constamment la même ; autrement toutes les lignes trigonométriques varieroient avec le rayon. Si au lieu de BC on prend pour rayon CG, et qu'on décrive l'arc GQ, le sinus de l'angle C ne sera plus BA, mais GD. Or BA : BC :: GD : CG. On trouvera la même chose pour toute autre ligne. Donc *le rapport entre une ligne trigonométrique quelconque et le rayon est constant*, puisqu'on a toujours (9), $\frac{BA}{BC} = \frac{GD}{GC}$. Donc en général, soit L une ligne trigonométrique

pour

pour un rayon donné R ; soit L′ la même ligne pour un autre rayon R′ ; on aura toujours $R : L :: R' : L' = \frac{LR'}{R} = LR'$, si on fait $R = 1$, valeur qu'on assigne communément au rayon, et avec grande raison, parceque cette valeur simplifie beaucoup les calculs et les expressions. Nous verrons par la suite comment, une valeur étant une fois donnée au rayon, on trouve la valeur de toute ligne trigonométrique relativement au rayon.

26. Observons dans les équations (22, 23, 24), qu'étant donnée la valeur du rayon, celle de la cotangente dépend de celle de la tangente, celle de la sécante de celle du cosinus, et celle de la cosécante de celle du sinus, et réciproquement.

27. De là il est facile de comprendre pourquoi dans la Trigonométrie on ne fait presque jamais usage de la sécante et de la cosécante ; c'est qu'il est toujours aisé de leur substituer le cosinus et le sinus par le moyen des équations ci-dessus (23, 24). On pourroit de même supprimer l'usage des cotangentes ; mais on verra que souvent elles se trouvent commodes dans la pratique.

28. Par la propriété si connue de l'hypothénuse, les triangles rectangles CAB, CDG, CFH donnent les équations suivantes ; $BC^2 = AB^2 + AC^2 = CD^2 = CG^2 - DG^2 = CF^2 = CH^2 - FH^2$; ou bien $R^2 = \text{sin.}^2A + \text{cos.}^2A = \text{sec.}^2A - \text{tang.}^2A = \text{cosec.}^2A - \text{cot.}^2A$. Fig. 1.

29. Donc $\text{séc.}A = \sqrt{(R^2 + \text{tang.}^2A)} = \frac{RR}{\text{cos.}A}$, (23).

30. Et $\text{coséc.}A = \sqrt{(R^2 + \text{cot.}^2A)} = \frac{RR}{\text{sin.}A}$, (24).

31. Substituons, dans l'analogie (21), la valeur de cos.A tirée de la seconde équation (29) ; nous aurons $\text{sin.}A = \frac{R \times \text{tang.}A}{\sqrt{(RR + \text{tang.}^2A)}}$; et mettant de même dans l'équation $\text{cot.}A = \frac{R \times \text{cos.}A}{\text{sin.}A}$, (22), la valeur de sin.A prise dans la seconde équation (30), nous aurons $\text{cos.}A = \frac{R \times \text{cot.}A}{\sqrt{(RR + \text{cot.}^2A)}}$.

32. De même en mettant alternativement dans l'analogie (21)

les valeurs de sin.A et de cos.A tirées de l'équation $R^2 = \text{sin.}^2A + \text{cos.}^2A$, on a les équations suivantes;

$$\text{tang.}A = \frac{R \times \text{sin.}A}{\sqrt{(RR - \text{sin.}^2A)}} = \frac{\sqrt{(RR - \text{cos.}^2A)}}{R \times \text{cos.}A}.$$

Fig. 1. 33. Si l'angle C croît, et devient, par exemple, MCD, on voit que le sinus ML, la tangente DK et la sécante CK deviennent aussi plus grandes qu'elles n'étoient pour l'angle C; et qu'au contraire le cosinus CL, la cotangente FI et la cosécante CI diminuent.

34. Si l'angle augmente de maniere qu'il soit de 90°, il est évident, à l'inspection de la figure, que le sinus et la cosécante deviennent égaux au rayon, avec lequel ils se confondent; que le cosinus et la cotangente se réduisent à zéro; enfin que la tangente et la sécante sont alors infinies, puisque, devenues paralleles entre elles, elles ne peuvent plus se rencontrer (7).

35. Si l'angle continue à croître et devient obtus comme DCO, les définitions données (4, 7) ne peuvent plus avoir lieu; on a alors nécessairement pour lignes trigonométriques de DCO, celles de son supplément TCO, identité qu'on a déja démontrée (19) pour le sinus, et par conséquent pour la cosécante (26). De cette nécessité résultent, il est vrai, des cas douteux, dans lesquels il n'est pas possible de discerner par la seule Trigonométrie si un sinus donné ou une cosécante appartiennent à un angle aigu, ou à son supplément. Mais les autres lignes trigonométriques ne sont pas sujettes à cet inconvénient, parceque le signe négatif distingue celles qui appartiennent à l'angle obtus.

36. En effet, en adoptant pour cosinus de l'angle obtus DCO le cosinus CP de son supplément TCO, on peut observer que le cosinus CA, diminuant toujours à mesure que l'arc primitif BD augmente, passe enfin par zéro (34) avant de continuer au-delà du centre dans la direction CP. Donc (16) *le cosinus d'un angle obtus est négatif*, *et*, par la même raison, *la cotangente*, qui dans le cas supposé est FN. Mais (23), $\text{cos.} = \frac{R^2}{\text{séc.}}$, et (22),

cot. $= \frac{R^2}{tang.}$. Donc, lorsque le cos. et la cot. sont négatifs, la séc. et la tang. sont aussi négatives; puisque le rayon est une quantité réelle, dont le quarré ne peut jamais être négatif. Donc *la tangente et la sécante de l'angle obtus sont négatives.* Mais elles étoient devenues infinies, lorsque l'angle s'étoit accru jusqu'à 90°, (34) : donc *les quantités qui, en variant, passent par l'infini, se changent de positives en négatives, et* vice versâ (38), *de même que lorsqu'elles passent par zéro* (16). Donc *la cosécante et le sinus de l'angle obtus*, n'ayant passé ni par zéro ni par l'infini, *continuent d'être positifs.* Fig. 1.

Ainsi la cosécante CN de l'angle obtus DCO est positive; sa sécante CU et sa tangente TU sont négatives.

37. Par l'inspection de la figure, et d'après ce que nous avons dit, il est facile de comprendre que si l'arc croît jusqu'à devenir de 180°, le sinus et la tangente deviennent nuls, la cotangente et la cosécante infinies, le cosinus et la sécante égaux au rayon.

38. En Astronomie, les longitudes et les ascensions droites des astres se comptent de 0° jusqu'à 360°. On a donc besoin des lignes trigonométriques, même dans le troisième et dans le dernier quart du cercle. En négligeant, pour abréger, ce qui concerne la sécante et la cosécante (27); si on procede par la méthode et les regles données (16, 36), on trouvera que de 180° à 270°, le sinus et le cosinus sont négatifs, la tangente et la cotangente positives. Un arc plus grand que de 180°, comme DFTS, a RS pour sinus, CR pour cosinus, TZ pour tangente, VX pour cotangente.

39. Lorsque l'arc est exactement de 270°, le sinus devient égal au rayon, la tangente infinie; le cosinus et la cotangente se réduisent à zéro.

40. Donc dans le dernier quart du cercle, c'est-à-dire lorsqu'un arc quelconque, comme DFTVY, embrassera plus des trois quarts du cercle, le cosinus sera positif (16, 36); le sinus, la tangente et la cotangente seront négatifs.

41. Enfin lorsque l'arc devient de 360°, il arrive au point où il avoit pris naissance, et d'où l'on avoit commencé à en compter les degrés. Le sinus et la tangente deviennent alors nuls, le cosinus égal au rayon, et la cotangente infinie.

42. La table suivante servira de récapitulation pour ce que nous venons de dire, et sera plus commode à consulter dans la pratique. J'ai omis la cotangente, la sécante et la cosécante, parceque leurs signes sont respectivement (26, 36) les mêmes que ceux de la tangente, du cosinus et du sinus. On verra, par cette table, quand ces dernieres lignes sont égales à zéro, à l'infini, ou au rayon; le rayon y est exprimé par l'unité (25). Il faut observer que la cotangente, la sécante et la cosécante sont infinies, lorsque les lignes qui leur correspondent en raison inverse (22, 23, 24), c'est-à-dire la tangente, le cosinus et le sinus, sont égales à zéro.

En désignant une ligne égale à zéro ou à l'infini, je lui conserve le signe qu'elle avoit avant d'arriver à ce terme. Il est au surplus inutile de discuter quel signe convient en pareil cas; les équations trigonométriques sont également justes, soit qu'on change ou non les signes, au point où la valeur est ou zéro ou infinie; pourvu que dans tous les cas semblables on adopte constamment la même regle.

Table des Signes des lignes trigonométriques dans les quatre quarts du Cercle.

ARC.	SINUS.	COSINUS.	TANG.
A 0° ou à 360°	— 0	+ 1	— 0
Depuis 0° jusqu'à 90°	+	+	+
à 90°	+ 1	+ 0	+ ∞
Depuis 90° jusqu'à 180°	+	—	—
à 180°	+ 0	— 1	— 0
Depuis 180° jusqu'à 270°	—	—	+
à 270°	— 1	— 0	+ ∞
Depuis 270° jusqu'à 360°	—	+	—

43. En faisant $R = 1$, (25), on a (18), $\sin.30° = \frac{1}{2}$; mais (28), $\cos.^2 30° = R^2 - \sin.^2 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$: donc $\cos.30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, (13).

44. De même, puisqu'on a (28), $R^2 = \sin.^2 45° + \cos.^2 45° = 2\sin.^2 45°$ (5) $= 1$, on aura $\sin.45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

45. C'est à peu près en suivant les principes qui nous ont fait trouver la valeur du sinus et du cosinus de 30° et de 45°, que les géometres ont calculé, par le moyen d'autres formules que nous verrons en leur lieu, la valeur des sinus, tangente et sécante de tout arc depuis 0° jusqu'à 90°, de degré en degré, et même de minute en minute. Les tables qui contiennent ces valeurs donnent donc le rapport *constant* (25) qui regne entre le rayon du cercle et chacune des lignes trigonométriques.

CHAPITRE III.

Idée préliminaire de la résolution des triangles rectilignes.

46. Les Commençants sont ordinairement rebutés dans l'étude des sciences par les difficultés que leur présente d'abord une longue théorie élémentaire, dont ils n'apperçoivent pas encore l'utilité pratique. Ce chapitre sera consacré à leur faire pressentir les usages et les applications de la Trigonométrie.

Puisque AB est le sinus et AC le cosinus de l'arc BD décrit d'un rayon BC, on a évidemment les analogies suivantes : Fig. 1.

$$BC : AB :: R : \sin.C, \quad BC : AC :: R : \cos.C.$$

Mais dans tout triangle rectangle, on peut concevoir que l'hypothénuse décrive un arc tel que BD, qui rencontre un des côtés prolongé tel que (CA + AD). Donc *dans tout triangle rectangle l'hy-*

Fig. 1. *pothénuse est au rayon comme un côté est au sinus de l'angle opposé*, ou bien *comme un côté est au cosinus de l'angle adjacent.*

47. On croiroit au premier coup-d'œil qu'on ne peut tirer aucun fruit de ces proportions qui semblent contenir un cercle vicieux, comme cette analogie 2 : 1 :: 2 : 1 ; puisqu'elles ne sont absolument que la répétition des définitions données (4). Mais qu'on se rappelle que le rapport R : sin.C (il en faut dire autant du rapport R : cos.C) est un rapport *constant* (25), quelle que soit la grandeur de l'hypothénuse qui représente ici le rayon, pourvu seulement que l'angle C ne change point ; on a de même, par exemple, GC : CD :: R : ~~sin~~ cos.C. L'art de la Trigonométrie consiste donc en ce qu'un angle connu dans un triangle rectangle suffit pour faire connoître le rapport qui existe entre l'hypothénuse et chacun des côtés. De là il résulte que si, outre l'angle, on connoît la valeur absolue de l'un des côtés, la Trigonométrie donne, pour ainsi dire d'un trait de plume, la valeur absolue de l'hypothénuse ; et *vice versâ :* ce qu'on verra clairement dans les exemples suivants.

48. Supposons que CL soit une distance de trois lieues déja connue, et qu'on desire de connoître la distance CM qu'on ne peut mesurer avec la toise, parcequ'une riviere ou quelque autre obstacle s'y oppose. Pour y parvenir sans abandonner le point C, et sans fatigue, que l'on mesure de combien de degrés est l'angle MCL ; ce qui est très facile, comme nous le verrons en son lieu : supposons que cet angle se trouve de 60° ; alors cos.MCL = cos.60° = (5) sin. 30° = (18) $\frac{1}{2}$ R.. On aura par conséquent (46), MC : CL :: R : cos.MCL :: R : $\frac{1}{2}$R :: 1 : $\frac{1}{2}$, (9). Donc la distance MC est double de CL, ou MC = 6 lieues.

De même, en supposant MCL de 60°, si la distance connue étoit CD, que l'on eût, par exemple, CD = 9 lieues, on trouveroit 18 lieues pour la valeur de CK.

Si l'angle mesuré est ACB et de 36° 52′, que la distance connue, désignée par AC, soit de six lieues, et que l'on cherche BC ;

puisqu'on a par les tables, (45), R : cos.36° 52′ :: 1 : 0,8, on aura, (46), BC : AC :: R : cos.C :: 1 : 0,8. Par conséquent BC $= \frac{AC}{0,8} = \frac{6}{0,8} = 7,5$. Donc la distance BC est de 7 lieues et $\frac{1}{2}$.

Si au lieu de AC la distance connue étoit CD, de 9 lieues, et CG la distance cherchée, on auroit CG : CD :: 1 : 0,8, ou CG $= \frac{CD}{0,8} = \frac{9}{0,8} = 11,25$. Donc CG = 11 lieues $\frac{1}{4}$.

Ces exemples suffiront pour donner une idée de la résolution des triangles rectangles.

49. Si on a un triangle obliquangle comme ABC, il est à présent facile de le résoudre, en le convertissant en deux triangles rectangles BCD, ACD, par le moyen de la perpendiculaire CD, menée de l'un quelconque des angles comme C, sur le côté opposé AB prolongé, s'il est nécessaire, comme dans la figure 3. On a alors (46), R : sin.B :: BC : CD $= \frac{BC \times \sin.B}{R}$, et R : sin.A :: AC : CD $= \frac{AC \times \sin.A}{R}$. Donc en mettant en équation les deux valeurs trouvées de CD, on a BC × sin.B = AC × sin.A ; d'où l'on tire la proportion Fig. 2 & 3.

BC : AC :: sin.A : sin.B.

Si on réfléchit que (fig. 3), sin.A = sin.CAD = sin.CAB, (19), et que les fig. 2 et 3, dans lesquelles nous n'avons fixé ni la grandeur des angles ni celle des côtés, représentent dès-lors tout triangle obliquangle quel qu'il soit (ce qu'on doit remarquer une fois pour toutes), on conclura de la derniere proportion cette regle générale ; *les côtés d'un triangle rectiligne sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Cette regle s'étend évidemment aux triangles rectangles, puisque, par exemple, dans la proportion R : sin.A :: AC : CD, R est le sinus (18) de l'angle droit D opposé à l'hypothénuse AC.

Il est aisé de reconnoître par cette même regle et par celle qui a été donnée (18), que quoique le plus grand côté soit toujours op-

posé au plus grand angle et *vice versâ*, les côtés ne sont cependant pas en proportion avec les angles opposés.

Fig. 7. 5o. Exemple de la résolution du triangle obliquangle. Soit connue la distance AC, de 1000 toises, et par le moyen d'instruments convenables, et dont nous parlerons dans la suite, soient déterminés B de 53° 8′, et A de 31° 20′. On a dans les tables sin. 53° 8′ = 0,8; et sin. 31°20′ = 0,52. Donc (49), $BC = \frac{AC \times \sin. A}{\sin. B} = \frac{1000 \times 0,52}{0,8} = \frac{520}{0,8} = 650$. Ainsi sans mesurer à la toise la distance BC, la Trigonométrie fait connoître avec la derniere précision qu'elle est de 650 toises.

Ce n'est au surplus qu'un essai que nous donnons de la solution d'un seul cas de la Trigonométrie rectiligne obliquangle. Nous verrons par la suite comment on peut résoudre tous les cas, toutes les combinaisons.

CHAPITRE IV.

Valeurs relatives des lignes trigonométriques appartenantes à la somme ou à la différence de deux arcs, et aux arcs multiples.

51. LE peu de principes que nous avons exposés jusqu'à présent, suffira pour conduire à tous les théorêmes de la Trigonométrie, et même pour approfondir cette science, soit en se servant des méthodes et des regles que nous avons suivies et données, soit en faisant de simples substitutions.

Le desir d'amener l'étude de la Trigonométrie à un pareil degré de facilité, nous a engagés à nous étendre dans les chapitres précédents; et nous croyons qu'on ne nous reprochera pas d'y avoir été prolixes,

prolixes, si l'on considere combien il étoit important d'y mettre la plus grande clarté.

PROBLÊME. *Connoissant les sinus et les cosinus de deux arcs, trouver les sinus et les cosinus de la somme et de la différence de ces deux arcs.*

De ce que dans tout triangle rectiligne la somme de deux angles est toujours le supplément du troisieme, c'est-à-dire de ce que dans un triangle ACB par exemple, $A+B = 180° - ACB$, il suit (19) que $\sin.ACB = \sin.(A+B)$. Cela posé, la solution du Problême est facile par la seule Trigonométrie, et nous n'aurons recours, pour trouver cette solution, ni aux triangles semblables ni à des figures compliquées. Fig. 2.

En effet (49), $AC : \sin.B :: AB : \sin.ACB = \frac{AB \times \sin.B}{AC} = \sin.(A+B)$. Mais en supposant qu'on mene CD perpendiculaire sur le côté AB, on a (46), $BC : CD :: R : \sin.B = \frac{R \times CD}{BC}$. En substituant cette valeur de sin.B dans l'équation précédente (nous ferons à l'avenir ces substitutions sans en prévenir, parcequ'elles se présentent d'elles-mêmes), on aura $\sin.(A+B) = \frac{R \times CD \times AB}{AC \times BC}$. Or $AB = BD + AD$. Donc $\sin.(A+B) = \frac{R \times CD \times BD}{AC \times BC} + \frac{R \times CD \times AD}{AC \times BC}$. Mais (46), $\frac{CD}{AC} = \frac{\sin.A}{R}$, $\frac{BD}{BC} = \frac{\cos.B}{R}$, $\frac{CD}{BC} = \frac{\sin.B}{R}$ et $\frac{AD}{AC} = \frac{\cos.A}{R}$. Donc $\sin.(A+B) = \frac{\sin.A \cos.B + \sin.B \cos.A}{R}$.

52. Si on applique cette solution à la fig. 3, on observera que $AB = BD - AD$; que $ACB = 180° - CAB - B = CAD - B$, et que dans ce cas-ci l'angle CAD correspond à l'angle A employé dans les équations $\frac{CD}{AC} = \frac{\sin.A}{R}$ et $\frac{AD}{AC} = \frac{\cos.A}{R}$. En faisant les changements qui résultent de ces remarques, la démonstration précédente donnera Fig. 3.

$$\sin.(A-B) = \frac{\sin.A \cos.B - \sin.B \cos.A}{R}.$$

53. (28), $\cos.^2(A+B) = R^2 - \sin.^2(A+B) =$ (51) $\frac{R^4 - \sin.^2A \cos.^2B - 2 \sin.A \cos.A \sin.B \cos.B - \sin.^2B \cos.^2A}{R^2}$. Mais $\cos.^2B = R^2 - \sin.^2B$; et $\sin.^2B = R^2 - \cos.^2B$: si on substitue ces valeurs, et qu'ensuite on observe que $R^4 - R^2(\sin.^2A + \cos.^2A) =$ (28) $R^4 - R^4 = 0$, on trouvera pour reste cette nouvelle équation ; $\cos.^2(A+B) = \frac{\cos.^2A \cos.^2B - 2 \sin.A \cos.A \sin.B \cos.B + \sin.^2A \sin.^2B}{R^2}$; et en extrayant les racines,

$$\cos.(A+B) = \frac{\cos.A \cos.B - \sin.A \sin.B}{R}.$$

54. En opérant de la même maniere sur la formule (52), on trouvera

$$\cos.(A-B) = \frac{\cos.A \cos.B + \sin.A \sin.B}{R}.$$

La solution de ce problême a produit quatre équations qui sont d'un usage infini dans la Trigonométrie. Il seroit hors de propos de les citer continuellement : pour nous en dispenser, nous recommanderons de faire en sorte de les retenir ; ce qui est très facile, puisqu'en substance elles se réduisent à deux, et que c'est la seule différence des signes qui de ces deux équations en forme quatre.

Il est facile de voir que les mêmes équations servent à développer les valeurs des sinus et des cosinus de la somme et de la différence d'un nombre d'arcs quelconque. Par exemple, $\sin.(A+B+C) = \sin.(A+\overline{B+C}) = \sin.A \cos.(B+C) + \cos.A \sin.(B+C) = \sin.A \cos.B \cos.C - \sin.A \sin.B \sin.C + \cos.A \sin.B \cos.C + \cos.A \cos.B \sin.C$. De même $\sin.(A-B+C) = \sin.(A-\overline{B-C}) = \sin.A \cos.(B-C) - \cos.A \sin.(B-C) = \sin.A \cos.B \cos.C + \sin.A \sin.B \sin.C - \cos.A \sin.B \cos.C + \cos.A \cos.B \sin.C$.

55. A l'avenir nous emploierons constamment 1 au lieu de R. Dans les cas où le rayon differe de celui des tables, comme il arrive par exemple dans la résolution des équations du 3e degré ; voici la regle pour l'introduire convenablement dans une formule trigonométrique quelconque.

Dans chacune des proportions et équations que nous avons vues jusqu'ici et desquelles se déduisent les plus composées, on a pu remarquer que chaque terme contient un nombre égal de facteurs. Prenons pour exemple une des équations les moins simples, telles que l'équation (53), $R^2 \times \cos.^2(A+B) = \cos.^2 A \cos.^2 B - 2 \sin. A \cos. A \sin. B \cos. B + \sin.^2 A \sin.^2 B$; chacun de ses termes est de quatre *dimensions*, c'est-à-dire formé du produit de quatre facteurs; par exemple, le premier membre est $R \times R \times \cos.(A+B) \times \cos.(A+B)$, et il en est de même des autres termes. On appelle *équation homogene* ou de *dimensions égales* celle qui renferme dans chaque terme un nombre égal de facteurs algébriques ou géométriques (sans avoir d'ailleurs égard aux coefficients numériques). Si on conservoit la lettre R dans toutes les opérations trigonométriques, on trouveroit, dans chaque formule, tous les termes d'égale dimension. Il sera donc facile de les rendre tels, au besoin, en joignant à chacun d'eux le facteur R élevé à la puissance convenable pour les rendre homogènes. Par exemple, en nommant x, y, deux lignes trigonométriques, soit une équation de cette forme, $4x^3 = 3x - y + 2$, dans laquelle x^3 est de trois dimensions, x et y d'une seule, et 2 sans aucune dimension; pour introduire régulièrement le rayon dans cette équation, il faut écrire $4x^3 = 3R^2x - R^2y + 2R^3$. Telle eût été l'équation en elle-même, si l'on n'en eût pas d'abord fait disparoître R en y substituant l'unité.

56. On ne connoîtra que peu-à-peu, et dans le cours de la Trigonométrie, l'utilité des formules multipliées que nous allons donner.

$\text{Tang.}(A+B) = (21)\ \frac{\sin.(A+B)}{\cos.(A+B)} = \frac{\sin. A \cos. B + \sin. B \cos. A}{\cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B}$. En divisant tous les termes de cette derniere fraction (9) d'abord par $\cos. A \times \cos. B$, et ensuite par $\sin. A \sin. B$, on aura

$$\text{tang.}(A+B) = \frac{\text{tang.}\, A + \text{tang.}\, B}{1 - \text{tang.}\, A \,\text{tang.}\, B} = \frac{\text{cot.}\, B + \text{cot.}\, A}{\text{cot.}\, B \,\text{cot.}\, A - 1}.$$

57. En procédant de la même maniere sur les valeurs de $\frac{\sin.(A-B)}{\cos.(A-B)}$, (52, 54), on trouvera

$$\text{tang.}(A-B) = \frac{\text{tang.}\, A - \text{tang.}\, B}{1 + \text{tang.}\, A \,\text{tang.}\, B} = \frac{\text{cot.}\, B - \text{cot.}\, A}{\text{cot.}\, B \,\text{cot.}\, A + 1}.$$

58. Par de semblables opérations, on aura

$$\frac{\sin.(A+B)}{\sin.(A-B)} = \frac{\text{tang.}A+\text{tang.}B}{\text{tang.}A-\text{tang.}B} = \frac{\text{cot.}B+\text{cot.}A}{\text{cot.}B-\text{cot.}A}.$$

59. En divisant de même d'abord par sin.B cos.A, et ensuite par sin.A cos.B, les valeurs de $\frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A-B)}$, (53, 54), on aura

$$\frac{\cos.(A+B)}{\cos.(A-B)} = \frac{\text{cot.}B-\text{tang.}A}{\text{cot.}B+\text{tang.}A} = \frac{\text{cot.}A-\text{tang.}B}{\text{cot.}A+\text{tang.}B}.$$

60. A et B sont des expressions indéterminées qui désignent deux arcs d'une grandeur quelconque. On peut donc leur assigner toutes les valeurs qui conviennent à un arc de cercle.

Soit d'abord B = A. Si on écrit dans les trois formules (51, 53, 56), A au lieu de B, on trouvera celles qui suivent;

$$\sin.2A = 2\sin.A\cos.A.$$

61. $\text{Cos.}2A = \cos.^2A - \sin.^2A.$

62. $\text{Tang.}2A = \frac{2\,\text{tang.}A}{1-\text{tang.}^2A} = \frac{2\,\text{cot.}A}{\text{cot.}^2A-1}.$

63. Dans ces trois équations, l'arc employé dans le premier membre est double de l'arc que contient le second membre. Donc elles peuvent encore s'écrire comme il suit:

$$\sin.A = 2\sin.\tfrac{1}{2}A\cos.\tfrac{1}{2}A.$$

64. $\text{Cos.}A = \cos.^2\tfrac{1}{2}A - \sin.^2\tfrac{1}{2}A.$

65. $\text{Tang.}A = \frac{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}A}{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}A} = \frac{2\,\text{cot.}\frac{1}{2}A}{\text{cot.}^2\frac{1}{2}A-1}.$

66. En substituant alternativement, dans l'équation (64), les valeurs (28) de $\cos.^2\frac{1}{2}A$ et de $\sin.^2\frac{1}{2}A$, on a encore

$$\cos.A = 1 - 2\sin.^2\tfrac{1}{2}A = 2\cos.^2\tfrac{1}{2}A - 1.$$

67. De là il suit que $2\sin.^2\frac{1}{2}A = 1 - \cos.A = \text{sin.v.}A$, (4). Les deux premieres de ces expressions sont celles qu'on emploie au lieu du *sinus verse* qui n'est point en usage dans la Trigonométrie.

68. Si on divise par $\text{tang.}\frac{1}{2}A$ le second membre de la premiere équation (65), et qu'on se souvienne que $\frac{1}{\text{tang.}} = \text{cot.}$ (22) on aura

$$\text{tang.}A = \frac{2}{\text{cot.}\frac{1}{2}A - \text{tang.}\frac{1}{2}A}.$$

69. De là se déduit $\text{cot.}\frac{1}{2}A - \text{tang.}\frac{1}{2}A = \frac{2}{\text{tang.}A} = 2\,\text{cot.}A.$

Donc $\text{tang.}\frac{1}{2}A = \text{cot.}\frac{1}{2}A - 2\,\text{cot.}A$.

70. $1 - \cos.A = (67)\ 2\sin.\frac{1}{2}A \sin.\frac{1}{2}A = (63)\ \sin.\frac{1}{2}A \times \frac{\sin.A}{\cos.\frac{1}{2}A} = \sin.A \text{ tang.}\frac{1}{2}A$, (21). Donc

$$\text{tang.}\frac{1}{2}A = \frac{1-\cos.A}{\sin.A}.$$

71. $1 + \cos.A = (66)\ 2\cos.\frac{1}{2}A \cos.\frac{1}{2}A = \cos.\frac{1}{2}A \times \frac{\sin.A}{\sin.\frac{1}{2}A} = \frac{\sin.A}{\text{tang.}\frac{1}{2}A}$. Donc on a aussi

$$\text{tang.}\frac{1}{2}A = \frac{\sin.A}{1+\cos.A}.$$

72. Les deux précédentes formules multipliées l'une par l'autre donnent

$$\text{tang.}^2\frac{1}{2}A = \frac{1-\cos.A}{1+\cos.A}.$$

73. $\text{Sin.}A = (63)\ 2\sin.\frac{1}{2}A\cos.\frac{1}{2}A = (21)\ 2\cos.^2\frac{1}{2}A \text{ tang.}\frac{1}{2}A$. Donc (29)

$$\sin.A = \frac{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}A}{1+\text{tang.}^2\frac{1}{2}A}.$$

74. En divisant cette équation par la premiere donnée (65), on aura (21)

$$\cos.A = \frac{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}A}{1+\text{tang.}^2\frac{1}{2}A}.$$

75. En multipliant cette fraction par $\text{cot.}\frac{1}{2}A$, et se souvenant toujours que $\text{cot.} \times \text{tang.} = 1$, (22), on trouvera

$$\cos.A = \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}A - \text{tang.}\frac{1}{2}A}{\text{cot.}\frac{1}{2}A + \text{tang.}\frac{1}{2}A}.$$

76. En multipliant cette équation par l'équation (68), il en résulte que

$$\sin.A = \frac{2}{\text{cot.}\frac{1}{2}A + \text{tang.}\frac{1}{2}A}.$$

77. En substituant dans cette derniere équation la valeur (69) de $\text{tang.}\frac{1}{2}A$, et divisant la fraction par 2, on aura

$$\sin.A = \frac{1}{\text{cot.}\frac{1}{2}A - \text{cot.}A}.$$

78. En substituant la valeur de $\text{cot.}\frac{1}{2}A$ prise dans l'équation (69), on aura

$$\sin.A = \frac{1}{\text{cot.}A + \text{tang.}\frac{1}{2}A}.$$

79. $\text{Tang.}\frac{1}{2}A = (70)\ \frac{1-\cos.A}{\sin.A} = \frac{1-\cos.A}{\text{tang.}A\cos.A}$. Donc $\text{tang.}\frac{1}{2}A \times$

tang.A $= \frac{1-\cos.A}{\cos.A} = \frac{1}{\cos.A} - 1$. Donc $\frac{1}{\cos.A} = 1 + \text{tang.}\frac{1}{2}A \times$ tang.A, et par conséquent

$$\cos.A = \frac{1}{1+\text{tang.}\frac{1}{2}A\,\text{tang.}A}.$$

80. Sin.(A + B) × cos.(A — B) = (51, 54) sin.A cos.A × (sin.²B + cos.²B) + sin.B cos.B (sin.²A + cos.²A) = (28) sin.A cos.A + sin.B cos.B = (60) $\frac{1}{2}$ (sin.2A + sin.2B). Donc (63)

$$\sin.A + \sin.B = 2\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(A-B).$$

81. En traitant de même les équations (52, 53), on trouvera

$$\sin.A - \sin.B = 2\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)\cos.\tfrac{1}{2}(A+B).$$

82. Cos. (A + B) cos.(A — B) = (53, 54) cos.²A cos.²B — sin.²A sin.²B = (28) cos.²A — sin.²B (sin.²A + cos.²A). Donc cos.²A — sin.²B = cos.(A + B) cos.(A — B) = cos.²B — sin.²A.

83. Cos.²A = (66) $\frac{1}{2}$ (1 + cos.2A), et sin.²B = $\frac{1}{2}$ (1 — cos.2B). Avec ces substitutions, la formule précédente devient $\frac{1}{2}$ cos.2B + $\frac{1}{2}$ cos.2A = cos.(A + B) cos.(A — B). D'où l'on tire (63)

$$\cos.B + \cos.A = 2\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(A-B).$$

84. En opérant sur les équations (51, 52), comme on a fait pour les deux formules précédentes, on trouvera les deux suivantes: sin.²A — sin.²B = sin. (A + B) sin. (A — B) = cos.²B — cos.²A, (28); et

85. Cos.B — cos.A = 2 sin. $\frac{1}{2}$ (A + B) sin. $\frac{1}{2}$ (A — B).

86. En faisant encore attention que $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$, et que $\frac{\text{cos.}}{\text{sin.}} = \text{cot.}$, (21, 22), on aura (80, 81)

$$\frac{\sin.A+\sin.B}{\sin.A-\sin.B} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{cot.}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

87. De même (83, 85)

$$\frac{\cos.B+\cos.A}{\cos.B-\cos.A} = \text{cot.}\tfrac{1}{2}(A+B)\,\text{cot.}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

88. On trouve de la même maniere les formules suivantes, dont nous n'avons vu aucun usage, mais que nous croyons ne devoir pas omettre, tant à cause de leur simplicité, qu'à cause de l'utilité qui résulteroit de la substitution de l'expression interné-

diaire aux expressions extrêmes, si celles-ci se présentoient dans quelque cas.

$$\frac{\sin.A+\sin.B}{\cos.A+\cos.B}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos.B-\cos.A}{\sin.A-\sin.B}.$$

$$\frac{\sin.A+\sin.B}{\cos.B-\cos.A}=\cot.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\cos.A+\cos.B}{\sin.A-\sin.B}.$$

89. $\text{Tang.}A+\text{tang.}B=\frac{\sin.A}{\cos.A}+\frac{\sin.B}{\cos.B}=\frac{\sin.A\cos.B+\sin.B\cos.A}{\cos.A\cos.B}.$

Donc

$$\text{tang.}A+\text{tang.}B=\frac{\sin.(A+B)}{\cos.A\cos.B}.$$

Par une opération semblable on aura les trois formules suivantes.

90. $\text{Cot.}B+\cot.A=\frac{\sin.(A+B)}{\sin.A\sin.B}.$

91. $\text{Tang.}A-\text{tang.}B=\frac{\sin.(A-B)}{\cos.A\cos.B}.$

92. $\text{Cot.}B-\cot.A=\frac{\sin.(A-B)}{\sin.A\sin.B}.$

93. En multipliant l'une par l'autre les deux formules (89, 91), on a

$$\text{tang.}^2A-\text{tang.}^2B=\frac{\sin.(A+B)\sin.(A-B)}{\cos.^2A\cos.^2B}.$$

94. Le produit des deux autres (90, 92), donne aussi

$$\cot.^2B-\cot.^2A=\frac{\sin.(A+B)\sin.(A-B)}{\sin.^2A\sin.^2B}.$$

95. Par des additions et des soustractions convenables sur les formules (51, 52, 53, 54), on aura les quatre équations suivantes;

$$\sin.(A+B)+\sin.(A-B)=2\sin.A\cos.B.$$

96. $\text{Sin.}(A+B)-\sin.(A-B)=2\sin.B\cos.A.$

97. $\text{Cos.}(A+B)+\cos.(A-B)=2\cos.A\cos.B.$

98. $\text{Cos.}(A-B)-\cos.(A+B)=2\sin.A\sin.B.$

On a pu observer que par les résultats des calculs, c'est toujours le cosinus du plus grand arc (que nous avons constamment désigné par A), qui se trouve devoir être soustrait du cosinus de l'arc moindre B. Il en est de même des cotangentes. C'est une suite de leur nature, (33).

99. Maintenant soit $A=45°$. Au lieu de A, écrivons cette va-

leur dans les formules (51, 53, 56, 57), et nous aurons les quatre formules qui suivent :

$$\sin.(45° + B) = \frac{\cos.B + \sin.B}{\sqrt{2}} (44) = \cos.(45° - B), (5).$$

100. $\text{Cos.}(45° + B) = \frac{\cos.B - \sin.B}{\sqrt{2}} = \sin.(45° - B)$.

101. $\text{Tang.}(45° + B) = (17) \frac{1 + \text{tang.}B}{1 - \text{tang.}B}$.

102. $\text{Tang.}(45° - B) = \frac{1 - \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}B}$.

Les deux dernieres équations peuvent s'exprimer en un seule, qui sera (11),

$$\text{tang.}(45° \pm B) = \frac{1 \pm \text{tang.}B}{1 \mp \text{tang.}B}.$$

103. $\text{Tang.}(45° + B) - \text{tang.}(45° - B) = \frac{1 + \text{tang.}B}{1 - \text{tang.}B} - \frac{1 - \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}B} = \frac{4\,\text{tang.}B}{1 - \text{tang.}^2B}$, en réduisant au même dénominateur. Donc (62)

$$\text{tang.}2B = \frac{\text{tang.}(45° + B) - \text{tang.}(45° - B)}{2}.$$

104. En élevant au quarré l'équation (99), nous trouverons $2\sin.^2(45° + B) = \cos.^2B + \sin.^2B + 2\sin.B\cos.B =$ (28, 60) $1 + \sin.2B$. Donc (63)

$$1 + \sin.B = 2\sin.^2(45° + \tfrac{1}{2}B) = 2\cos.^2(45° - \tfrac{1}{2}B).$$

105. En opérant de même sur l'équation (100), on aura

$$1 - \sin.B = 2\cos.^2(45° + \tfrac{1}{2}B) = 2\sin.^2(45° - \tfrac{1}{2}B).$$

Ce sont les expressions qui s'emploient au lieu de *cosinus verse* (5).

106. Donc $\frac{1 + \sin.B}{1 - \sin.B} = \text{tang.}^2(45° + \frac{1}{2}B)$, et de même $\frac{1 - \sin.B}{1 + \sin.B} = \text{tang.}^2(45° - \frac{1}{2}B)$.

107. En traitant sin.B comme une quantité inconnue, et résolvant séparément ces deux dernieres équations, on trouvera

$$\sin.B = \frac{\text{tang.}^2(45° + \frac{1}{2}B) - 1}{\text{tang.}^2(45° + \frac{1}{2}B) + 1} = \frac{1 - \text{tang.}^2(45° - \frac{1}{2}B)}{1 + \text{tang.}^2(45° - \frac{1}{2}B)}.$$

108. En multipliant l'avant-derniere fraction par $\text{cot.}(45° + \frac{1}{2}B)$, on a $\sin.B = \frac{\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}B) - \text{cot.}(45° + \frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}B) + \text{cot.}(45° + \frac{1}{2}B)} = \frac{\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(45° - \frac{1}{2}B)}{\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}B) + \text{tang.}(45° - \frac{1}{2}B)}$.

109. En divisant l'équation formée de la premiere et de la derniere de ces trois quantités égales, par l'équation (103) exprimée comme

comme il suit, $\text{tang.}B = \frac{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}B)}{2}$, on aura (21),

$$\cos.B = \frac{2}{\text{tang.}(45^\circ + \frac{1}{2}B) + \text{tang.}(45^\circ - \frac{1}{2}B)} = \frac{2}{\text{cot.}(45^\circ - \frac{1}{2}B) + \text{cot.}(45^\circ + \frac{1}{2}B)}.$$

110. Soit $A = 60^\circ$, et qu'on se souvienne que $\cos.60^\circ = \frac{1}{2}$ (48). Les formules (96, 97) donneront les deux suivantes;

$$\sin.(60^\circ + B) - \sin.(60^\circ - B) = \sin.B.$$

111. $\text{Cos.}(60^\circ + B) + \cos.(60^\circ - B) = \cos.B.$

112. Qu'on fasse $A = 60^\circ + B = 90^\circ - (30^\circ - B)$; on aura $\text{cot.}(60^\circ + B) = (7)\ \text{tang.}(30^\circ - B) = \text{cot.}A$. Mais (69), $\text{cot.}A = \frac{1}{2}(\text{cot.}\frac{1}{2}A - \text{tang.}\frac{1}{2}A)$: donc

$$\text{tang.}(30^\circ - B) = \frac{\text{cot.}(30^\circ + \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(30^\circ + \frac{1}{2}B)}{2}.$$

113. En faisant $A = (60^\circ - B)$, on trouve de la même maniere

$$\text{tang.}(30^\circ + B) = \frac{\text{cot.}(30^\circ - \frac{1}{2}B) - \text{tang.}(30^\circ - \frac{1}{2}B)}{2}.$$

114. Faisons maintenant $A = 45^\circ + C$, et $B = 45^\circ - C$; nous aurons $A + B = 90^\circ$, et $A - B = 2C$. La formule (97) donnera $\cos.(45^\circ + C)\cos.(45^\circ - C) = \frac{1}{2}\cos.2C + \frac{1}{2}\cos.90^\circ = (34)\ \frac{1}{2}\cos.2C = (66)\ \frac{1}{2}(2\cos.^2C - 1)$. Donc

$$\cos.^2C - \tfrac{1}{2} = \cos.(45^\circ + C)\cos.(45^\circ - C).$$

115. Supposons encore $A = 60^\circ + C$, et $B = 60^\circ - C$; nous aurons $A + B = 120^\circ$, et $A - B = 2C$. La même équation (97) donnera $\cos.(60^\circ + C)\cos.(60^\circ - C) = \frac{1}{2}\cos.2C + \frac{1}{2}\cos.120^\circ = \cos.^2C - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.120^\circ$; mais $\cos.120^\circ = \cos.60^\circ = -\frac{1}{2}$, (36). Donc

$$\cos.^2C - \tfrac{3}{4} = \cos.(60^\circ + C)\cos.(60^\circ - C).$$

116. En faisant les mêmes substitutions et les mêmes raisonnements, l'équation (98) donnera

$$\cos.^2C - \tfrac{1}{4} = \sin.(60^\circ + C)\sin.(60^\circ - C).$$

Pour faire usage, dans la suite, de ces trois dernieres formules, nous écrirons A au lieu de C, ces deux lettres n'étant l'une et l'autre que des expressions indéterminées, susceptibles de toutes les valeurs possibles.

117. Soit à présent $B = 2A$. On aura (51), $\sin.3A = \sin.A \times$

cos.2A + sin.2A cos.A. Mais $\sin.A = \frac{\sin.2A}{2\cos.A}$, (60), et cos.2A = 2 cos.²A — 1, (66). Donc $\sin.A \cos.2A = \frac{\sin.2A}{2\cos.A}(2\cos.^2A - 1) = \sin.2A \cos.A - \frac{\sin.2A}{2\cos.A} = \sin.2A \cos.A - \sin.A$. En substituant dans la premiere équation cette derniere valeur de sin.A cos.2A, on aura

$$\sin.3A = 2\cos.A \sin.2A - \sin.A.$$

118. Semblablement (53), cos.3A = cos.A cos.2A — sin.A sin.2A. Mais sin.A sin.2A = (60) 2 sin²A cos.A = (66) cos.A × (1 — cos.2A) = cos.A — cos.A cos.2A. Donc

$$\cos.3A = 2\cos.A \cos.2A - \cos.A.$$

119. Pareillement (56), $\text{tang.}3A = \frac{\text{tang.}A + \text{tang.}2A}{1 - \text{tang.}A\ \text{tang.}2A}$. En substituant la premiere valeur (62) de tang.2A, et réduisant au même dénominateur, on aura

$$\text{tang.}3A = \frac{3\,\text{tang.}A - \text{tang.}^3A}{1 - 3\,\text{tang.}^2A}.$$

120. En faisant B = 3A, les Commençants auront une occasion de s'exercer, pour trouver, en suivant les exemples (117, 118), les équations suivantes :

$$\sin.4A = 2\cos.A \sin.3A - \sin.2A.$$

$$\cos.4A = 2\cos.A \cos.3A - \cos.2A.$$

121. (117), sin.3A = 2 cos.A sin.2A — sin.A = (60) 4 sin.A cos.²A — sin.A = 4 sin.A (cos.²A — $\frac{1}{4}$). Donc (116)

$$\sin.3A = 4 \sin.A \sin.(60° + A) \sin.(60° - A).$$

122. (66) cos.2A = 2 cos.²A — 1 = 2(cos.²A — $\frac{1}{2}$). Donc (114)

$$\cos.2A = 2 \cos.(45° + A) \cos.(45° - A).$$

123. (118), cos.3A = 2 cos.A cos.2A — cos.A = (66) 4 cos.A cos.²A — 3 cos.A = 4 cos.A (cos.²A — $\frac{3}{4}$). Donc (115)

$$\cos.3A = 4 \cos.A \cos.(60° + A) \cos.(60° - A).$$

Ceux qui voudront des expressions de cette forme pour sin.4A, cos.4A, &c., les trouveront dans l'ouvrage d'Euler, intitulé :

Introductio in analysin infinitorum. Nous donnons seulement celles qui sont les plus utiles dans la pratique.

124. Nous avons réuni par ordre, dans les deux petites tables qui suivent, *les formules des sinus et des cosinus des arcs multiples*, (60, 66, 117, 118, 120).

Sin. $0 = 0$.
Sin. $A = \sin.A$.
Sin. $2A = 2 \cos.A \sin.A$.
Sin. $3A = 2 \cos.A \sin.2A - \sin.A$.
Sin. $4A = 2 \cos.A \sin.3A - \sin.2A$.
&c.

Cos. $0 = 1$.
Cos. $A = \cos.A$.
Cos. $2A = 2 \cos.A \cos.A - 1$.
Cos. $3A = 2 \cos.A \cos.2A - \cos.A$.
Cos. $4A = 2 \cos.A \cos.3A - \cos.2A$.
&c.

Ces deux séries peuvent se continuer à volonté, sans aucun nouveau calcul, puisque la loi qui y regne est manifeste. Tandis que les arcs croissent en progression arithmétique, leurs sinus et cosinus forment une série qu'on appelle *récurrente*, parceque chaque terme se compose de quelques uns des précédents, modifiés par une loi constante. *L'échelle de relation*, ainsi que s'exprime Euler d'après Moivre, est $2 \cos.A$, et -1. Pour avoir, par exemple, la valeur de $\sin.3A$, il faut multiplier le terme précédent, $\sin.2A$, par $2 \cos.A$, et multiplier par -1 celui qui précede $\sin.2A$, c'est-à-dire $\sin.A$.

125. En observant la même loi, mais en opérant les multiplications sur le second membre des équations, au lieu de les faire sur le premier, et remarquant que $2 \cos.A = 2\sqrt{(1 - \sin.^2A)}$, (28),

les mêmes séries peuvent se varier comme il suit, avec autant de promptitude que de facilité.

Sinus des arcs multiples, exprimés en puissances du sinus de l'arc simple.

$$\text{Sin. } 0 = 0.$$
$$\text{Sin. } A = \text{sin.}A.$$
$$\text{Sin.}2A = 2\,\text{sin.}A\,\sqrt{(1 - \text{sin.}^2A)}.$$
$$\text{Sin.}3A = 3\,\text{sin.}A - 4\,\text{sin.}^3A.$$
$$\text{Sin.}4A = (4\,\text{sin.}A - 8\,\text{sin.}^3A)\,\sqrt{(1 - \text{sin.}^2A)}.$$
$$\text{Sin.}5A = 5\,\text{sin.}A - 20\,\text{sin.}^3A + 16\,\text{sin.}^5A.$$
&c.

Sinus des arcs multiples, exprimés en puissances du cosinus de l'arc simple.

$$\text{Sin. } 0 = 0.$$
$$\text{Sin. } A = \sqrt{(1 - \text{cos.}^2A)}.$$
$$\text{Sin.}2A = 2\,\text{cos.}A\,\sqrt{(1 - \text{cos.}^2A)}.$$
$$\text{Sin.}3A = (4\,\text{cos.}^2A - 1)\,\sqrt{(1 - \text{cos.}^2A)}.$$
$$\text{Sin.}4A = (8\,\text{cos.}^3A - 4\,\text{cos.}A)\,\sqrt{(1 - \text{cos.}^2A)}.$$
$$\text{Sin.}5A = (16\,\text{cos.}^4A - 12\,\text{cos.}^2A + 1)\,\sqrt{(1 - \text{cos.}^2A)}.$$
&c.

Cosinus des arcs multiples, exprimés en puissances du cosinus de l'arc simple.

$$\text{Cos. } 0 = 1.$$
$$\text{Cos. } A = \text{cos.}A.$$
$$\text{Cos.}2A = 2\,\text{cos.}^2A - 1.$$
$$\text{Cos.}3A = 4\,\text{cos.}^3A - 3\,\text{cos.}A.$$
$$\text{Cos.}4A = 8\,\text{cos.}^4A - 8\,\text{cos.}^2A + 1.$$
$$\text{Cos.}5A = 16\,\text{cos.}^5A - 20\,\text{cos.}^3A + 5\,\text{cos.}A.$$
&c.

Cosinus des arcs multiples, exprimés en puissances du sinus de l'arc simple.

$$\text{Cos. } 0 = 1.$$
$$\text{Cos. } A = \sqrt{(1 - \sin.^2 A)}.$$
$$\text{Cos. } 2A = 1 - 2\sin.^2 A.$$
$$\text{Cos. } 3A = (1 - 4\sin.^2 A)\sqrt{(1 - \sin.^2 A)}.$$
$$\text{Cos. } 4A = 1 - 8\sin.^2 A + 8\sin.^4 A.$$
$$\&c.$$

126. La table suivante pour les tangentes des arcs multiples est facile à continuer par le moyen de la formule (56), en procédant comme nous avons fait (119), et substituant toujours la valeur trouvée de la tangente qui précede.

Tangentes des arcs multiples, exprimées en puissances de la tangente de l'arc simple.

$$\text{Tang. } A = \text{tang. } A.$$
$$\text{Tang. } 2A = \frac{2\,\text{tang. } A}{1 - \text{tang.}^2 A}.$$
$$\text{Tang. } 3A = \frac{3\,\text{tang. } A - \text{tang.}^3 A}{1 - 3\,\text{tang.}^2 A}.$$
$$\text{Tang. } 4A = \frac{4\,\text{tang. } A - 4\,\text{tang.}^3 A}{1 - 6\,\text{tang.}^2 A + \text{tang.}^4 A}.$$
$$\&c.$$

127. Par les tables (125), il sera facile à présent d'avoir les puissances du sinus et du cosinus de l'arc simple exprimées en sinus et en cosinus de l'arc multiple. Par exemple, par la table quatrieme, on a $2\sin.^2 A = 1 - \cos. 2A$. Par la premiere, $4\sin.^3 A = 3\sin. A - \sin. 3A$; par la quatrieme, $8\sin.^4 A = \cos. 4A + 8\sin.^2 A - 1$. Ici il faut substituer la valeur précédente de $\sin.^2 A$, puisque le second membre de ces équations ne doit contenir que des puissances premieres; et on aura $8\sin.^4 A = \cos. 4A - 4\cos. 2A + 3$. En opérant ainsi, ou plus promptement par le moyen de la

loi qu'on verra tout à l'heure, on obtient les tables suivantes, que nous donnons jusqu'à la septieme puissance, à cause de leur grand usage dans le calcul intégral.

Puissances du sinus de l'arc simple, exprimées en sinus et cosinus de l'arc multiple.

$$\begin{aligned}
&\text{Sin.}^1A = \text{sin.}A.\\
2\,&\text{Sin.}^2A = 1 - \text{cos.}2A.\\
4\,&\text{Sin.}^3A = 3\,\text{sin.}A - \text{sin.}3\,A.\\
8\,&\text{Sin.}^4A = 3 - 4\,\text{cos.}2A + \text{cos.}4A.\\
16\,&\text{Sin.}^5A = 10\,\text{sin.}A - 5\,\text{sin.}3A + \text{sin.}5A.\\
32\,&\text{Sin.}^6A = 10 - 15\,\text{cos.}2\,A + 6\,\text{cos.}4\,A - \text{cos.}6A.\\
64\,&\text{Sin.}^7A = 35\,\text{sin.}A - 21\,\text{sin.}3\,A + 7\,\text{sin.}5\,A - \text{sin.}7\,A.\\
&\qquad\&c.
\end{aligned}$$

Puissances du cosinus de l'arc simple, exprimées en cosinus de l'arc multiple.

$$\begin{aligned}
&\text{Cos.}^1A = \text{cos.}A.\\
2\,&\text{Cos.}^2A = 1 + \text{cos.}2\,A.\\
4\,&\text{Cos.}^3A = 3\,\text{cos.}A + \text{cos.}3A.\\
8\,&\text{Cos.}^4A = 3 + 4\,\text{cos.}2A + \text{cos.}4\,A.\\
16\,&\text{Cos.}^5A = 10\,\text{cos.}A + 5\,\text{cos.}3A + \text{cos.}5A.\\
32\,&\text{Cos.}^6A = 10 + 15\,\text{cos.}2A + 6\,\text{cos.}4A + \text{cos.}6A.\\
64\,&\text{Cos.}^7A = 35\,\text{cos.}A + 21\,\text{cos.}3\,A + 7\,\text{cos.}5\,A + \text{cos.}7\,A.\\
&\qquad\&c.
\end{aligned}$$

La loi de ces séries est évidente. Les coefficients dans le second membre, en commençant du dernier terme, sont les mêmes que ceux des puissances du binôme; avec cette seule différence que les nombres isolés ne sont que la moitié de ceux que donne le binôme. Par exemple, les coefficients de la sixieme puissance du binome sont 1, 6, 15, 20; et dans l'équation de $32\,\text{cos.}^6A$, on a $\text{cos.}6A \times 1$, $\text{cos.}4A \times 6$, $\text{cos.}2A \times 15$, et $10 = \frac{20}{2}$.

Nous ne construirons pas la table des puissances des tangentes, qui est plus compliquée, et dont nous n'avons vu jusqu'à présent aucun usage.

128. Nous avons rassemblé en deux tables I et II, rejettées à la fin de cet ouvrage, les formules que nous jugeons les plus utiles; ensorte que les Lecteurs pourront les avoir sous les yeux, et qu'elles formeront une espece de répertoire pour les Savants. Nous avons substitué dans la table I la lettre A à la lettre B pour celles des formules qui, dans le texte même de l'ouvrage, ne contiennent que cette lettre B. Nous avertissons au surplus les Commençants, que rien n'est plus facile que de multiplier à l'infini les formules trigonométriques, et que nous en avons supprimé un grand nombre comme inutiles, en comparaison de celles que nous avons données dans les deux tables qui contiennent, à ce qu'il nous semble, la collection des formules de ce genre la plus complette qui ait encore paru.

Si $B > A$, il est clair qu'il n'en résulte aucun changement dans les signes du second membre de la formule (II. 4e); (II. 4e) *signifie* Table II, formule 4e. J'ai donc mis cos.$(A \backsim B)$ au lieu de cos.$(A - B)$ dans cette formule : on trouvera le même signe $\backsim$, et par une raison semblable, dans les formules (II. 7e, 11e, &c.), et dans les formules (I. 29e, 30e). Je démontrerai d'une autre maniere (154), que le cosinus d'un arc négatif moindre que de 90° est toujours positif.

Ayant donné les valeurs de sin.A, cos.A, et de sin.$(A+B)$, cos.$(A+B)$, &c. nous avons cru inutile de dresser d'autres tables pour les valeurs de sin.$\frac{1}{2}$A, sin.2A, cos.$\frac{1}{2}$A, sin.$\frac{1}{2}(A+B)$, &c. Il sera facile de les avoir au besoin, en opérant comme nous l'avons déja fait plus d'une fois : il ne s'agit que de mettre, au lieu de A ou de B, tel multiple ou sous-multiple que l'on voudra de A ou de B.

Pour avoir la valeur d'une cotangente, on renversera les formules de la tangente, en substituant le numérateur au dénominateur,

et *vice versâ*. Par exemple, (I. 38°); $\cot.A = \frac{\cot.\frac{1}{2}A - \tang.\frac{1}{2}A}{2}$. On en fera de même des formules du cosinus pour avoir la sécante, et de celles du sinus pour avoir la cosécante. Tout cela est une conséquence évidente des analogies (22, 23, 24).

Il est à propos d'apprendre et de retenir les formules (I. 1°, 3°, 16°, 18°, 22°, 31°, 32°) dont on fait un usage continuel. A l'avenir nous épargnerons davantage les renvois, parceque le lecteur pourra recourir aux tables, quand il voudra vérifier les formules que nous emploierons et qu'il ne se sera pas rappellées.

CHAPITRE V.

Expressions des arcs en parties du rayon, et des lignes trigonométriques par les puissances des arcs.

129. LA ligne droite et l'arc de cercle semblent hétérogenes. Jusqu'à present, et probablement il en sera long-temps de même, on a inutilement cherché une mesure rigoureuse qui leur fût commune. Si l'on suppose qne la circonférence d'un cercle se redresse et s'étende en forme de ligne droite, et qu'on demande combien de fois cette ligne contient le diametre, on ne peut répondre à cette question que par approximation. Mais comme cette approximation peut se pousser à l'infini, il en résulte que ce qu'il y a de défectueux dans la solution du problême rend bien les opérations plus compliquées et plus longues, mais non pas trompeuses ni erronées. On parvient à cette solution approchée, par des moyens ingénieux, tirés des rapports des lignes trigonométriques, au calcul desquelles cette recherche est réciproquement très utile. En y procédant, nous nous servirons à dessein du calcul différentiel et intégral, pour donner à ceux de nos lecteurs qui ne connoissent pas

pas ce calcul, une idée de la plus belle invention qui ait été faite en Mathématiques. Les premiers éléments de ce calcul ne contiennent aucune difficulté, et sont d'un merveilleux secours dans bien des cas, comme nous le verrons dans le cours de cet ouvrage.

130. *Les grandeurs constantes* sont celles qui restent toujours les mêmes, tandis que les *variables* changent. Dans le cercle, par exemple, tandis que les lignes trigonométriques changent de grandeur à mesure que l'arc varie, le rayon demeure constant. Nous indiquerons, selon l'usage, les grandeurs *variables* par les dernieres lettres de l'alphabet $z, y, x,$ &c.; et les *constantes* ou invariables, par les premieres $a, b, c,$ &c. Cela posé, si dans cette équation, $x = ay$, on suppose que x augmente d'une quantité δx, (j'entends par δx la variation, la différence, ou la *différentielle* de la grandeur x), il faudra aussi que y augmente d'une quantité δy, telle qu'il est nécessaire qu'elle soit pour que l'équation subsiste. On aura donc $x + \delta x = a\,(y + \delta y) = ay + a\delta y$. En supprimant les quantités égales x et ay, il reste $\delta x = a\delta y$.

Soit $x = 6$, $a = 2$, $y = 3$, et soit $\delta x = 4$. On aura $\delta y = \frac{\delta x}{a} = \frac{4}{2} = 2$. En effet, quand $x = 6 + 4 = 10$, il faut que $y = 3 + 2 = 5$, puisque la constante $a = 2$ ne doit pas changer.

131. L'opération que nous venons de faire s'appelle *différentier, prendre les différences* ou *les différentielles*. En effet, l'équation primitive $x = ay$ est disparue, et la nouvelle $\delta x = a\,\delta y$ contient seulement les variations des termes de la premiere.

Si l'on avoit plus de deux variables, comme dans l'équation $bx + mz = u - any + c$, en faisant varier les variables, et procédant absolument comme on a fait (130), on aura $b\,(x + \delta x) + m\,(z + \delta z) = u + \delta u - an\,(y + \delta y) + c$. En effectuant les multiplications, et supprimant l'équation primitive, il restera $b\,\delta x + m\delta z = \delta u - an\delta y$. La constante isolée c disparoît entiérement, parceque *la différentielle ou variation d'une quantité constante est évidemment* 0.

On abrége ces opérations par la regle suivante, déduite de leurs résultats. *Pour différentier une équation, il faut, au lieu de chaque variable,* (ou du produit (134, 135) de plusieurs variables), *écrire sa différentielle multipliée par tous les facteurs constants de la variable, et supprimer les constantes isolées.*

Par exemple, dans l'équation ci-dessus, $bx + mz = u - any + c$, écrivez $\partial x \times b$, au lieu de bx; $\partial z \times m$ au lieu de mz; $\partial u \times 1$ au lieu de u; $-\partial y \times an$ au lieu de $-any$; et supprimez c: vous aurez immédiatement, et sans passer par les opérations intermédiaires, l'équation différentielle cherchée $b\partial x + m\partial z = \partial u - an\partial y$.

132. *L'objet de la différentiation est de découvrir les rapports entre les changements des grandeurs variables.* Par exemple, l'équation $\partial x = a\partial y$ donne $\frac{\partial x}{\partial y} = a$; mais la primitive $x = ay$ donne aussi $\frac{x}{y} = a$; donc *lorsque le rapport* (9) *entre deux variables est constant, leurs variations,* quelque grandes qu'elles soient, *conservent le même rapport.*

133. Soit à présent $xy = b$. Dans ce cas, puisque le produit des deux variables doit toujours être égal à la constante b, quelle que soit la grandeur de leurs variations, il est clair que si l'une croît, l'autre doit diminuer. Cependant on donne toujours aux différentielles les signes de leurs variables; ce sont les résultats du calcul qui indiquent si les variations se font en sens contraire. On aura donc $(x + \partial x)(y + \partial y) = b$; ou $xy + y\partial x + \partial y (x + \partial x) = b$; et, en supprimant les quantités égales, $y\partial x + \partial y (x + \partial x) = 0$. On voit que ce résultat démontre que l'une des deux variations est négative, puisque les termes du premier membre de l'équation se détruisent réciproquement.

Supposons maintenant que ∂x, ∂y, ∂z, &c., sont des quantités infiniment petites, des fractions aussi voisines de zéro qu'il est possible de l'imaginer. *La grandeur infinie,* soit infiniment grande, soit infiniment petite, est celle dont on ne peut assigner

la valeur en nombres, parcequ'aucun nombre n'est assez grand ou assez petit. Toute quantité qui se peut exprimer par des nombres est donc une *quantité finie*, puisqu'elle a une valeur finie, laquelle peut s'exprimer par des chiffres qui ont un terme, et dont le nombre est déterminé, et ne s'étend pas à l'infini.

Cela posé, nous pouvons, dans la derniere équation, écrire x au lieu de $(x + \partial x)$; car la différence entre ces deux expressions étant infiniment petite, l'erreur qui résultera de cette substitution dans le produit par ∂y, sera infiniment petite, en comparaison de ∂y; c'est-à-dire que ∂y sera un infiniment grand en comparaison de l'erreur commise, qui ne sera qu'une partie infiniment petite d'un infiniment petit, comme on pourra s'en faire une idée par les exemples numériques que nous en donnerons tout-à-l'heure. Nous ferons voir dans la suite (138, 151), que cette erreur apparente ne nuit en aucune maniere à l'exactitude mathématique du calcul.

La derniere équation devient donc $y\partial x + x\partial y = 0$. La quantité négligée est $\partial x\,\partial y$; c'est ce qu'on appelle un infiniment petit *du second ordre*, tels que seroient les quarrés $(\partial x)^2$, $(\partial y)^2$, $(\partial z)^2$, &c.

Pour faire concevoir que l'infiniment petit du second ordre peut se négliger sans erreur, quand on cherche le rapport entre des infiniment petits du premier ordre, tels que ∂x, ∂y, &c.; soit $\partial x = \frac{5}{1000000}$ et $\partial y = \frac{2}{1000000}$; on aura $\partial x\,\partial y = \frac{10}{1000000000000}$. On voit quelle est l'extrême petitesse de la derniere fraction, en comparaison de l'une ou de l'autre des précédentes. Qu'on imagine donc, s'il est possible, quelle seroit cette disproportion, si dans les valeurs que nous venons de donner à ∂x et à ∂y, le nombre des zéros étoit infini pour chacun des dénominateurs; ce qui est nécessaire pour que ∂x et ∂y aient une valeur infiniment petite, comme on l'a supposé. On reconnoîtra de même qu'un infiniment petit du second ordre est infiniment grand respectivement à un infiniment petit du troisieme ordre, et ainsi de suite.

134. En reprenant l'équation $y\,\partial x + x\,\partial y = 0$, j'observe que le premier membre contient la variation de xy, (133), et le second celle de b, (131). Donc *pour différentier le produit de plusieurs variables, on doit prendre la différentielle de chacune d'elles séparément, en considérant les autres variables comme des facteurs constants* (131), *et écrire, au lieu du produit, la somme de ces différentielles.*

En effet, pour différentier xy, si on prend la différentielle de x, en regardant y comme constante, on aura $y\,\partial x$, (131); et si on prend la différentielle de y, en regardant x comme constante, on a $x\,\partial y$. La somme de ces deux différentielles, $y\,\partial x + x\,\partial y$, est précisément celle que nous avons déja trouvée.

Si on avoit $xyz = c + mu$, les différentielles du premier membre seroient $xy\,\partial z + xz\,\partial y + yz\,\partial x$, et celle du second membre, $m\,\partial u$; ce qui se trouvera également, si l'on fait l'opération en détail, par les méthodes que l'on a vues, en écrivant $(x + \partial x)\,(y + \partial y)\,(z + \partial z) = c + m\,(u + \partial u)$. Car cette équation est la même que celle-ci; $xyz + xy\,\partial z + y\,\partial x \times (z + \partial z) + \partial y\,(x + \partial x)\,(z + \partial z) = c + mu + m\,\partial u$. En retranchant l'équation primitive $xyz = c + mu$, et mettant x au lieu de $x + \partial x$, et z au lieu de $z + \partial z$, comme nous avons fait (133), il restera $xy\,\partial z + yz\,\partial x + xz\,\partial y = m\,\partial u$.

135. La regle donnée (134) sert aussi à différentier les puissances des variables. Si l'on veut, par exemple, différentier x^2; en considérant cette quantité sous cette forme, xx, et traitant ce produit comme s'il étoit composé de deux variables différentes, les différentielles seront $x\,\partial x + x\,\partial x$, ou $2\,x\,\partial x$. On trouvera de même que les différentielles de x^3 se réduisent à $3x^2\,\partial x$, et qu'*en général la différentielle de* x^m *est* $mx^{m-1}\,\partial x$, ou que $\partial(x^m) = mx^{m-1}\,\partial x$.

136. D'après cela il est facile de différentier les expressions affectées du signe radical, en les écrivant comme des quantités élevées

aux puissances fractionnaires correspondantes. Étant donné, par exemple, $\sqrt{(a+bx)}$, qu'on écrive $(a+bx)^{\frac{1}{2}}$; et comparant cette expression à l'expression générale x^m, on aura $m=\frac{1}{2}$, et $a+bx$ au lieu de x; donc mx^{m-1} deviendra $\frac{1}{2}(a+bx)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}(a+bx)^{-\frac{1}{2}}$. Il reste à multiplier cette expression par ∂x, (135), c'est-à-dire, dans le cas dont il s'agit, par $\partial(a+bx)=b\partial x$, (131); donc $\partial\sqrt{(a+bx)}=\frac{1}{2}b\partial x(a+bx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{b\partial x}{2\sqrt{(a+bx)}}$.

137. La même expression générale (135) donne le moyen de différentier les variables qui se présentent sous la forme de fraction. Si on avoit $\frac{x}{y}=a$, il seroit plus court et plus simple de ne différentier l'équation qu'après l'avoir convertie en celle-ci, $x=ay$, (130). Mais dans les équations composées de plusieurs termes, cette opération n'est pas toujours commode à pratiquer. En pareil cas, au lieu de $\frac{x}{y}$, on écrit l'équivalent, xy^{-1}. Les différentielles de ce produit sont (134), $x\partial(y^{-1})+y^{-1}\partial x=x\partial(y^{-1})+\frac{\partial x}{y}$. Or, si l'on compare l'expression $\partial(y^{-1})$ avec l'expression générale de la différentielle de x^m, on a $m=-1$, $m-1=-2$, y au lieu de x, et ∂y au lieu de ∂x. Donc $\partial(y^{-1})=-1\times y^{-2}\partial y=-\frac{\partial y}{y^2}$; donc $x\partial(y^{-1})=-\frac{x\partial y}{y^2}$; donc enfin $\partial\frac{x}{y}=\frac{\partial x}{y}-\frac{x\partial y}{y^2}=\frac{y\partial x-x\partial y}{y^2}$. D'où il suit que *pour différentier une fraction composée de variables, il faut multiplier le dénominateur par les différentielles du numérateur, soustraire de ce produit les différentielles du dénominateur multipliées par le numérateur, et diviser le reste par le quarré du dénominateur.*

Démontrons l'exactitude de cette opération, en la comparant avec celle que l'on a vue (130). Dans cette dernière, l'équation $x=ay$ a donné, pour les différentielles, $\partial x=a\partial y$; mais tout-à-l'heure la même équation exprimée sous cette forme, $\frac{x}{y}=a$,

nous a donné $\frac{y\,\partial x - x\,\partial y}{y^2} = 0$, (0 étant (131) la différentielle de a); il faut prouver que les deux équations différentielles sont les mêmes sous des formes différentes. Or, si l'on multiplie la derniere par y^2, on aura $y\,\partial x - x\,\partial y = 0 \times y^2 = 0$; et par conséquent $y\,\partial x = x\,\partial y$, et $\partial x = \frac{x}{y} \times \partial y$; mais par l'équation primitive, $\frac{x}{y} = a$; donc $\frac{x}{y} \times \partial y = a\,\partial y$; donc la seconde équation différentielle se réduit à la premiere $\partial x = a\,\partial y$.

La regle que nous venons de donner mene donc à un résultat rigoureux dans le cas cité, quelle que soit d'ailleurs la grandeur des variations. Mais on doit observer qu'il n'en sera pas de même pour les variations finies toutes les fois que l'équation à différentier contiendra explicitement ou implicitement quelque produit de plusieurs variables prises avec des exposants positifs. Par exemple $\frac{x}{y} = x$ contient implicitement le produit yx, et dès-lors sous quelque forme que l'on mette l'équation pour la différentier, la quantité $\partial y\,\partial x$ sera toujours négligée, (133).

Tels sont les éléments du calcul différentiel; nous les avons exposés avec plus d'étendue qu'on n'a coutume de le faire, pour en faciliter l'intelligence aux Commençants. Avec ces regles on peut différentier toute expression algébrique. Mais l'*intégration* ne s'étend pas de même à toutes sortes d'expressions. Quoique pour *intégrer*, les regles se réduisent, pour ainsi dire, à une seule, l'exécution en est ordinairement difficile et souvent impossible.

138. L'*intégration* est l'opération inverse de la différentiation. Étant donné des quantités variables, on trouve, en différentiant, les rapports entre leurs changements; au contraire, en intégrant, on a pour but de remonter de ces changements à la connoissance des grandeurs variables auxquelles ils appartiennent. Si donc la différentielle de x est ∂x, l'intégrale de ∂x est x; et si la différentielle de x^m est $mx^{m-1}\partial x$, (135), l'intégrale de $mx^{m-1}\partial x$ est x^m. D'où se tire la regle suivante pour intégrer cette espece de

différentielles. *Augmentez d'une unité l'exposant de la variable, et divisez par le produit de l'exposant ainsi augmenté et de la différentielle.* Dans l'expression $mx^{m-1}\,\partial x$, l'exposant $m-1$, accru d'une unité, devient m. On a donc $mx^m\,\partial x$; et en divisant par $m\partial x$, conformément à la seconde partie de la regle, l'intégration est complette, et donne x^m.

De plus, *si la différentielle est multipliée ou divisée par quelques constantes, on conservera, en intégrant, les constantes dans leur place.* Car il est clair que si la différentielle de ay est $a\partial y$, (131), l'intégrale de $a\partial y$ doit être ay.

En différentiant un produit quelconque de variables, par exemple, xy, nous avons négligé, (133), l'infiniment petit du second ordre $\partial x\partial y$. Or si en intégrant, nous omettons aussi les infiniments petits de même ordre, l'erreur commise dans la différentiation sera compensée dans l'intégration. Donc si nous assignons xy pour l'intégrale de $y\partial x + x\partial y$, quoique cette expression différentielle ne soit pas complette, et qu'il y manque le terme $\partial x\partial y$, il est évident que l'intégration sera très exacte.

Ce que nous avons dit du calcul intégral suffit pour l'intelligence de ce traité. Nous ajouterons seulement, pour donner au lecteur quelque idée de la nature de ce calcul, qu'il seroit en général facile d'intégrer, si les opérations du calcul ne présentoient presque toujours des différentielles incomplettes ou enveloppées dans des expressions embarrassantes. Il est impossible, par exemple, d'intégrer $y\partial x$, parce qu'il n'existe aucune quantité algébrique dont la différentiation puisse donner pour seul résultat $y\partial x$. En un mot, quelle que soit l'expression différentielle qu'on veut intégrer, il faut en trouver une qui ne soit point affectée de différentielles, et qui soit telle qu'en la différentiant elle produise exactement la différentielle proposée ; ce sera l'intégrale cherchée. Telle est la principale regle, et c'est en cela que consiste tout l'art du calcul intégral ; mais *hoc opus, hic labor est.*

139. Les expressions employées jusqu'ici étant de la plus grande généralité, il s'ensuit que toutes les regles du calcul différentiel et intégral doivent pouvoir s'appliquer aux lignes trigonométriques. Voyons d'abord comment la valeur de leurs différentielles finies, de quelque grandeur qu'elles soient, se déduit très rigoureusement, de quelques formules de la table II, qui, je crois, n'ont pas encore été employées de cette maniere, et qui, par ces transformations, deviennent de la plus grande utilité.

Puisque l'équation (II. 22e), $\sin.A - \sin.B = 2\sin.\frac{1}{2}(A-B) \times \cos.\frac{1}{2}(A+B)$ suppose $A > B$, on pourra désigner par δB, à la maniere du calcul différentiel, l'accroissement qu'il seroit nécessaire de donner à l'angle B pour qu'il devînt égal à l'angle A; et de même par $\delta \sin.B$, la différence à ajouter à sin.B, pour qu'il fût égal à sin.A. On aura donc $A = B + \delta B$, et $\sin.A = \sin.B + \delta\sin.B$. En substituant ces valeurs, l'équation devient

$$\delta \sin.B = 2\sin.\tfrac{1}{2}\delta B \cos.(B + \tfrac{1}{2}\delta B).$$

En opérant d'une maniere analogue sur les équations (II. 23e, 24e, 25e), et se rappellant que lorsqu'un arc B augmente, son cosinus et sa cotangente diminuent (33), on aura les trois équations suivantes:

$$-\delta \cos.B = 2\sin.\tfrac{1}{2}\delta B \sin.(B + \tfrac{1}{2}\delta B).$$

$$\delta \operatorname{tang}.B = \frac{\sin.\delta B}{\cos.B \cos.(B+\delta B)}.$$

$$-\delta \cot.B = \frac{\sin.\delta B}{\sin.B \sin.(B+\delta B)}.$$

Observons que les quatre équations que nous venons de donner sont de la plus rigoureuse vérité, quelle que soit la grandeur de δB, puisque nous n'avons négligé aucune quantité en les composant, et qu'elles ne sont autre chose que les quatre formules (II. 22e à 25e), présentées sous une autre forme. On pourra comparer ces équations avec celles données par Euler, (*Calculi differ. Pars prior*, 21), dans lesquelles il exprime les différences finies des sinus et des cosinus, par des séries infinies des puissances de la variation de l'arc.

Quant

Quant aux différentielles des sécantes et des cosécantes, on les trouvera (703, 712); jusques-là elles nous sont inutiles.

140. En reprenant la prémiere de ces quatre équations, si on développe (53) l'expression cos.(B + $\frac{1}{2}\delta$B), on aura δsin.B = 2 sin.$\frac{1}{2}\delta$B (cos.B cos.$\frac{1}{2}\delta$B — sin.B sin.$\frac{1}{2}\delta$B) = 2 sin.$\frac{1}{2}\delta$B cos.B cos.$\frac{1}{2}\delta$B — 2 sin.$^2\frac{1}{2}\delta$B sin.B = (I. 6°, 22°) sin.δB cos.B — sin.B (1 — cos.δB).

Supposons à présent que δB soit un arc infiniment petit, c'est-à-dire l'arc le plus voisin de zéro qu'il soit possible (133); il est facile alors de comprendre, en imaginant, si l'on veut, un arc infiniment petit, sur la figure 1, que le sinus de cet arc infiniment petit sera aussi près qu'il est possible, de se confondre avec l'arc même; et que le cosinus de cet arc sera de même infiniment près de se confondre avec le rayon. Employons donc δB au lieu de sin.δB, et R ou 1 au lieu de cos.δB; (nous verrons bientôt (152, 154) que les quantités négligées par cette supposition, ne sont que des infiniments petits du second ordre ou du troisieme, &c.); l'équation δsin.B = sin.δB cos.B — sin.B (1 — cos.B) deviendra

$$\delta\text{sin.B} = \delta\text{B cos.B.}$$

Avec les mêmes substitutions, la seconde des quatre équations ci-dessus — δcos.B = 2 sin.$\frac{1}{2}\delta$B sin.(B + $\frac{1}{2}\delta$B) devient

$$-\delta\text{cos.B} = \delta\text{B sin.B.}$$

Enfin si l'on écrit les deux suivantes au lieu de la troisieme et de la quatrieme,

$$\delta\text{tang.B} = \frac{\delta\text{B}}{\cos^2\text{B}},$$

$$-\delta\text{cot.B} = \frac{\delta\text{B}}{\sin^2\text{B}},$$

on aura les différentielles infinitésimales des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, telles que les auteurs les ont données jusqu'à présent.

Pour démontrer immédiatement que dans ces deux dernieres formules nous n'avons négligé que les infiniments petits (133) du

second ordre, du troisieme ordre, &c., développons les formules primitives de la maniere suivante : $\delta\text{tang.}B = \frac{\text{sin.}\delta B}{\text{cos.}B\ \text{cos.}(B+\delta B)} = \frac{\text{sin.}\delta B}{\text{cos.}B(\text{cos.}B\ \text{cos.}\delta B - \text{sin.}B\ \text{sin.}\delta B)} = \frac{\delta B}{\text{cos.}^2 B - \delta B\ \text{sin.}B\ \text{cos.}B}$, en faisant, comme tout-à-l'heure, $\text{sin.}\delta B = \delta B$, et $\text{cos.}\delta B = 1$. Actuellement qu'on exécute, selon les regles de l'algebre, la division indiquée par la derniere fraction; on trouvera qu'à l'exception du premier terme $\frac{\delta B}{\text{cos.}^2 B}$, tous les termes du quotient renferment les puissances $(\delta B)^2$, ou $(\delta B)^3$, &c. Il en est de même de la formule de la cotangente.

141. Les différentielles infinitésimales trouvées jusqu'à présent pour les lignes trigonométriques, concourent à prouver une regle qui est de la plus grande utilité en Mathématiques. Lorsque $B = 0$, cos.B est le plus grand possible (41); alors $\text{sin.}B = 0$, (42), et la seconde formule (140) donne $-\delta\text{cos.}B = \delta B \times 0 = 0$. De même sin.B est le plus grand possible, quand $B = 90°$; et alors $\text{cos.}B = 0$, (42), et la premiere formule (140) donne $\delta\text{sin.}B = \delta B \times 0 = 0$. D'où il suit qu'une variation infiniment petite de l'arc ne produit aucun changement dans le sinus ou dans le cosinus, lorsque ce sinus ou ce cosinus sont à leur *maximum*.

Ces résultats sont conformes à la regle suivante : *Quand la valeur finie d'une quantité est la plus grande possible, la différentielle de cette quantité est zéro.*

Soit proposé, par exemple, de partager une quantité donnée a en deux parties, telles que leur produit soit le plus grand possible. Appellant x l'une des deux parties, l'autre sera $a - x$, et le produit $ax - xx$. Dans le cas du *maximum*, c'est-à-dire de la plus grande valeur de ce produit, on a, par la regle précédente, $\delta(ax - xx) = 0$, ou $a\delta x = 2x\delta x$, et par conséquent $x = \frac{1}{2}a$. Les deux parties doivent donc être égales, pour que leur rectangle soit le plus grand possible. On voit combien la regle donnée est prompte et avantageuse.

142. Passons aux différentielles des puissances secondes.

$\text{Sin.}^2 A - \text{sin.}^2 B = \text{cos.}^2 B - \text{cos.}^2 A = \text{sin.}(A-B)\,\text{sin.}(A+B)$. Donc, d'après les remarques et par les substitutions indiquées (139), on aura

$$\delta(\text{sin.}^2 B) = -\delta(\text{cos.}^2 B) = \text{sin.}\,\delta B\ \text{sin.}(2B + \delta B).$$

En procédant de même, les équations (II. 28e, 29e) fournissent les deux suivantes :

$$\delta(\text{tang.}^2 B) = \frac{\text{sin.}\,\delta B\ \text{sin.}(2B+\delta B)}{\text{cos.}^2 B\ \text{cos.}^2(B+\delta B)}.$$

$$-\delta(\text{cot.}^2 B) = \frac{\text{sin.}\,\delta B\ \text{sin.}(2B+\delta B)}{\text{sin.}^2 B\ \text{sin.}^2(B+\delta B)}.$$

Ces formules sont aussi rigoureuses que les formules des premieres puissances, pour quelque différence finie que ce soit. Réduisons-les à celles qu'on donne ordinairement pour les différences infiniment petites.

143. $\delta(\text{sin.}^2 B) = \text{sin.}\,\delta B\ \text{sin.}\,2(B + \frac{1}{2}\delta B) =$ (I. 6e) $2\,\text{sin.}\,\delta B\ \text{sin.}(B+\frac{1}{2}\delta B)\,\text{cos.}(B+\frac{1}{2}\delta B)$. En faisant δB infiniment petit, et le substituant à $\text{sin.}\,\delta B$, et substituant de même B à $(B+\frac{1}{2}\delta B)$ (133), l'équation devient

$$\delta(\text{sin.}^2 B) = 2\,\delta B\ \text{sin.}B\ \text{cos.}B.$$

C'est aussi ce qu'on auroit trouvé en faisant $\text{sin.}^2 B = x^m$, et différentiant par la formule générale $mx^{m-1}\delta x$, (135). En effet $m = 2$, $x = \text{sin.}B$, $\delta x = \delta\text{sin.}B = \delta B\ \text{cos.}B$, (140). Donc $mx^{m-1}\delta x = 2(\text{sin.}B)^{2-1}\delta B\ \text{cos.}B = 2\,\text{sin.}B\,\delta B\,\text{cos.}B$. En faisant donc usage, pour abréger, de la formule générale, on a

$$\delta(\text{tang.}^2 B) = 2\,\text{tang.}B\,\delta\text{tang.}B = 2\,\text{tang.}B \times \frac{\delta B}{\text{cos.}^2 B},\ (140),\ \text{et}$$

$$-\delta(\text{cot.}^2 B) = 2\,\text{cot.}B \times \frac{\delta B}{\text{sin.}^2 B}.$$

Nous avons porté dans la table II toutes les différentielles trouvées dans les articles 139, 140, 142, 143; ensorte qu'on les aura à volonté sous les yeux. C'est donc à cette table qu'on aura recours, quand on voudra vérifier quelqu'une de ces diffé-

rentielles que nous emploierons dans la suite sans indiquer d'où nous les aurons prises.

Comme la différentielle d'un sinus négatif doit être négative (133), ce qui indique un décroissement dans le sinus, et par conséquent dans l'arc correspondant, la formule (II. 30°) devient en pareil cas $-\,\delta\sin.B = -\,2\sin.\frac{1}{2}\delta B\cos.(B-\frac{1}{2}\delta B)$. De cette Observation appliquée convenablement aux formules suivantes, il résulte pour regle générale, que quand on aura à employer le second membre des formules différentielles finies de la table II, avec le signe négatif, il faudra substituer $(B-\delta B)$ au lieu de $(B+\delta B)$, $(B-\frac{1}{2}\delta B)$ au lieu de $(B+\frac{1}{2}\delta B)$, et $(2B-\delta B)$ au lieu de $(2B+\delta B)$.

144. $\delta B = \frac{\delta\sin.B}{\cos.B} = \frac{\delta\sin.B}{\sqrt{(1-\sin.^2B)}} = \delta\sin.B\,(1-\sin.^2B)^{-\frac{1}{2}}$. En élevant le binôme $1-\sin.^2B$ à la puissance $-\frac{1}{2}$ par le moyen de la formule du binôme de Newton, on aura $\delta B = \delta\sin.B \times (1+\frac{1}{2}\sin.^2B+\frac{1.3}{2.4}\sin.^4B+\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin.^6B+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin.^8B+\&c.)$ Cette série iroit jusqu'à l'infini ; et comme la loi en est manifeste, il est aisé de la continuer plus loin, si l'on veut. Cherchons maintenant l'intégration de cette équation.

L'intégrale de δB est B, (138), et par la même raison sin.B est l'intégrale de $\delta\sin.B \times 1$. Pour trouver l'intégrale de $\frac{1}{2}\sin.^2B\,\delta\sin.B$, qu'on augmente (138) d'une unité l'exposant, et on aura $\frac{1}{2}\sin.^3B\,\delta\sin.B$; puis divisant par $3\,\delta\sin B$, le quotient ou l'intégrale cherchée sera $\frac{\sin.^3B}{2.3}$. En intégrant ainsi chaque terme de la série, et mettant A au lieu de B, l'équation intégrée, que nous nommerons (S), sera

$$(S)\ldots A = \sin.A+\frac{\sin.^3A}{2.3}+\frac{3\sin.^5A}{2.4.5}+\frac{3.5\sin.^7A}{2.4.6.7}+\frac{3.5.7\sin.^9A}{2.4.6.8.9}+\&c.$$

Nous voilà parvenus par des moyens un peu longs, mais d'une utilité fréquente, au but que nous nous étions proposé. La série infinie que nous avons trouvée (nous verrons (161) une méthode pour la calculer avec facilité) nous donnera, par le moyen du

sinus, la valeur d'un arc quelconque A exprimé en parties du rayon.

145. En effet, soit A = 30°; nous savons (18) que sin. 30° = $\frac{1}{2}$R = $\frac{1}{2}$. En substituant ces valeurs, l'équation devient

ARC de 30° = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9}$ + &c.

En faisant les divisions indiquées pour chaque terme, et nous bornant à huit décimales pour en avoir six exactes, nous aurons

$\frac{1}{2}$ = 0,5
$\frac{1}{48}$ = 0,02083333
$\frac{3}{1280}$ = 0,00234375
$\frac{15}{43008}$ = 0,00034877
$\frac{105}{1769472}$ = 0,00005934
$\frac{945}{86507520}$ = 0,00001092
$\frac{10395}{4907335680}$ = 0,00000212
&c.

TOTAL. 0,523598

Ainsi l'arc de 30° : R :: 0,523598 : 1.

Nous omettons les deux derniers chiffres de la somme, parce-qu'ils ne sont pas exacts. On pourroit avoir cette valeur totale aussi exactement et avec autant de décimales qu'on le voudroit, en continuant les divisions interrompues, et prenant de nouveaux termes de la série, dont la progression est claire. Ce travail a été fait; et en multipliant par 6 la valeur de l'arc de 30°, celle de la demi-circonférence a été calculée jusqu'à 127 décimales; c'est-à-dire qu'on a trouvé l'arc de 180° = R × 3, 141592 653589 793238 462643 383279 502884 197169 399375 105820 974944 592307 816406 286208 998628 034825 342117 067982 148086 513272 306647 093844 6 +. Donc la demi-circonférence du cercle, étendue en

ligne droite, égale trois fois le rayon, plus une partie de ce rayon exprimée par la fraction que nous venons de donner. Le dernier chiffre de ces décimales n'est pas le terme précis de cette valeur, puisqu'on en trouveroit de nouveaux, et à l'infini, en continuant l'opération ; c'est une suite de la nature de l'équation (S), dont le second membre est indéfini. Ce qui prouve ce que nous avons déja dit (129), qu'on ne peut avoir jusqu'à présent, que par une approximation portée, à la vérité, aussi loin qu'on le veut, le rapport entre le diametre et la circonférence.

146. La valeur d'un arc étant trouvée, il est facile d'avoir celle de tous les autres par le seul secours des premieres opérations de l'Arithmétique. En partant du nombre donné ci-dessus pour la valeur de l'arc de 180°, on en prendra la moitié pour l'arc de 90°, le tiers pour celui de 60°, et ainsi de suite. C'est ainsi qu'on a composé la table très utile (AA) qu'on trouvera à la fin de ce Traité, par laquelle on prend aisément en parties du rayon la valeur d'un arc quelconque donné en degrés, minutes, secondes et dixiemes, centiemes, &c.

Qu'on veuille, par exemple, avec sept décimales, l'arc de 6° 22′ 17″, 3; on prendra successivement dans la table les quantités suivantes, avec une ou deux décimales de plus, pour avoir la somme exacte:

L'arc de 6°	=	0,104719755
20′	. . . .	5817764
2′	. . . . .	581776
10″	. . . . .	48481
7″	. . . . .	33937
$\frac{3''}{10}$ ou 0″, 3	. . . . .	1454
Valeur de l'arc de 6° 22′ 17″, 3.	..	0,1112032

Nous avons tiré la table (AA) du Recueil précieux de Lambert, intitulé : (*Supplementa Tabul. Logarith. et Trigonometr.*

Berlin, 1770); non cependant sans l'avoir vérifiée en entier, et avoir corrigé quelques petites erreurs, presque toutes portant sur les derniers chiffres. Quand on voudra la valeur d'un arc avec plus de décimales que n'en donne la table, il faudra tirer cette valeur de celle de l'arc de 180°, (145).

147. L'expression de l'arc que nous avons eue par le moyen du sinus, se trouve aussi par le moyen de la tangente et par la même méthode. $\partial B = (II.\ 39^e)\ \partial \text{tang.}B : \cos.^2 B = (I.\ 19^e)\ \frac{\partial \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}^2 B} =$ $\partial \text{tang.}B\ (1 + \text{tang.}^2 B)^{-1}$. En élevant à la puissance — 1 le binôme $1 + \text{tang.}^2 B$, multipliant chaque terme par $\partial \text{tang.}B$, et intégrant l'équation (opérations sur lesquelles il sera bon de s'exercer), enfin en substituant A au lieu de B, on aura l'équation suivante que je nomme (T) :

(T)... $A = \text{tang.}A - \frac{1}{3}\text{tang.}^3 A + \frac{1}{5}\text{tang.}^5 A - \frac{1}{7}\text{tang.}^7 A +$ &c.

Mais $\text{tang.}45^\circ = 1$, (17); donc

l'arc de $45^\circ = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c.

Euler a transformé cette série en deux autres beaucoup plus *convergentes*, sans quoi elle seroit infiniment plus laborieuse que la série donnée (145). Mais comme ces calculs sont déja faits, nous ne nous en occuperons pas.

On appelle *convergente* toute série décroissante, et *divergente* toute série croissante. Plus, dans la premiere espece de série, la diminution d'un terme à l'autre est rapide, moins on a de termes à calculer pour obtenir une valeur très approchée.

Par exemple, pour avoir l'arc de 30° avec six décimales exactes, il a suffi de calculer sept termes de la série (145); tandis que pour évaluer avec six décimales exactes l'arc de 45° par la série trouvée tout-à-l'heure, il faudroit la moitié de la vie d'un homme, puisqu'il seroit nécessaire, comme il est aisé de le reconnoître, de calculer 500000 termes pour arriver à un terme dont les six premieres décimales seroient 0.

Observons que l'expression de l'arc en une série qui contienne

les puissances du cosinus, se réduit à la série (S) déja trouvée et renfermant les puissances du sinus. En effet $-\partial\cos.B = \partial B \sin.B$. Donc $-\partial B = \frac{\partial\cos.B}{\sin.B} = \partial\cos.B(1-\cos.^2B)^{-\frac{1}{2}}$. En développant le binôme, et faisant l'intégration, on aura $-B = \cos.B + \frac{\cos.^3B}{2.3} + \frac{3\cos.^5B}{2.4.5} +$ &c., en continuant les coefficients et les exposants comme dans la série (S), (144). Pour savoir ce que c'est que l'arc B *négatif*, j'observe qu'en mettant, dans l'équation (S), $90°-B$ au lieu de A, on a $90°-B = \sin.(90°-B) + \frac{\sin.^3(90°-B)}{2.3} +$ &c., série qui est la même que la précédente en puissances du cosinus, puisque $\sin.(90°-B) = \cos.B$, (5). Donc l'arc négatif, dans ce cas, n'est qu'un arc qui, au lieu de croître de 0° à 90°, iroit de 90° à 0°, en prenant son origine à 90°, point correspondant à l'origine du cosinus, et en suivant l'accroissement du cosinus positif qui se fait de 90° à 0°.

Soit par exemple $B = 60°$; on aura $90°-B = 30°$; par conséquent l'arc négatif de 60° n'est autre chose, dans ce cas, que l'arc positif de 30°.

On trouvera de même que l'expression de l'arc par le moyen d'une série contenant les puissances de la cotangente, se réduit à la série (T).

M. Jeaurat (*Tom. IV. Mém. présentés à l'Ac. des Sc. de Paris, pag.* 527) donne sans démonstration les deux séries suivantes :

$$A = 1 - \cos.A - \tfrac{1}{3}\cos.^3A - \tfrac{3}{40}\cos.^5A - \text{&c.}, \text{ et}$$
$$A = 1 - \cot.A + \tfrac{1}{3}\cot.^3A - \tfrac{1}{5}\cot.^5A + \text{&c.}$$

En faisant $A = 90°$, ces deux séries donnent $A = 1$, (34). Mais l'arc de $90° = 1,57$; comme on peut le voir dans la table (AA); ces deux séries ne sont donc pas justes.

148. Les lignes trigonométriques nous ont donné les moyens d'exprimer en parties du rayon la valeur des arcs ; employons maintenant ces mêmes arcs ainsi exprimés, à trouver réciproquement, en parties du rayon, la valeur des lignes trigonométriques qui

qui leur appartiennent respectivement. On y parvient par un moyen aussi ingénieux que simple, et qu'on appelle *le retour des séries*. Étant donnée, par exemple, la série (S), dans laquelle l'arc A est exprimé en puissances du sinus, on demande la valeur de sin. A exprimée en puissances de l'arc. Nous traiterons cette transformation, d'une utilité infinie dans les Mathématiques, avec autant de clarté qu'il nous sera possible, et d'une maniere très générale, en faveur des lecteurs qui n'en seroient pas instruits.

Soit donc proposée l'équation générale suivante, que nous appellerons (P) :

(P)... $m = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c. Dans cette équation je suppose connue la valeur de m, ainsi que celle des coefficients a, b, c, d, &c. ; y est l'inconnue dont on demande la valeur.

Convertissons la série en la suivante, que nous appellerons (Q) :

(Q)... $y = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 +$ &c.

Il est évident qn'on peut toujours représenter ainsi la valeur de y, puisque A, B, C, D, &c. sont des expressions *indéterminées*, et par conséquent susceptibles chacune d'une valeur quelconque, telle qu'il est convenable pour que l'équation soit exacte. Il s'agit donc de fixer quelle doit être la valeur de chacune de ces indéterminées, pour que l'équation ait lieu. Rien de plus facile et de plus ingénieux à la fois.

Puisque $y = Am + Bm^2 + Cm^3 +$ &c., qu'on éleve successivement cette équation à la 1re, puis à la 2e, à la 3e, à la 4e, &c. puissance ; qu'on ordonne les produits comme à l'ordinaire, et par rapport aux diverses puissances de m, on aura

$$
\begin{aligned}
y &= Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + Em^5 + \text{&c.}\\
y^2 &= \ldots\ldots A^2m^2 + 2ABm^3 + 2ACm^4 + 2ADm^5 + \text{&c.}\\
&\qquad\qquad + B^2m^4 + 2BCm^5 + \text{&c.}\\
y^3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots A^3m^3 + 3A^2Bm^4 + 3A^2Cm^5 + \text{&c.}\\
&\qquad\qquad + 3AB^2m^5 + \text{&c.}\\
y^4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^4m^4 + 4A^3Bm^5 + \text{&c.}\\
y^5 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^5m^5 + \text{&c.}\\
&\text{&c.}
\end{aligned}
$$

Qu'on substitue maintenant ces valeurs de y, y^2, &c. dans l'équation (P), en disposant les termes dans le même ordre, et en écrivant, pour abréger, les puissances de m, seulement en tête de chaque colonne verticale, et les supposant répétées dans les termes inférieurs; on aura

$$m = \begin{cases} ay = aAm + aBm^2 + aCm^3 + aDm^4 + aEm^5 + \&c. \\ +by^2 = \ldots bA^2 + 2ABb + 2ACb + 2ADb + \&c. \\ \qquad\qquad + B^2b + 2BCb + \&c. \\ +cy^3 = \ldots cA^3 + 3A^2Bc + 3A^2Cc + \&c. \\ \qquad\qquad + 3AB^2c + \&c. \\ +dy^4 = \ldots dA^4 + 4A^3Bd + \&c. \\ +ey^5 = \ldots eA^5 + \&c. \\ +\&c; \end{cases}$$

ou, en faisant passer m dans le second membre de l'équation, $0 = m(aA - 1) + m^2(aB + bA^2) + m^3(aC + 2ABb + cA^3) + \&c.$

Il faut donc que les valeurs de A, B, C, &c. soient telles que le second membre de cette équation, à quelque point qu'on le prolonge, se réduise à zéro; ce qui aura lieu en supposant les valeurs des indéterminées telles que chaque terme se réduise à zéro. Soit donc $m(aA - 1) = 0$; on aura $mAa = m$, et par conséquent $A = \frac{1}{a}$. De même soit $m^2(aB + bA^2) = 0$; on aura $B = -\frac{bA^2}{a}$; et, en substituant le quarré de la valeur de A que nous venons de trouver, $B = -\frac{b}{a^3}$. On trouvera de la même maniere $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, $D = \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}$, $E = \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}$, et ainsi des autres indéterminées, tant qu'on voudra continuer la série. En substituant ces valeurs dans l'équation (Q), il ne restera aucune inconnue dans le second membre, et on aura la valeur cherchée de $y = \frac{1}{a}m - \frac{b}{a^3}m^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}m^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}m^4$ &c.

149. Nous exhortons les Commençants à s'exercer en continuant les opérations de l'article précédent au moins jusqu'à la

neuvieme puissance de m. Ces opérations une fois faites leur serviront de formule générale pour *retourner* une série, de quelque forme qu'elle soit. Faisons-en l'application au cas qui nous occupe. En comparant l'équation (S), (144), à l'équation générale (P), j'observe que la premiere ne contient pas de puissances paires; or il faut que l'équation (P) et celle à résoudre soient semblables, et c'est ce que nous obtiendrons en égalant à zero dans l'équation (P) les coefficients des puissances qui manquent dans l'équation proposée. Donc dans ce cas-ci $b = 0$, $d = 0$, $f = 0$, &c. Cela posé, voyons ce que deviennent les valeurs que nous avons trouvées pour les indéterminées, dans l'équation (Q).

Nous avons eu 1°. $A = \frac{1}{a}$, valeur qui subsiste. 2°. $B = -\frac{b}{a^2}$; mais $b = 0$; donc $B = 0$. 3°. $C = \frac{2b^2 - ac}{a^3}$; mais $b = 0$; donc $C = -\frac{ac}{a^3} = -\frac{c}{a^2}$.

En poursuivant ainsi, on aura $D = 0$, $E = \frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^5} = \frac{3c^2 - ae}{a^3}$, $F = 0$, $G = \frac{8a^2ce - 12c^3 - a^3g}{a^4}$, &c. Mais en comparant à l'équation (P) la proposée (S), on a $a = 1$, $c = \frac{1}{2.3}$, $e = \frac{3}{2.4.5}$, $g = \frac{3.5}{2.4.6.7}$. En substituant ces valeurs, on aura pour celles des indéterminées, $A = 1$, $C = -\frac{1}{2.3}$, $E = \frac{1}{2.3.4.5}$, $G = \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$; d'où l'on peut évidemment conclure la valeur et le signe de celles qui suivent, et comme, dans le cas dont il s'agit, $m =$ l'arc A, et $y =$ le sinus de A, l'équation (Q) devient

(W) . . . $\sin.A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} +$ &c.

Par le moyen de cette série, on pourra donc calculer, avec autant de décimales qu'on le voudra, le sinus d'un arc quelconque, en prenant la valeur de cet arc dans la table (AA).

Si au lieu de A on écrit 2A, la série devient $\sin.2A = 2A - \frac{8A^3}{2.3} + \frac{32A^5}{2.3.4.5} -$ &c.; et c'est un exemple de la maniere d'expri-

mer par ces sortes de séries les lignes trigonométriques de tout arc multiple.

Il est facile de voir que si on vouloit le sinus d'un arc, exprimé par une série des puissances du cosinus, ou de la cotangente, ou de la tangente de cet arc, il suffiroit de réduire en séries, par le moyen du binôme, les expressions (I. 3°, 4°, 5°). On comprendra aisément, par le peu que nous en disons, comment on auroit de même une ligne trigonométrique quelconque exprimée en puissances de chacune des autres. Au surplus on trouvera ces séries toutes faites dans le Mémoire de M. Jeaurat, que nous avons cité (147).

150. On aura promptement la preuve de la justesse de la série (W) en cherchant le sinus de 30°, sur lequel nous ne pouvons être trompés, puisque nous en savons exactement la valeur (18). Pour abréger singuliérement le travail, nous indiquerons la méthode suivante, qui en général est sans comparaison plus commode et plus courte que la formule donnée par Euler (*Introd. in Analys. infinit. Tom. I*, 134). Qu'on exprime l'équation (W) de la maniere suivante;

(R) . . . Sin.A = $A - B + C - D + E$, &c;

on aura, en comparant les deux équations (R) et (W),

$$B = A^2 \tfrac{1}{6} A \qquad C = A^2 \tfrac{1}{20} B$$

$$D = A^2 \tfrac{1}{42} C \qquad E = A^2 \tfrac{1}{72} D.$$

On voit qu'il suffit de calculer une seule fois A^2, seule puissance de A, qui soit actuellement dans chaque terme, et que les diviseurs sont devenus commodes et très petits. Mais ce n'est pas tout. Je dispose ces quatre premiers diviseurs verticalement, comme il suit, j'en prends les différences premieres et secondes, et trouvant ces dernieres constantes, je continue les trois colonnes, d'après la loi découverte, et en allant de droite à gauche.

Diviseurs.	*Diff.* 1re	*Diff.* 2e
6		
	14	
20		8
	22	
42		8
	30	
72		8
	38	
110		8
	46	
156		8
	54	
210		

&c.

On peut actuellement continuer la série (R) sans qu'il soit besoin de multiplication pour former les diviseurs dans les valeurs successives de F, de G, de H, &c. Les colonnes que nous venons de commencer les donneront à l'infini, par le moyen de simples additions. Cet exemple prouve combien il est nécessaire d'observer, quand il y a lieu, les différences constantes, qui sont d'un grand secours en bien des cas.

151. Supposons à présent qu'on veuille calculer le sinus de 30° avec neuf décimales. On prendra dans la table (AA) l'arc de 30° avec dix décimales pour plus de sureté, et on en formera le quarré comme à l'ordinaire, ou, pour plus de promptitude, comme il suit, en employant la méthode abrégée déja connue pour la multiplication des fractions décimales; ce qui consiste à prendre les facteurs dans le multiplicateur de gauche à droite, et à négliger, de droite à gauche, dans le multiplicande un chiffre pour le premier facteur, deux pour le second, trois pour le troisieme, &c., en tenant compte cependant des dixaines que donnera le produit pour chaque facteur du dernier chiffre négligé. Pour ne se pas tromper, on peut ponctuer successivement le facteur et le chiffre par lequel on commence la multiplication, comme on voit que nous l'avons

fait pour les deux premiers correspondants dans le multiplicateur et dans le multiplicande. (Voyez cette méthode dans les *Élémens de Mathém.* de M. l'Abbé Marie, édit. 1778, art. 79.)

Formation du quarré de l'arc A.

$$\begin{aligned} A &= 0,\ 5235987756 \\ &\quad 0,\ 5235987756 \\ &\quad \overline{0,\ 2617993878} \\ &\quad\quad 104719755 \\ &\quad\quad\quad 15707963 \\ &\quad\quad\quad\quad 2617994 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad 471239 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad 41888 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 3665 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 367 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 26 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 3 \\ A^2 &= \overline{0,\ 2741556778} \end{aligned}$$

D'où l'on tire, en additionnant successivement la valeur de A^2 avec elle-même,

$$\begin{aligned} 2A^2 &= 0,\ 5483113556 \\ 3A^2 &= 0,\ 8224670334 \\ 4A^2 &= 1,\ 0966227112 \\ 5A^2 &= 1,\ 3707783890 \\ 6A^2 &= 1,\ 6449340668 \\ 7A^2 &= 1,\ 9190897446 \\ 8A^2 &= 2,\ 1932454224 \\ 9A^2 &= 2,\ 4674011002 \end{aligned}$$

Ces multiples de A^2 ainsi préparés rendent très prompt le calcul de la série (R). Et en général, dans tous les cas où on aura à employer plusieurs fois un même facteur constant, on appliquera très utilement cette préparation, qui est d'une grande simplicité, et que je n'avois vu indiquée dans aucun ouvrage, lorsque je m'en suis servi, mais qui cependant se trouve dans Euler, *Calc.*

diff. Pars II. 96. Pour en faire usage dans la question présente; $\frac{1}{6}$ A = o, o8726646 26, valeur par laquelle il faut multiplier celle de A^2 pour avoir celle de *B*. Mais puisque nous venons de multiplier la valeur de A^2 par chacun des caracteres de l'arithmétique, nous avons déja chacun de ses produits par chacun des chiffres de la valeur de $\frac{1}{6}$ A; il ne s'agit donc plus que de placer ces produits particuliers, comme il suit, dans l'ordre qui leur convient, en pointant, pour éviter toute erreur, chacun des chiffres de la valeur de $\frac{1}{6}$ A, à mesure qu'on écrit les produits correspondants ci-dessous.

o, 08A^2 = o, 02193245422
o, 007A^2 = o, 00191908974
o, 0002A^2 = o, 00005483114
o, 00006A^2 = o, 00001644934
&c. 164493
10966
1645
55
16

B = o, 0239245962

Divisant ensuite *B* par 20, on aura de la même maniere, et par une simple addition, le produit du quotient par A^2, et ce produit sera *C* = o, 0003279532. On trouvera de même, mais toujours plus promptement, la valeur de *D* et celle de *E*. Voici les termes; nous avons séparé les positifs et les négatifs.

A = o, 5235987756 — *B* = o, 0239245962
C = o, 0003279532 — *D* = o, 0000021407
E = o, 0000000082 — o, 0239267 37
+ o, 5239267 37, somme des termes positifs.
— o, 0239267 37, somme des termes négatifs.

Donc sin. 30° = o, 500000000, valeur exacte (18).

On voit combien sont précises les séries que nous avons formées par le moyen du calcul différentiel et intégral et de la méthode du retour des séries. Si on prend l'arc de 30° avec les 127 décimales qu'on peut avoir en divisant par 6 la valeur donnée (145), et qu'on calcule assez de termes de la série (R) continuée selon les regles indiquées (150), pour avoir sin. 30° avec 127 décimales, on trouvera toujours qne la somme de ces termes se réduit à 0,5; en négligeant seulement le 127° chiffre ou le suivant, qui ne peut jamais être juste, puisque la série est infinie, et que dès lors il doit toujours lui manquer une quantité que les termes suivants ne pourroient que diminuer de plus en plus, quelque loin qu'on poussât le calcul, sans que cette quantité, en approchant sans cesse de l'infiniment petit, pût y arriver, nos nombres n'étant pas de nature à donner une expression infiniment petite (133).

152. Des séries (144, 149) on tire les deux expressions qui suivent, de la différence entre l'arc et son sinus.

$$A - \sin.A = \frac{\sin.^3 A}{2.3} + \frac{3\sin.^5 A}{2.4.5} + \&c.$$

$$A - \sin.A = \frac{A^3}{2.3} - \frac{A^5}{2.3.4.5} + \&c.$$

D'où il suit que, lorsque l'arc est infiniment petit, la différence entre l'arc et le sinus consiste en infiniment petits du troisieme ordre, du cinquieme, &c.

Si dans chacune de ces équations on écrit $\frac{1}{2}A$ au lieu de A, (128), et qu'on les multiplie l'une et l'autre par 2, on aura les deux équations suivantes, qui donnent une double expression de la différence entre l'arc et sa corde (19).

$$A - 2\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin.^3 \frac{1}{2}A}{3} + \frac{3\sin.^5 \frac{1}{2}A}{4.5} + \frac{3.5\sin.^7 \frac{1}{2}A}{4.6.7} + \&c.$$

$$A - 2\sin.\tfrac{1}{2}A = \frac{A^3}{2.3.2^3} - \frac{A^5}{2.3.4.5.2^4} + \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7.2^6} - \&c.$$

En prenant les arcs dans la table (AA), on pourra donc calculer facilement les cordes, avec autant de décimales qu'on voudra, par le moyen de la derniere série.

153.

153. Les équations générales (P) et (Q) serviroient à convertir la série (T) des puissances de la tangente (147), comme on a converti celle des puissances du sinus. Mais pour obtenir de plus simples expressions des indéterminées, et pousser la série jusqu'à la neuvieme puissance, ce qui donnera une formule commode dans les cas semblables; nous ferons

(P′) . . . $m = ay + cy^3 + ey^5 + gy^7 + iy^9 +$ &c.

(Q′) . . . $y = Am + Cm^3 + Em^5 + Gm^7 + Im^9 +$ &c.

D'où l'on tire, par la méthode développée (148),

$$m = \begin{cases} ay = aAm + aCm^3 + aEm^5 + aGm^7 + aIm^9 + \&c. \\ +cy^3 = \ldots\ldots cA^3 + 3cA^2C + 3cA^2E + 3cA^2G + \&c. \\ \qquad\qquad + 3cAC^2 + 6cACE + \&c. \\ \qquad\qquad + cC^3 + \&c. \\ +ey^5 = \ldots\ldots eA^5 + 5eA^4C + 5eA^4E + \&c. \\ \qquad\qquad + 10eA^3C^2 + \&c. \\ +gy^7 = \ldots\ldots gA^7 + 7gA^6C + \&c. \\ +iy^9 = \ldots\ldots iA^9 + \&c. \\ +\&c. \end{cases}$$

Que l'on cherche, comme on a fait (148), les valeurs exprimées par a, c, e, &c. des indéterminées A, C, E, &c.; qu'ensuite on substitue aux lettres a, c, e, &c. leurs valeurs numériques qu'on tirera de l'équation (T), laquelle comparée à l'équation (P′) donne $a = 1$, $c = -\frac{1}{3}$, $e = \frac{1}{5}$, &c. Si on substitue dans l'équation (Q′) les valeurs de A, C, E, &c., ainsi réduites en nombres, qu'on écrive l'arc A au lieu de m, et tang.A au lieu de y, on trouvera

(U)... Tang.A $= A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{3.5} + \frac{17A^7}{3.5.7.3} + \frac{62A^9}{3.5.7.9.3} +$ &c.

Nous ferons tout à l'heure la recherche d'une loi pour continuer cette série sans autre calcul.

Observons que quand l'arc est infiniment petit, si on fait tang.A $=$ A, les autres termes négligés ne sont que des infiniment petits du troisieme ordre, du cinquieme, &c.

154. Si on divise selon les regles de l'algebre la série (W), (149) par la série (U), on trouvera

(Y)... Cos.A $= 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{2.3.4.5.6.7.8} -$ &c.

La loi de cette série est manifeste. Pour s'en servir à calculer promptement un cosinus, on suivra la méthode employée (150, 151).

Par le moyen de cette série et de la précédente, on pourra donc calculer le cosinus et la tangente d'un angle quelconque avec autant de décimales qu'on voudra, en prenant l'arc dans la table (AA).

Il faut observer que ces sortes de séries étant d'autant plus convergentes que l'arc est plus petit, si l'on cherche le sinus d'un arc plus grand que 45°, il vaut mieux calculer le cosinus de son complément par le moyen de la série (Y). De même pour avoir le cosinus d'un arc plus grand que 45°, on emploiera de préférence la série (W).

De la série (Y) on tire l'expression suivante du sinus verse:

$$1 - \cos.A = \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{2.3.4} + \frac{A^6}{2.3.4.5.6}, \text{ \&c.},$$

par laquelle on voit que lorsque A est infiniment petit, l'erreur que l'on commet en faisant le cosinus égal au rayon, consiste en infiniment petits du second ordre, du quatrieme, &c.

Si l'arc A est négatif, aucun des signes de la série (Y) ne change pour cela, puisqu'elle n'est composée que de puissances paires de A. Au contraire si on fait A négatif dans les équations (S), (144), et (U), (153), tous les signes seront changés. D'où je déduis la regle suivante, qui est très utile; *le sinus, la tangente, et par conséquent la cotangente d'un arc négatif sont négatifs, et son cosinus est positif;* c'est-à-dire que, dans tous les cas, son sinus, sa tangente et sa cotangente ont un signe contraire à celui que leur donne la table (42), et que son cosinus conserve le même signe que dans cette table.

155. La recherche des termes consécutifs de la série (U), par le moyen des indéterminées, est très laborieuse, et le devient de plus en plus à mesure que les puissances croissent. On peut obtenir la même série avec bien moins de peine, en divisant l'équation (W) par l'équation (Y), parcequ'on apperçoit sur le champ la loi de

chacune des séries de ces équations, et qu'on peut dès-lors les continuer à volonté : mais cette division même est pénible. Nous avons donc pensé devoir profiter de la méthode qu'Euler a donnée pour réduire a une série infinie toutes sortes de fonctions fractionnaires, finies ou infinies. (On nomme *fonction* d'une quantité variable, par exemple de l'arc A, dans le cas dont il s'agit, toute expression analytique composée, en quelque maniere que ce soit, de cette variable et de quantités constantes). En exprimant par des lettres les coefficients de l'arc A dans les trois séries, on a

$$\frac{(W)\ldots A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \&c.}{(Y)\ldots 1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \&c.} = (U)\ldots A + BA^3 + CA^5 + DA^7 \&c.$$

ou, en multipliant l'équation par la série (Y), en ordonnant les termes par rapport à A, et en n'écrivant, selon l'usage et comme nous l'avons fait (148, 153), chaque puissance de A qu'une seule fois pour chaque colonne verticale,

$$\begin{aligned} A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \&c. = {} & A + BA^3 + CA^5 + DA^7 + \&c. \\ & - \beta \quad - \beta B \quad - \beta C \quad - \&c. \\ & + \gamma \quad + \gamma B \quad + \&c. \\ & - \delta \quad - \&c. \end{aligned}$$

Et en transposant le premier membre,

$$\begin{aligned} 0 = {} & A + BA^3 + CA^5 + DA^7 + EA^9 + \&c. \\ & - \beta \quad - \beta B \quad - \beta C \quad - \beta D \quad - \&c. \\ & + \gamma \quad + \gamma B \quad + \gamma C \quad + \&c. \\ & - \delta \quad - \delta B \quad - \&c. \\ & + \varepsilon \quad + \&c. \\ - A + {} & b - c + d - e + \&c. \end{aligned}$$

Donc en faisant, comme à l'ordinaire, que chaque colonne verticale se réduise à zéro, on aura

$$\begin{aligned} B &= \beta - b \\ C &= -\gamma + c + \beta B \\ D &= \delta - d + \beta C - \gamma B \\ E &= -\varepsilon + e + \beta D - \gamma C + \delta B \end{aligned}$$

En observant la suite des termes de chaque colonne verticale,

il devient facile à présent de continuer sans calcul ces équations qui renferment les valeurs cherchées des coefficients successifs de la série (U). On aura, par exemple,

$$F = \zeta - f + \beta E - \gamma D + \delta C - \epsilon B$$
$$G = -\eta + g + \beta F - \gamma E + \delta D - \epsilon C + \zeta B$$
&c.

En substituant les nombres, réduisant toutes les fractions au plus grand dénominateur, et la somme des fractions à l'expression la plus simple, on trouvera

$$F = \frac{1382}{3^2.5^2.7.9.11}, \quad G = \frac{21844}{3^3.5^2.7.9.11.13}, \quad H = \frac{929569}{3^3.5^2.7^2.9.11.13.15}, \text{ &c.}$$

Soit maintenant, en imitant ce que nous avons fait (150),

$$\text{tang.A} = A + B' + 2C' + 17D' + 62E' + 1382F' + 21844G' + 929569H' + \text{&c};$$

et on aura

$$B' = A^2 \tfrac{1}{3} A \qquad F' = A^2 \tfrac{1}{55} E'$$
$$C' = A^2 \tfrac{1}{5} B' \qquad G' = A^2 \tfrac{1}{39} F'$$
$$D' = A^2 \tfrac{1}{21} C' \qquad H' = A^2 \tfrac{1}{105} G'$$
$$E' = A^2 \tfrac{1}{9} D' \qquad \text{&c.}$$

On calculera ces coefficients B', C', D', &c. de la manière enseignée (151), et on aura la tangente par un calcul abrégé autant qu'il est possible. Passons à celui de la cotangente.

156. $\text{Cot.A} = \frac{\text{cos.A}}{\text{sin.A}}$. En substituant à $\frac{\text{cos.A}}{\text{sin.A}}$ les séries $\frac{(Y)}{(W)}$, telles qu'elles sont exprimées (155), on aura

$$\text{cot.A} = \frac{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \epsilon A^8 - \text{&c.}}{A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + eA^9 - \text{&c.}}$$

Appliquons actuellement à cette équation, de même que nous l'avons fait tout-à-l'heure pour la tangente, la méthode que nous avons empruntée d'Euler, et égalons cette expression fractionnaire de la cotangente à une série, dans chaque terme de laquelle le coefficient de l'arc A sera représenté par une indéterminée ; et nous aurons

$$\frac{1 - \beta A^2 + \gamma A^4 - \delta A^6 + \text{&c.}}{A - bA^3 + cA^5 - dA^7 + \text{&c.}} = \frac{1}{A} + BA + CA^3 + DA^5 + \text{&c.}$$

En multipliant l'équation par le dénominateur du premier membre, transposant le premier membre et ordonnant, on aura

$$0 = \begin{cases} 1 + BA^2 + CA^4 + DA^6 + EA^8 + FA^{10} + \&c. \\ \quad - b \quad - bB \quad - bC \quad - bD \quad - bE \quad - \&c. \\ \qquad + c \quad + cB \quad + cC \quad + cD \quad + \&c. \\ \qquad\qquad - d \quad - dB \quad - dC \quad - \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + e \quad + eB \quad + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - f \quad - \&c. \\ - 1 + \beta \quad - \gamma \quad + \delta \quad - \varepsilon \quad + \zeta \quad - \&c. \end{cases}$$

En faisant chaque colonne égale à zéro, on aura

$$B = b - \beta$$
$$C = - c + \gamma + bB$$
$$D = d - \delta + bC - cB$$
$$E = - e + \varepsilon + bD - cC + dB$$
$$\&c.$$

Ces équations sont faciles à continuer sans calcul, de même que celles données (155).

En prenant dans les séries (W), (Y), les coefficients numériques correspondants aux lettres b, c, &c., β, γ, &c., on trouvera les valeurs de B, C, D, &c., qui, substituées dans la série $\frac{1}{A} + BA + CA^3 + \&c. = \cot.A$ suivant la supposition, donneront l'équation suivante :

$$(Z)\ldots\ \cot.A = \frac{1}{A} - \frac{A}{3} - \frac{A^3}{3^2.5} - \frac{2A^5}{3^3.6.7} - \frac{A^7}{3^3.5^2.7} - \frac{2A^9}{3^3.5.7.9.11} - \frac{1382A^{11}}{3^4.5^3.7^2.9.11.13} - \frac{4A^{13}}{3^4.5^3.7.9.11.13} - \&c.$$

Supposant ensuite $\cot.A = \frac{1}{A} - B' - C' - 2D' - E' - F'' - 691\,G' - H'' - \&c.$, on aura

$$B' = A \times \tfrac{1}{3} \qquad F' = A^2\,\tfrac{10}{99}\,E'$$
$$C' = A^2\,\tfrac{1}{15}\,B' \qquad G' = A^2\,\tfrac{1}{6825}\,F''$$
$$D' = A^2\,\tfrac{2}{21}\,C' \qquad H' = A^2\,\tfrac{2}{195}\,F' \times A^2$$
$$E' = A^2\,\tfrac{1}{5}\,D' \qquad \&c.$$

J'ai tiré de F' plutôt que de G' la valeur de H', pour l'avoir sous une expression plus simple. La quantité $F' \times A^2$ est trouvée précédemment par le calcul qui a donné la valeur de G'.

Il est facile de voir que la série (Z) est bien plus convergente et plus commode à calculer que la série (U), (153, 155). On verra (366) qu'en général si on cherche la tangente d'un arc de plus de 32°, il est mieux de calculer la cotangente de son complément (7) par le moyen de la série (Z).

CHAPITRE VI.

Des tables trigonométriques en nombres naturels.

157. ON ne peut avoir que d'une maniere très approchée la valeur des lignes trigonométriques, si ce n'est cependant de quelques unes qui sont égales au rayon, à sa moitié, &c. Ce défaut n'est pas une suite particuliere de la méthode des séries infinies données dans le chapitre précédent. Les méthodes géométriques qu'employoient les Anciens ne donnoient pour la valeur des lignes trigonométriques que des expressions qui contenoient des racines sourdes ou incommensurables, telles que, (43, 44), $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ et autres semblables; et l'on sait qu'il n'est pas possible d'avoir ces racines exactement, quelque loin qu'on pousse l'extraction. L'erreur diminuera seulement d'autant plus, qu'on emploiera plus de décimales pour exprimer la racine cherchée.

Les lignes trigonométriques ont été calculées par les uns avec dix, par d'autres avec quinze chiffres. Il faut douze décimales, en supposant $R = 1$, pour avoir avec précision les secondes et les dixiemes de seconde, lorsqu'il s'agit ou des sinus des angles qui diffèrent très peu de 90°, ou des cosinus des angles de quelques secondes seulement. Cependant les tables les plus communes sont réduites à

sept décimales, parcequ'elles sont d'un usage plus commode et d'une exactitude suffisante dans la plupart des cas. Elles contiennent les sinus, tangentes et sécantes, de minute en minute, depuis 0° jusqu'à 90°, et par conséquent les cosinus, les cotangentes et les cosécantes (5, 7). Ces tables servent aussi pour les arcs de plus de 90°, (35). On ne peut qu'admirer la patience de ceux qui les ont construites par des moyens extrêmement pénibles, sans le secours du calcul différentiel et de tant de formules qu'on a trouvées depuis. Il est inutile aujourd'hui d'exposer ces méthodes laborieuses. Mais au lieu de cette explication, nous supposerons, pour rendre ce Traité plus complet, les deux cas suivants : 1°. que, dans certains calculs délicats, on desire, comme il arrive quelquefois, l'expression de quelque ligne trigonométrique avec plus de chiffres que n'en donnent les tables ; en pareil cas les moyens les plus abrégés sont ceux que nous avons proposés dans le chapitre précédent : 2°. que l'on veuille calculer de nouvelles tables avec plus de décimales qu'on ne l'a fait jusqu'à présent ; et nous proposons pour ce cas la méthode suivante comme très expéditive.

Si dans les formules (II. 22ᵉ, 23ᵉ) on met nA au lieu de A, et $(n-2)A$ au lieu de B, on aura les deux suivantes :

$$\sin.nA = \sin.(n-2)A + 2\sin.A\ \cos.(n-1)A$$

$$\cos.nA = \cos.(n-2)A - 2\sin.A\ \sin.(n-1)A$$

Soit maintenant $A = 1°$; il faut, par les séries (W), (Y), très convergentes en pareil cas, calculer en usant des moyens donnés dans le chapitre précédent, le sinus et le cosinus de 1°, mais avec trois ou quatre décimales de plus que ce qu'on veut en avoir dans la table à former, pour que la derniere décimale de cette table soit aussi exacte qu'il est possible. On doublera cette valeur du sinus de 1° ; et sous cette valeur ainsi doublée on en écrira successivement le double, le triple, &c., et jusqu'à son produit par 9, précisément comme nous avons fait pour la valeur de A^2, (151). Ces opérations faites, le calcul d'une table de sinus de degré en degré se réduit à de simples additions et soustractions ; et quand on la

porteroit à 28 décimales, de même que par les formules disposées par Euler (*Introd. in Analys. infinit.* Tom. I, 134), qui seroient certainement bien plus laborieuses (169) que la méthode que nous allons développer, la construction de cette table ne demanderoit que quelques heures, tandis qu'avec les méthodes des Anciens, peut-être ne suffiroit-il pas d'un mois employé aux opérations les plus ennuieuses et les plus rebutantes de l'Arithmétique.

En effet, connoissant le sinus et le cosinus de 1°, on trouvera le sinus et le cosinus de 2°, en faisant $n = 2$ dans les formules que nous venons de donner, qui se changent alors en celles qui suivent :

$$\sin.2° = \sin.0° + 2\sin.1°\cos.1° = 2\sin.1°\cos.1°$$
$$\cos.2° = \cos.0° - 2\sin.1°\sin.1° = 1 - 2\sin.1°\sin.1°$$

Si nous considérons la premiere ; pour avoir le sinus de 2°, il faut donc multiplier $2\sin.1°$ par $\cos.1°$. Mais nous avons déja la valeur de $2\sin.1°$ multipliée par chacun des neuf caracteres de notre Arithmétique ; il ne s'agit donc plus que de disposer ces produits selon que le demandent l'un après l'autre les chiffres qui composent la valeur du cosinus de 1°. (Voyez l'exemple donné (151) du produit de la valeur de A^2 par celle de $\frac{1}{6}A$). En prenant la somme de ces produits ainsi disposés, on aura le sinus de 2°. De même, pour la seconde formule, si on dispose ces mêmes produits selon que le demandent les chiffres qui composent la valeur de $\sin.1°$, multiplicateur de $2\sin.1°$, qu'on en prenne la somme et qu'on la retranche de l'unité, on aura le cosinus de 2°. Si donc, dans nos formules générales, on met successivement au lieu de n, les nombres 3, 4, 5, &c. jusqu'à 30, on aura par la même méthode tous les sinus et cosinus, de degré en degré, jusqu'à 30°, avec la plus grande facilité.

On observera 1°. que le sinus ou cosinus cherché, c'est-à-dire le sinus ou cosinus de nA, se trouve toujours par le moyen des sinus et cosinus déja calculés, puisque nA est l'arc le plus grand dans chacune de nos formules ; 2°. que quelle que soit la valeur de n,

de n, le facteur 2 sin.A est constant ; de sorte qu'ayant une fois séparément les produits de ce facteur par chacun des caracteres de l'Arithmétique, comme nous l'avons dit, il ne reste plus que des additions et des soustractions à faire pour construire la table. Les formules que nous donnons ici ont plusieurs avantages sur les formules analogues (124) que nous avons formées d'après Euler, comme il sera facile de le reconnoître à quiconque sera dans le cas d'en faire usage.

Nous avons prescrit de ne pousser le calcul que jusqu'à 30°, parce que les sinus et cosinus restants se déduisent très promptement de ceux déja calculés, par le moyen de simples soustractions, en employant la formule (I. 15°), $\sin.(60° - A) = \sin.(60° + A) - \sin.A = \cos.(30° - A) - \sin.A$, (5). En donnant successivement à A les valeurs de tous les termes de la progression arithmétique 1°, 2°. . . . 29°, on aura, par cette formule, tous les sinus de 30° à 60°. Ceux de 60° à 90° sont la même chose que les cosinus déja connus de 0° à 30°. Donc la table des sinus et cosinus, de degré en degré, sera complette pour le quart de cercle entier.

158. Qu'on veuille actuellement former les sinus et les cosinus de minute en minute : en faisant $A = 1'$, les mêmes formules, les mêmes méthodes les donneront. Ce calcul fait pour les minutes des deux ou trois premiers degrés, on pourra abréger le travail, en prenant les différences premieres, les secondes, les troisiemes, &c., jusqu'à ce qu'on trouve les différences constantes ; et alors en faisant le calcul pour quelques unes seulement des premieres minutes à chaque degré, ou de deux en deux degrés, &c., selon qu'il paroîtra suffisant, on remplira très promptement les vuides avec le secours des différences constantes (150). En arrivant aux sinus et aux cosinus qu'on avoit d'abord calculés pour chaque degré, on aura la preuve de la justesse des valeurs interpolées pour les minutes. Il sera à propos, pour plus de sûreté, de prendre avec une décimale de plus que l'on n'en veut mettre dans la table,

les différences entre les sinus contigus, ainsi que les différences entre les cosinus contigus.

159. Le calcul des tangentes ne présente pas autant de facilités que celui que nous avons proposé pour les sinus. En examinant les formules qui ont été données jusqu'à présent, il nous semble qu'il n'y en a aucune qui soit aussi propre à abréger le travail, que la formule nouvelle que nous avons donnée (I. 43e). Lorsque les tangentes sont une fois calculées jusqu'à 45°, on aura alors les autres par de simples additions, au moyen de cette formule transformée comme il suit, $\text{tang.}(45° + \frac{1}{2}A) = 2\,\text{tang.}A + \text{tang.}(45° - \frac{1}{2}A)$. Au contraire, si on considere les formules (69, 113) qui ont été proposées jusqu'ici, on verra qu'elles obligent de calculer jusqu'à 30° non-seulement les tangentes, mais encore les cotangentes, pour trouver toutes les autres par leur moyen.

Mais pour le calcul des tangentes jusqu'à 45°, je ne crois pas qu'on soit encore parvenu à éviter les divisions ; la formule disposée par Euler en exige plusieurs, et nous paroît dans bien des cas plus longue à calculer que la formule (I. 31e). Nous croyons donc ne pouvoir conseiller rien de mieux que cette formule, en prévenant de plus, que pour avoir la derniere décimale avec autant d'exactitude qu'il est possible, il faut se servir des sinus et des cosinus comme on les aura déja calculés, c'est-à-dire avec deux ou trois chiffres de plus que ce qu'on en veut mettre dans la table. La division s'abrégera d'une maniere analogue à celle que nous avons employée pour la multiplication, en formant le quarré de A, (151). On en trouvera un exemple (163).

160. Les tangentes calculées, on aura les sécantes par de simples additions, au moyen de l'une ou l'autre des formules (I. 9e, 10e), en se rappellant que $\text{coséc.} = \frac{1}{\text{sin.}}$, (24). On aura par conséquent $\text{coséc.}A = \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}A + \text{tang.}\frac{1}{2}A}{2} = \text{cot.}A + \text{tang.}\frac{1}{2}A$.

161. Après avoir vu comment on peut ou construire des tables ou calculer immédiatement une ligne trigonométrique, il est à

propos de dire quelques mots de l'opération inverse. Je suppose que par le résultat d'un calcul on ait une ligne trigonométrique exprimée avec plus de décimales que les tables n'en donnent, et qu'il importe de savoir la mesure exacte de l'arc auquel cette ligne correspond. À l'exception des cas énoncés pag. 62, les tables ordinaires à 7 décimales suffisent pour faire connoître un arc avec toute la justesse dont on peut avoir besoin dans la pratique. Si donc on a une expression avec un plus grand nombre de décimales, on négligera celles qui suivent la septieme, et on aura par les tables l'angle cherché. Mais s'il s'agit de l'expression du sinus d'un arc de près de 90°, ou du cosinus d'un angle très petit, il faut avoir recours à la série (S), (144). On substituera dans cette série l'expression donnée, au lieu de sin.A, et on calculera autant de termes qu'il sera nécessaire pour avoir avec précision la valeur de l'arc A, ou de (90° — A) dans le cas où l'expression seroit celle d'un cosinus. Pour abréger le calcul, soit sin.A $= a$; en supposant, de la même maniere qu'on a déja vue plus d'une fois,

$$A = a + \frac{B}{3} + \frac{C}{5} + \frac{D}{7}, \text{ \&c., on aura}$$

$$B = a^2 \tfrac{1}{2} a \qquad D = a^2 \tfrac{5}{6} C$$

$$C = a^2 \tfrac{3}{4} B \qquad \text{\&c.}$$

La loi de la série ci-dessus, et celle des coefficients numériques dans les valeurs de B, C, D, &c., sont manifestes. On traitera a^2 comme nous avons fait A^2, (151); et quand on aura trouvé la valeur de A, on cherchera dans la table (AA) à combien de degrés, de minutes, de secondes, &c. elle correspond.

162. Nous supposons le lecteur muni des tables de trigonométrie; elles sont absolument nécessaires pour l'étude et pour la pratique de cette science. Cela présupposé, nous conseillons de s'exercer à vérifier les séries, avec peu de termes pour y employer peu de temps, ainsi que les formules contenues dans ce chapitre et dans le précédent. En tête des tables on trouve ordinairement

des instructions sur leur usage. Nous y ajouterons deux observations indispensables.

En premier lieu, les lignes trigonométriques des tables ordinaires semblent rapportées à un rayon de 100000 parties. Dans le fait on peut en bien des cas omettre les deux derniers chiffres séparés, sous la forme de décimales, par le point ou par la virgule. (Nous préférons la virgule, parce que le point est souvent le signe de la multiplication). Mais quelle qu'ait été la raison de construire ainsi les tables, il n'en résultera aucun embarras, si on se rappelle les regles (25). La série (149) dérivée de formules dans lesquelles on a supposé R = 1, donne, par exemple, sin.8° = 0,1391731. Soit R′ = 100000; on aura (25), sin.′ 8° = R′ sin.8° = 13917,31; c'est ce qu'on trouve dans les tables pour cette valeur. Dans la pratique il est plus utile de prendre les nombres des tables tels qu'ils doivent être dans la supposition où R = 1; ce qui est facile en avançant la virgule de cinq chiffres à gauche; et c'est ce que nous ferons toujours, parcequ'on se dispense ainsi de tenir compte du rayon dans les calculs; ce qui ne se pourroit sans des erreurs très graves, si on employoit les lignes trigonométriques sous la forme donnée par les tables.

163. Nous observons en second lieu, que lorsque les différences des lignes trigonométriques, de minute en minute, marchent également ou à-peu-près, on peut se servir de la regle de trois pour trouver les parties proportionnelles correspondantes aux secondes, aux dixiemes de seconde, &c. Mais si les différences sont notablement inégales, comme il arrive pour les tangentes de 73° à 90°, cette regle ne s'applique plus avec justesse. Un exemple fera comprendre ce que nous avançons. Qu'on demande la tangente de 85° 7′ 25″ :

les tables donnent tang. $\begin{cases} 85° 8′ = 11,7447786 \\ 85° 7′ = 11,7045003 \end{cases}$

Différence. 0,0402783

Si telle est la différence de la tangente pour 1′ ou 60″ de diffé-

rence dans l'arc, quelle sera la différence de la tangente pour 25″ de différence dans l'arc? Voilà la regle ordinaire, par laquelle on a 60″ : 25″ :: 0,0402783 : $x = \frac{25 \times 0{,}0402783}{60} = 0{,}0167826$; et en ajoutant . . . . . 11,7045003, valeur de tang. 85° 7′, on aura . . . . . 11,7212829 pour la valeur de tang. 85° 7′ 25″.

Cette opération suppose visiblement que les variations des arcs, lorsqu'elles ne sont que d'une minute, sont proportionnelles à celles des lignes trigonométriques; ce qui en effet a toujours lieu pour les sinus, dans les tables qui n'ont que sept décimales seulement; mais il n'en est pas ainsi des tangentes. Dans le cas présent,

tang. 85° 7′ — tang. 85° 6′ = 0,0400050
tang. 85° 9′ — tang. 85° 8′ = 0,0405545

En comparant ces différences avec la différence intermédiaire trouvée ci-dessus, 0,0402783, on voit qu'elles procedent avec une inégalité assez considérable; et puisqu'on la néglige dans la proportion, le résultat ne peut être exact. Il faut dans ce cas avoir recours à la formule rigoureuse (II. 32°), qui, pour 25″ de variation dans l'arc, donne $\delta \text{tang.} 85° 7' = \frac{\text{sin.} 25''}{\text{cos.} 85° 7' \text{ cos.} 85° 7' 25''}$.

Or les tables donnent cos. 85° 7′ = . . . 0,0851271; et par le moyen de la regle de trois, on a

cos. 85° 7′ 25″ = ... 0,0850063

Produits { 0,00681017 ; 42563 ; 51 ; 3 }

Donc cos. 85° 7′ × cos. 85° 7′ 25″ = 0,00723634, *diviseur.*

Sin. 25″ = 0,000121203 42, *dividende.* | 0,01674927, *quotient.*

4884002
542198
35654
6709
196
51
0

Dans cette division faite conformément à la formule, il faut observer que pour avoir avec exactitude le dernier chiffre du quotient, nous avons commencé du troisieme chiffre effectif du quotient après la virgule, et non du second, à négliger dans la multiplication les unités du produit de ce chiffre par le dernier du diviseur. De même pour le quatrieme chiffre effectif du quotient, nous avons omis son produit par le dernier du diviseur, et les unités de son produit par l'avant-dernier; pour le cinquieme du quotient, le produit par les deux derniers du diviseur, et les unités du produit par l'antépénultieme, et ainsi de suite, en ponctuant successivement les chiffres du diviseur, à mesure que la multiplication commence par chacun d'eux. C'est la méthode connue pour abréger la division des décimales ; elle est analogue à celle qu'on a déja vue (151), et qui abrége leur multiplication. Pour avoir le quotient exact avec sept décimales, nous avons pris le dividende avec deux décimales de plus que n'en a le diviseur, sans compter les zéros qui commencent ces deux nombres. Nous avons tiré de la table (AA) la valeur de ce dividende ou de sin.25″; car on peut prendre l'arc au lieu du sinus, et, s'il n'excede pas une minute, avoir encore au moins dix décimales exactes, comme il est aisé de le reconnoître en calculant sin.1′ par le moyen de la série (W),(149). Après ces remarques nécessaires à l'intelligence de l'opération, examinons-en le résultat. . . . . .

On a donc $\frac{1}{6}$tang.85° 7′ = 0,0167493

En ajoutant tang.85° 7′ = 11,7045003, la formule rigoureuse donne tang.85° 7′ 25″ = 11,7212496. On a trouvé par la regle de trois . . . . . 11,7212829. Donc l'erreur de la regle de trois est . . . . . 0,0000333.

Il faut en conclure que lorsqu'on veut avec exactitude les tangentes de 73° à 90°, on doit chercher les parties proportionnelles pour les secondes par le moyen de la formule différentielle (II.32°). On emploiera l'autre (II. 33°) pour les cotangentes de 0° à 17°.

Il est clair que si la tangente est donnée, et que l'on cherche l'arc auquel elle correspond; alors la formule (II. 32e) à calculer pour avoir les secondes, les dixiemes, &c., doit s'exprimer ainsi : sin.δB ou δB = δtang.B cos.B cos.(B + δB). Faisons-en l'application au même exemple. Je suppose qu'on demande l'arc auquel correspond la tangente 11,7212496. Je cherche dans les tables la tangente la plus approchée, que je trouve être tang.85° 7′ = 11,7045003 = tang.B. Je prends la différence entre ces deux tangentes, et je la désigne ainsi : δtang.B = 0,0167493. Je la multiplie par cos.B = cos.85° 7′. Ce produit, que j'appelle P, doit être multiplié par cos.(B + δB). Mais comme δB m'est inconnue, je l'omets pour le moment, ce qui revient au même que d'employer la formule (II. 39e) au lieu de la formule (II. 32e), et je n'emploie que cos.B. En faisant le calcul, je trouve δB = P × cos.B = 0,000121375. Je cherche dans la table (AA) l'arc dont la valeur est le plus immédiatement au dessous de cette valeur de δB; je trouve que c'est l'arc de 20″, et qu'il reste 0,000024412; je trouve de même que ce reste répond à un arc de 5″, et qu'il reste encore 0,000000171. Pour avoir la valeur de ce second reste en décimales de secondes, je prends dans la même table l'arc d'une seconde = 0,000004848, et je dis

0,000004848 : 1″ :: 0,000000171 : x″ = 0″,028

Donc δB = 25″,028. Donc l'erreur qui résulte de ce qu'on a employé cos.B au lieu de cos.(B + δB) ne va pas à $\frac{1}{300}$ de seconde. Au surplus, si on vouloit une exactitude rigoureuse; après avoir trouvé δB = 25″ à très-peu près, on recommenceroit la derniere multiplication, en y employant cos.(B + 25″), au lieu de cos.B, et on auroit δB = P × cos.85° 7′ 25″ = 0,000121202 = 25″ exactement. En général on peut, sans erreur sensible, employer la formule (II. 39e), au lieu de la formule (II. 32e), dans cette opération; mais non dans la précédente, du moins si l'on veut la tangente avec précision (sans quoi il vaudroit autant faire usage de la regle de trois); car en employant pour cette opération la formule

(II. 39ᵉ), on trouveroit tang.85° 7′ 25″ = 11,7212258, valeur plus petite de 0,0000238, que la valeur exacte.

Les tables dont nous avons parlé dans ce Chapitre se nomment *Tables trigonométriques en nombres naturels ;* ce qui les distingue de celles auxquelles nous allons passer.

CHAPITRE VII.

Des Tables trigonométriques en logarithmes.

164. ON ne peut assez dire combien nous devons au Baron de Neper, Ecossois, inventeur des logarithmes dont l'utilité dans les Mathématiques est au dessus de toute expression. C'est à l'Algebre à développer la théorie sur laquelle ils sont fondés, et les services importants et multipliés qu'on en retire. Cependant nous insérerons ici une partie des regles qui les concernent, pour nous mettre en état de traiter complètement de la construction des tables trigonométriques en logarithmes.

Si l'on nomme c la caractéristique d'un logarithme, on sait que $c + 1$ exprime la quantité des chiffres du nombre entier correspondant à ce logarithme. Par exemple 0,301030 est le logarithme de 2, et 2,301030 est le logarithme de 200 ; or dans le premier cas, $c = 0$; donc le nombre entier doit avoir un seul chiffre, et en effet ce nombre est 2. Dans le second cas, $c = 2$; donc le nombre correspondant, 200, doit avoir et a en effet trois chiffres. D'après cette regle, il faut que la caractéristique des logarithmes des fractions soit moindre que zero, c'est-à-dire négative (16). Nous traiterons seulement des logarithmes des fractions décimales, parceque toutes les autres fractions peuvent se réduire à celles-là.

Les logarithmes des fractions décimales peuvent s'exprimer de trois manieres différentes. Soit par exemple la fraction 0,75 = $\frac{75}{100}$.

Selon

Selon la théorie des logarithmes, on aura log. $\frac{75}{100}$ = log. 75 — log. 100 = 1,87506 — 2,00000, en n'employant, pour abréger, que cinq décimales; et en effectuant la soustraction, log. $\frac{75}{100}$ = — 0,12494. Mais cette méthode, quoiqu'exacte, est absolument proscrite, à cause des inconvénients des logarithmes négatifs. Le principal est qu'on ne peut avoir par les tables le nombre correspondant à un pareil logarithme, qu'en regardant ce nombre comme le dénominateur d'une fraction ayant l'unité pour numérateur. D'où il suit que le nombre correspondant à chaque différent logarithme négatif a un dénominateur différent, et qu'on a ainsi des fractions qui ne jouissent pas de l'avantage qu'ont les fractions décimales, d'être immédiatement comparables entre elles.

La seconde maniere, adoptée par quelques Auteurs, consiste à effectuer la soustraction sur les seules caractéristiques. Par exemple, log. $\frac{75}{100}$ = 1,87506 — 2,00000 = — 1 + 0,87506; ce qu'ils écrivent encore comme il suit; $\bar{1}$,87506. Cette maniere est expéditive; mais elle n'est pas la plus usitée, parcequ'elle nécessite aussi l'emploi du signe négatif, et qu'il faut de l'attention pour ne pas se tromper dans les deux opérations contraires, l'addition des décimales et la soustraction des caractéristiques. Voici un exemple de cette maniere; ayant trouvé le log. de $\frac{75}{100}$, je suppose qu'on cherche par les logarithmes le produit de 12 par $\frac{75}{100}$:

$$\begin{array}{r} \log. 12 = 1,07918 \\ \log. \frac{75}{100} = \bar{1},87506 \\ \hline \text{som. ou } \log.(12 \times \frac{75}{100}) = \log. 9 = 0,95424 \end{array}$$

Et tel est en effet le log. de 9 dans les tables.

Nous croyons devoir avertir que quelques Auteurs omettent dans les tables la virgule entre la caractéristique et les décimales.

165. Venons à la troisieme maniere, qui semble plus généralement suivie. Comme il ne peut arriver dans aucun calcul qu'on se trompe de dix mille millions, on ne court aucun risque de supposer la caracté-

ristique plus forte d'une dixaine d'unités, toutes les fois que cela sera nécessaire, pour l'avoir toujours positive. Ainsi dans l'exemple proposé, si on fait log.$\frac{75}{100}$ = 11,87506 — 2,00000, on aura log. 0,75 = 9,87506; mais suivant les principes donnés (164), 9,87506 = log.7500000000 ; donc pour que ces caractéristiques ainsi confondues induisissent en erreur, il faudroit se tromper au point d'employer 7500 millions au lieu de $\frac{75}{100}$ ou des $\frac{3}{4}$ d'une unité; ce qui est impossible.

Si l'on observe que 9,87506 = 10 — 0,12494, on en conclura 1°. qu'il est facile de convertir en logarithme positif tout logarithme négatif, (164); 2°. que la caractéristique du log. d'une fraction décimale est toujours moindre que 10.

En ajoutant 10 à la caractéristique, on a donc log.0,75 = 9,87506. Par la même raison, log. 0,075 = log. $\frac{75}{1000}$ = 8, 87506; log.0, 0075 = log. $\frac{75}{10000}$ = 7, 87506; et ainsi de suite. D'où résulte cette regle ; *le logarithme d'une fraction décimale a pour caractéristique le complément à 9 du nombre des zéros qui se trouvent de suite après la virgule dans la fraction donnée.*

De cette regle il suit que quand on aura le logarithme d'une fraction décimale, pour connoître cette fraction, on cherchera dans les tables à quel nombre répond le logarithme donné, sans tenir compte de la caractéristique; puis on mettra, avant le nombre trouvé, un zéro suivi de la virgule et d'autant de zéros qu'il manquoit d'unités à la caractéristique pour qu'elle fût égale à 9. Tout cela sera facile à entendre, pour peu qu'on réfléchisse aux exemples qui précédent et à ceux qui suivent.

166. Nous avons dit que le log. d'une fraction décimale a toujours une caractéristique moindre que 10; de là il suit que *dans l'addition des logarithmes des fractions décimales, on ne doit pas tenir compte des dixaines de la caractéristique de la somme.* On les supprimera donc ; et il en résultera que si le log. d'une somme doit être celui d'un nombre entier, la caractéristique se trouvera exacte et sans augmentation; et que si ce logarithme doit être celui

d'une fraction, la caractéristique sera conforme à la regle (165). Par exemple, si on cherche par les logarithmes le produit de $24 \times 0,75$, on aura

$$\begin{aligned} \log. 24 &= 1,38021 \\ \log. 0,75 &= 9,87506 \\ \text{somme} &\ 11,25527 \end{aligned}$$

En négligeant les dixaines de la somme, nous aurons seulement 1,25527, et l'erreur qui résulte de la regle (165) sera détruite, puisque ce nombre est le logarithme exact de $18 = 24 \times 0,75$.

Mais si l'on cherche le produit de $0,75 \times 0,4$;

$$\begin{aligned} \log. 0,75 &= 9,87506 \\ \log. 0,4 &= 9,60206 \\ \text{somme} &\ 19,47712 \end{aligned}$$

Par la suppression des dixaines, la somme se réduit à 9,47712; et il est alors aisé de voir, d'après la regle donnée (165), que la caractéristique indique une fraction décimale, et que le logarithme trouvé est celui de $0,3 = 0,75 \times 0,4$.

167. Qu'on observe donc, comme une regle générale, de supprimer toujours les dixaines de la caractéristique. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'élever une fraction décimale à une puissance donnée; puisque le quarré de 0,4 est 0,16, on aura $2 \log. 0,4 = 19,20412$, et on écrira seulement 9,20412, conformément à la regle (165). De même si l'on veut par les logarithmes le cube de 0,4 qui est 0,064, on aura $3 \log. 0,4 = 28,80618$, et on écrira 8,80618. On voit que nous avons négligé dans la caractéristique une dixaine pour la seconde puissance, et deux pour la troisieme; on en supprimeroit trois pour la quatrieme, et ainsi de suite. Concluons de là que pour l'extraction des racines, qui est l'opération inverse, il faut suppléer ces dixaines négligées; sans quoi le calcul ne pourroit être exact. On écrira donc ou on sous-entendra $m - 1$ de dixaines avant la caractéristique, en appellant m l'exposant du radical. Ainsi on suppléera une dixaine pour la racine quarrée, deux pour la racine cubique, et ainsi de suite.

Pour avoir par le moyen des logarithmes la racine cubique de, 0,064, dont le logarithme est 8, 80618; avant de diviser ce logarithme par 3, supplées deux dixaines à la caractéristique, en écrivant 28, 80618; le quotient de la division, 9, 60206, sera le logarithme de $0,4 = \sqrt[3]{0,064}$.

Je me suis un peu étendu sur les logarithmes des fractions décimales, à cause de l'usage continuel qu'on en fait dans la Trigonométrie. Les tangentes, jusqu'à 45°, et tous les sinus, ne sont que des fractions décimales, lorsqu'on suppose R = 1. Les caractéristiques de leurs logarithmes sont aussi, dans les tables, conformes à la regle que nous avons donnée (165). Quant aux tangentes des arcs plus grands que de 45°, quelques tables emploient pour caractéristiques 10, 11, &c. Dans ces tables les lignes trigonométriques sont considérées non comme parties de R = 1, mais comme parties de R = 10000000000. Lorsque je prends les logarithmes dans ces tables, je néglige constamment la dixaine, m'en tenant à la seule supposition que R = 1, comme à la plus commode.

168. Les tables trigonométriques en logarithmes ont été calculées par Briggs avec quinze chiffres pour chaque centieme de degré; (*Trigonometria Britannica*, Goudæ, 1633); et par Adrien Ulacq, avec onze chiffres, de dix en dix secondes, (*Trigonometria artificialis..... ab* Adriano Ulacco... Goudæ, 1633). Ces tables, devenues aujourd'hui très rares, ont été réduites à huit chiffres par Gardiner, dont l'édition donnée à Londres en 1742 a été réimprimée en plusieurs endroits. Elles contiennent aussi les logarithmes des nombres jusqu'à 100000; et par le moyen des parties proportionnelles, elles les donnent aisément jusqu'à un million. Ce sont les tables les plus généralement adoptées. Jombert jeune vient d'en donner à Paris une édition portative, faite avec le plus grand soin, et dans laquelle, entre autres avantages, les logarithmes et leurs différences ont été disposés par M. Callet d'une maniere très commode.

Persuadé de l'importance d'avoir des tables sans erreur, j'ai

vérifié, chiffre par chiffre celles qui ont été imprimées à Paris (chez Desaint, 1768), et qui sont portatives et d'un usage facile. Cette édition est épuisée; mais j'ai cru faire une chose utile et agréable aux possesseurs de ces tables, et à ceux qui pourront se les procurer par la suite dans les ventes des bibliothèques particulieres à Paris, que de publier à la fin de cet Ouvrage la liste de toutes les erreurs que contiennent ces mêmes tables.

Je suppose actuellement, comme nous l'avons fait pour les lignes trigonométriques en nombres naturels, qu'on ait besoin, dans certains cas, de leurs logarithmes avec plus de chiffres que n'en ont ceux des tables que l'on possede; ou bien que l'on veuille construire de nouvelles tables avec plus de chiffres que n'en contiennent celles qu'on a faites jusqu'à présent: voyons quels sont alors les moyens les plus expéditifs pour résoudre ces questions.

169. Par des voies très laborieuses, mais toujours savantes, Euler (*Introd. in Analys. infinit.* Tom. I, 194) a disposé, avec vingt décimales dans chaque terme, deux séries qui donnent le logarithme hyperbolique (171) du sinus et du cosinus d'un angle quelconque, désigné généralement par $\frac{m}{n}$ 90°, sans qu'il soit besoin de connoître la valeur de ces lignes en nombres naturels. Ces séries sont très convergentes, et pourroient être utiles pour la construction d'une table; cependant il me semble qu'elles ont quelques inconvénients. 1°. Qui voudroit les avoir avec plus de vingt décimales, auroit peut-être autant de peine à les préparer, en suivant les principes d'Euler, qu'à construire la table même des logarithmes de degré en degré, par les moyens que nous donnerons. 2°. Ces séries supposent que l'on connoisse avec autant de chiffres qu'on en veut par chaque terme, les logarithmes des nombres m, n, $n - m$, $n + m$, $2n - m$, et $2n + m$: il faut donc former pour chaque sinus et cosinus chacun de ces logarithmes, si on ne les a pas dans les tables avec autant de décimales qu'il est nécessaire. 3°. Chacun des termes des séries d'Euler est exprimé en

décimales qui doivent être multipliées; savoir, le premier terme par $\frac{m^2}{n^2}$, le second par $\frac{m^4}{n^4}$, le troisieme par $\frac{m^6}{n^6}$, et ainsi de suite. Qu'on cherche, par exemple, le logarithme du sinus de 43°, on aura $\frac{m}{n}\,90° = 43°$, et par conséquent $\frac{m}{n} = \frac{43}{90}$; or, quelle fatigue n'éprouvera-t-on pas pour élever d'abord cette fraction aux puissances seconde, quatrieme, sixieme, &c., et multiplier ensuite chacune de ces puissances par les termes correspondants exprimés en décimales. Ces séries seroient à la vérité commodes pour les arcs qui sont parties aliquotes de 90°; par exemple pour l'arc de 45°, on a $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; pour l'arc de 18°, $\frac{m}{n} = \frac{1}{5}$, &c; mais ces arcs sont en petit nombre. Au contraire si on demande le logarithme du sinus d'un arc exprimé en degrés, minutes, secondes et dixiemes, que l'on ait, par exemple, $\frac{m}{n}\,90° = 43°\,17'\,17'',7$; il faudra réduire les deux arcs en dixiemes, et on aura $\frac{m}{n} = \frac{43°\,17'\,17'',7}{90°} = \frac{155837'',7}{324000'',0}$. Il est inutile de faire observer quelle seroit la longueur des opérations auxquelles conduiroit une pareille fraction. Le même inconvénient affecte les séries données par Euler pour le calcul des lignes trigonométriques en nombres naturels.

170. Ces difficultés, et le desir de donner des formules générales qui fussent applicables à tout arc exprimé en nombres entiers ou fractionnaires, et telles que le nombre de décimales de chaque terme ne fût point limité et que ces formules ne supposassent d'ailleurs rien de connu que l'arc, étoient des motifs suffisants pour m'engager à faire des tentatives réitérées; mais n'ayant trouvé jusqu'à présent que des séries moins convergentes que celles données Chap. V, je regarde en général comme la voie la plus courte celle de déduire les logarithmes des lignes trigonométriques, de leur valeur trouvée d'abord en nombres naturels, sur-tout en employant les formules expéditives que nous donnerons tout-à-l'heure.

Comme les Ouvrages qui traitent des Éléments d'Algebre ne donnent pas tous les formules élégantes qu'on a imaginées pour la

construction rapide des logarithmes, et que la plupart de ces Ouvrages ne font qu'expliquer l'usage des logarithmes ordinaires, et sur quels principes ils sont fondés, je crois devoir faire connoître ces formules à ceux de mes Lecteurs qui n'en seroient pas instruits.

PROBLÊME. *Étant donné un nombre, trouver son logarithme.*

La solution qui suit est en partie tirée des Éléments de Mathématiques de M. l'Abbé Marie.

Soit $(1+x)$ le nombre donné, $(1+z)$ un autre nombre quelconque, et soit $a^m = (1+x)$, et $a^n = (1+z)$. Selon les notions élémentaires de la théorie des logarithmes, m est le logarithme de $(1+x)$, n celui de $(1+z)$; a se nomme la *base* des logarithmes, parce que chaque valeur différente de a change les valeurs de m et de n, et constitue un *système* différent de logarithmes. De plus, comme les équations ci-dessus donnent $a^{mn} = (1+x)^n = (1+z)^m$, on a $1+z = (1+x)^{\frac{n}{m}}$: ce qui prouve une dépendance réciproque entre les logarithmes de deux nombres, dans quelque système que ce soit, puisque le logarithme m d'un nombre $(1+x)$ suffit pour fixer la valeur du logarithme n d'un autre nombre quelconque $(1+z)$.

Supposons maintenant $\log.(1+x) = Mx + Nx^2 + Px^3 + Qx^4 + \&c.$, et $\log.(1+z) = Mz + Nz^2 + Pz^3 + Qz^4 + \&c.$ Si, en combinant ces équations avec celle ci-dessus $1+z = (1+x)^{\frac{n}{m}}$, nous en tirons une valeur des indéterminées $M, N, P, \&c$; cette valeur, substituée dans la premiere de ces trois équations, nous menera à la solution du problême.

Or, l'équation $1+z = (1+x)^{\frac{n}{m}}$ donne (en faisant, pour plus de simplicité, $\frac{n}{m} = r$), $\log.(1+z) = r\log.(1+x)$. Donc $Mz + Nz^2 + Pz^3 + \&c. = r(Mx + Nx^2 + Px^3 + \&c.)$. Prenons la valeur de z dans l'équation $1+z = (1+x)^r$, en développant le dernier binôme par la formule de Newton; ce qui

donne $z = rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3}x^3 +$ &c. Substituant cette valeur de z dans l'équation $Mz + Nz^2 +$ &c. $= r(Mx + Nx^2 +$ &c.), divisant par r, transportant d'un seul côté tous les termes, et les ordonnant par rapport à x, on aura

$$0 = \begin{cases} Mx + M\frac{r-1}{2}x^2 + M\frac{(r-1)(r-2)}{2.3}x^3 + M\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4}x^4 + \text{&c.} \\ \quad + Nr \quad + Nr(r-1) \quad + N\frac{r(r-1)(r-2)}{3} \quad + \text{&c.} \\ \qquad\qquad\qquad + N\frac{r(r-1)^2}{4} \quad + \text{&c.} \\ \qquad\quad + Pr^2 \quad + 3P\frac{r^2(r-1)}{2} \quad + \text{&c.} \\ \qquad\qquad\qquad + Qr^3 \quad + \text{&c.} \\ -M - N \quad - P \quad - Q \quad - \text{&c.} \end{cases}$$

Égalant ensuite à zéro chaque colonne verticale, selon les principes exposés (148), on a 1°. $M - M = 0$; ce qui ne donne aucune valeur pour M; 2°. $M\frac{r-1}{2} + Nr - N = 0$; d'où l'on tire $N = -\frac{1}{2}M$. En substituant cette valeur de N, la troisième colonne donne $P = \frac{1}{3}M$; de même la quatrième donne $Q = -\frac{1}{4}M$; en continuant l'opération, on auroit $R = \frac{1}{5}M$, et ainsi de suite. Donc en substituant ces valeurs de N, P, Q, &c. dans l'équation $\log.(1+x) = Mx + Nx^2 +$ &c., on aura la suivante :

(A)... $\log.(1+x) = M(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c.)

171. Observons d'abord qu'un même nombre tel que $(1+x)$ peut avoir une infinité de logarithmes différents, selon la valeur différente qu'on voudra donner à l'indéterminée M qui, par cette raison, se nomme *le module*. Le système le plus simple est celui dans lequel on suppose $M = 1$: les logarithmes calculés dans cette supposition, se nomment logarithmes *naturels*, ou logarithmes *hyperboliques*, à cause de leur usage dans la quadrature de l'hyperbole.

172. Observons encore que pour avoir le logarithme de 1, il faut faire $x = 0$. Mais, dans ce cas, le second membre de l'équation

l'équation (A) se réduit à zéro; donc, *dans tous les systêmes imaginables*, $\log.1 = 0$.

173. Si on appelle I le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque, T le logarithme du même nombre dans un autre systême, et S la somme de la série $(x - \frac{1}{2}x^2 + \text{&c.})$; on aura $I = S$, et $T = MS = MI$. Donc *en multipliant le logarithme hyperbolique d'un nombre par le module d'un autre systême, on aura le logarithme du même nombre pour ce systême.*

On a aussi $I = \frac{T}{M}$; donc, *en divisant un logarithme d'un systême quelconque par le module de ce systême, on aura le logarithme hyperbolique correspondant.*

174. On ne voit pas d'abord comment l'équation (A) peut donner le log. d'un nombre quelconque; car la série est, à la vérité, convergente si on fait $x < 1$ ou $x = 1$; mais si l'on augmente cette valeur, il n'est pas même besoin de la doubler pour que la série devienne divergente. Pour remédier à cet inconvénient, appliquons à la recherche du log. de $(1 - x)$ toutes les opérations que nous avons faites pour avoir celui de $(1 + x)$, et nous trouverons

$$\text{(B)}\ldots \log.(1 - x) = M\left(-x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}\right)$$

Or si l'on soustrait de l'équation (A) l'équation (B), et qu'on réfléchisse que, selon les regles ordinaires du calcul des logarithmes, $\log.(1 + x) - \log.(1 - x) = \log.\frac{1+x}{1-x}$, on aura

$$\text{(C)}\ldots \log.\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \text{\&c.}\right)$$

Qu'on veuille donc, par exemple, le log. hyperbolique de 2; en résolvant l'équation $\frac{1+x}{1-x} = 2$, on trouvera $x = \frac{1}{3}$, et par conséquent, en se rappellant que $M = 1$, (171),

$$\log.2 = 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3.3^3} + \tfrac{1}{5.3^5} + \tfrac{1}{7.3^7} + \text{\&c.}\right)$$

Il est aisé de reconnoître que cette série est, sans comparaison, plus convergente que si on faisoit $x = 1$ dans l'équation (A). Mais

avant de nous occuper des applications, achevons la préparation des formules.

175. La différentiation des logarithmes pour toutes sortes de différences finies, se trouve facilement par le moyen des formules précédentes. Si un nombre quelconque n reçoit un accroissement δn, on demande quelle est l'augmentation correspondante du log. de n : cette valeur sera donnée par l'équation $\log.n + \delta\log.n = \log.(n + \delta n)$, de laquelle on tire $\delta\log.n = \log.(n + \delta n) - \log.n = \log.\frac{n+\delta n}{n} = \log.\left(1 + \frac{\delta n}{n}\right)$. Si on réduit cette dernière expression en série par le moyen de la formule (A), en faisant $x = \frac{\delta n}{n}$, on aura

$$(D)\ldots\delta\log.n = M\left(\frac{\delta n}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta n}{n}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{n}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\delta n}{n}\right)^4 + \&c.\right);$$

Et c'est la formule différentielle que l'on donne ordinairement, et dont on prend seulement le premier terme $\frac{\delta n}{n}$ pour les différences infiniment petites.

Si n diminue au lieu de croître, son logarithme doit aussi diminuer. Alors on a $\log.(n - \delta n) - \log.n = -\delta\log.n$. Le premier membre se réduit à $\log.\left(1 - \frac{\delta n}{n}\right)$; et au moyen de la formule (B), on a

$$(E)\ldots -\delta\log.n = M\left(-\frac{\delta n}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta n}{n}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{n}\right)^3 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\delta n}{n}\right)^4 - \&c.\right)$$

Mais nous allons donner des formules nouvelles, beaucoup plus convergentes, et qui pourront avec avantage remplacer toutes les précédentes.

Faisons $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+\delta n}{n}$; d'où l'on tire $x = \frac{\delta n}{2n+\delta n}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (C), et mettant, comme ci-dessus, $\delta\log.n$ au lieu de $\log.\frac{n+\delta n}{n}$, on aura

$$(F)\ldots\delta\log.n = 2M\left(\frac{\delta n}{2n+\delta n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{2n+\delta n}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\delta n}{2n+\delta n}\right)^5 + \&c.\right)$$

Cette série est, sans comparaison, plus convergente que la série (D) pour calculer la différence d'un logarithme connu à un autre plus grand. Et si on part de la supposition que $\log.n = \log.1 = 0$, (172), cette même série (F) sera aussi convergente que la série (C), pour calculer *immédiatement* le logarithme entier d'un nombre quelconque.

Quand δn est négatif, comme il en est de même de $\delta \log.n$, l'équation (F) se change en celle-ci :

$$(G)\cdots -\delta\log.n = 2M\left(-\frac{\delta n}{2n-\delta n} - \frac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{2n-\delta n}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{\delta n}{2n-\delta n}\right)^5 - \&c.\right)$$

C'est aussi ce qu'on auroit trouvé en retranchant l'équation (A) de l'équation (B), et faisant $\frac{1-x}{1+x} = \frac{n-\delta n}{n}$.

Cette série est de même bien plus convergente que la série (E) pour calculer la différence en moins d'un logarithme connu à un autre plus petit. Si on part de la supposition que $\log.n = \log.1$, on pourra calculer immédiatement par la série (G) le logarithme entier négatif (164, 165) d'une fraction décimale quelconque.

Faisons actuellement un premier usage de ces deux formules (F), (G) qui sont d'une utilité aussi grande que générale.

176. Puisque la formule (F) donne la différence de $\log.n$ à $\log.(n+\delta n)$, cette formule serviroit à construire avec beaucoup de promptitude une table des logarithmes des nombres. Par exemple, ayant trouvé (174) une série expéditive pour calculer le log. hyperbolique de 2, (la formule (F) donneroit la même série en faisant $n = 1$ et $\delta n = 1$), on a aussi le log. de 4, puisque $\log.4 = \log.2^2 = 2\log.2$. Ayant le log. de 4, on calculera en peu de minutes le log. de 5, qui a coûté plusieurs jours du travail le plus fastidieux aux premiers constructeurs des logarithmes, parcequ'ils ne connoissoient aucune des formules précédentes. Dans ce cas-ci $n = 4$, $\delta n = 1$, et par conséquent l'équation (F) devient

$$\delta\log.4 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \&c.\right)$$

Quatre termes de cette série suffisent pour obtenir la quantité qu'il faut ajouter au log. de 4 pour avoir le log. hyperbolique de 5 avec sept décimales exactes. Ce log. de 5 ajouté à celui de 2 donne log. 10 = 2,302585 +.

177. Il est facile actuellement de connoître le module des logarithmes *vulgaires*, c'est-à-dire des logarithmes des tables ordinaires. On sait que dans ce système log. 10 = 1 ; donc si dans l'équation $T = MI$, (173), on fait $T = 1$, I étant le log. hyperbolique de 10, dont nous venons de trouver la valeur qui, approchée jusqu'à 25 décimales, est $2,302585092994045684017991 4 = \frac{1}{M}$, on aura $M = 0,434294481903251827651 1289$. En multipliant par ce nombre un log. hyperbolique quelconque, on a le log. vulgaire correspondant (173) ; en multipliant par le nombre précédent, c'est-à-dire par la valeur de I ou de $\frac{1}{M}$, un logarithme vulgaire quelconque, on aura le log. hyperbolique correspondant.

178. On nomme *base* d'un système de logarithmes le nombre dont le log. est 1. En effet, dans l'équation fondamentale $a^m = 1 + x$, nous avons fait $m = \log.(1 + x)$; mais on a aussi $m \log. a = \log.(1 + x)$; donc $\log. a = 1$. Ainsi 10 est la base du système ordinaire ou du système de Briggs, qui le premier calcula les tables ordinaires. Nous trouverons (179) la base des log. hyperboliques ou du système de Neper. Celui de Briggs paroît être le plus commode qu'on puisse adopter, parcequ'au moyen d'un changement facile dans la seule caractéristique, le log. d'un nombre sert constamment au même nombre quoique multiplié ou divisé par une puissance quelconque de 10. Par exemple nous savons (164) que le log. de 2 est aussi celui de 20, de 2000, de 0,02, &c., pourvu seulement qu'on augmente ou qu'on diminue convenablement la caractéristique. Les logarithmes hyperboliques n'ont pas un pareil avantage.

179. *Étant donné un logarithme, trouver le nombre auquel il correspond.* Ce problême se résout facilement en divisant par M

l'équation (A), (170), et la convertissant ensuite par la méthode du retour des séries, (148). Soit donc $(1+x)$ le nombre cherché, et faisons, pour abréger, $\frac{\log.(1+x)}{M} = y$; l'équation (A) convertie donnera $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} +$ &c., et par conséquent le nombre cherché $(1+x) = 1 + y + \frac{y^2}{2} +$ &c. Donc en général pour un nombre quelconque n, on aura

$$(H)\ldots n = 1 + \left(\frac{\log.n}{M}\right)^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{\log.n}{M}\right)^4 + \&c.$$

Si dans cette série on suppose $\log.n = 1$ et $M = 1$, la valeur de n sera (178) la base des log. hyperboliques. On a donc $n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c., ou, en réduisant, $n = 2,718281828459045235360 28$. Ce nombre est d'un grand usage dans le calcul intégral.

180. En comparant la formule (D) avec la formule générale (P), (148), on a $\frac{\delta\log.n}{M} = m$, $\delta n = y$, $\frac{1}{n} = a$, $-\frac{1}{2n^2} = b$, et ainsi de suite. Avec ces valeurs de a, b, c, &c., on trouvera celles de A, B, C, &c. dans la formule (Q), (148), et la série (D) convertie deviendra

$$(K)\ldots \delta n = n\left(\frac{\delta\log.n}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^3 + \&c.\right)$$

En convertissant de la même maniere l'équation (E), mais faisant bien attention aux signes, puisque dans ce cas $m = -\frac{\delta\log.n}{M}$, $y = -\delta n$, les coefficients a, b, c, &c. conservant les mêmes signes que dans l'opération précédente, on trouvera

$$(L)\ldots -\delta n = n\left(-\frac{\delta\log.n}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^2 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\delta\log.n}{M}\right)^3 + \&c.\right)$$

Cette formule peut aussi se déduire sur-le-champ de la précédente (K), en considérant que quand δn est négatif, c'est-à-dire quand on passe d'un nombre plus grand à un plus petit, $\delta\log.n$ doit être aussi négatif; mais alors il faut que $\delta\log.n$ change de signe dans les puissances paires, selon les premieres regles de l'Algebre.

181. La construction des formules terminée, il sera utile de préparer, comme je l'ai enseigné (151), les facteurs M et $\frac{1}{M}$, dont on a un besoin continuel pour passer des log. hyperboliques aux log. vulgaires, et *vice versâ*.

En prenant les valeurs (177), on a donc

$$\begin{aligned}
M &= 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\\
2M &= 0,86858\ 89638\ 06503\ 65530\ 22578\\
3M &= 1,30288\ 34457\ 09755\ 48295\ 33867\\
4M &= 1,73717\ 79276\ 13007\ 31060\ 45156\\
5M &= 2,17147\ 24095\ 16259\ 13825\ 56445\\
6M &= 2,60576\ 68914\ 19510\ 96590\ 67734\\
7M &= 3,04006\ 13733\ 22762\ 79355\ 79023\\
8M &= 3,47435\ 58552\ 26014\ 62120\ 90312\\
9M &= 3,90865\ 03371\ 29266\ 44886\ 01601
\end{aligned}$$

182. De même

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{M} &= 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914\\
\tfrac{2}{M} &= 4,60517\ 01859\ 88091\ 36803\ 59828\\
\tfrac{3}{M} &= 6,90775\ 52789\ 82137\ 05205\ 39742\\
\tfrac{4}{M} &= 9,21034\ 03719\ 76182\ 73607\ 19656\\
\tfrac{5}{M} &= 11,51292\ 54649\ 70228\ 42008\ 99570\\
\tfrac{6}{M} &= 13,81551\ 05579\ 64274\ 10410\ 79484\\
\tfrac{7}{M} &= 16,11809\ 56509\ 58319\ 78812\ 59398\\
\tfrac{8}{M} &= 18,42068\ 07439\ 52365\ 47214\ 39312\\
\tfrac{9}{M} &= 20,72326\ 58369\ 46411\ 15616\ 19226
\end{aligned}$$

183. Au moyen de ces préparations, la conversion des log. tabulaires en log. hyperboliques, et réciproquement, se réduit à de simples additions. Si on cherche par exemple le log. hyperbolique de 10,09; qu'on prenne le log. vulgaire correspondant (avec huit décimales, s'il se peut, pour avoir la septieme plus

exacte) ; ce log. est 1,00389117 : en disposant en leur lieu les produits de $\frac{1}{M}$ par chacun des chiffres qui composent ce logarithme, on aura

$$\begin{array}{rr}
\frac{1}{M} = & 2,30258509 \\
\frac{0,003}{M} = & 690776 \\
\frac{0,0008}{M} = & 184207 \\
\&c. & 20723 \\
 & 230 \\
 & 23 \\
 & 16 \\
\hline
\text{Somme} & 2,3115448 = \log. 10,09.
\end{array}$$

Cette opération est si abrégée, que quelquefois même on pourroit la préférer pour la formation des logarith. des nombres composés. Au surplus M. Lambert a donné dans l'Ouvrage cité (146), une table des nombres premiers, et une autre table non moins utile, qui contient le plus petit facteur de chacun des nombres composés jusqu'à 100000. Or connoissant les facteurs d'un nombre, on sait qu'en sommant leurs logarithmes, on a celui de ce nombre.

184. Observons ici, en nous servant du même exemple, combien est convergente la formule (F), (175). Il suffit de calculer seulement le premier terme de la série pour avoir exactement, avec 7 et même 8 décimales, la quantité qu'il faut ajouter à 2,3105532, logarithme de 10,08, pour former le log. de 10,09. Dans ce cas $n = 10,08$, et $\delta n = 0,01$; donc en prenant seulement le premier terme de la série, (car le second auroit neuf zéros après la virgule, et ne pourroit par conséquent influer sur les sept premieres décimales), on aura

$$\begin{array}{rr}
\delta \log. n = 2 \times \frac{0,01}{20,17} = & 0,0009916 \\
\log. 10,08 = & 2,3105532 \\
\hline
\text{Total ou } \log. 10,09 = & 2,3115448
\end{array}$$

Nous répéterons encore une fois que dans tous les calculs d'approximation, quand on veut se servir d'une quantité trouvée pour en calculer une autre, de celle-ci passer à une troisieme, et ainsi de suite, il faut faire les calculs avec une, deux, trois, &c. décimales, suivant les cas, de plus que l'on ne desire d'en avoir qui soient exactes; autrement l'erreur des décimales négligées pourroit s'accumuler et s'étendre sur les dernieres décimales conservées.

185. Le log. de 10 étant connu (177), plus de difficulté sur la divergence (174) de la série (A), puisqu'il devient facile de la rendre convergente, même pour les nombres les plus grands. Qu'on demande, par exemple, le log. hyperbolique de 12389. Il est clair que $12389 = 1,2389 \times 10000 = 1,2389 \times 10^4$. Donc $\log.12389 = 4 \log.10 + \log.1,2389$. En faisant $x = 0,2389$, la série (A) sera convergente, et donnera un logarithme qui, ajouté à $4 \log.10$, produira celui qu'on cherchoit.

Si au lieu de 12389, le nombre donné étoit 0,12389, on auroit $\log.0,12389 = \log.\frac{1,2389}{10} = \log.1,2389 - \log.10$. De même à 0,0012389 on substitueroit $\frac{1,2389}{1000}$; il en seroit ainsi de tous les cas semblables. Nous prévenons seulement qu'ici le log. le plus grand étant négatif, il faut soustraire le plus petit du plus grand, et écrire le reste avec le signe négatif, selon la regle ordinaire. Car par les raisons indiquées (178), on ne peut appliquer aux log. hyperboliques des fractions l'expédient adopté (165) pour les log. vulgaires.

186. Mais la série (F), en traitant de même le nombre donné, est dans tous les cas bien préférable à la série (A), pour calculer immédiatement le logarithme d'un nombre quelconque. En effet, en réduisant le nombre 12389 à la forme 1,2389, et faisant $n = 1$, on aura $\delta n = 0,2389$. Avec ces valeurs, on n'aura à calculer que trois termes de la série (F) pour former avec sept décimales exactes le log. cherché, tandis qu'il faudroit calculer au moins huit termes de la série (A) pour arriver au même but.

187.

187. Plus le premier chiffre du nombre donné surpasse l'unité, moins la formule (F) est convergente pour calculer immédiatement le logarithme de ce nombre. Si on demande, par exemple, le log. de 3412; en écrivant $3,412 \times 1000$, comme $n = 1$, on aura $\delta n = 2,412$ et $\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{2,412}{4,412}$, fraction beaucoup plus grande que la fraction $\frac{0,2389}{2,2389}$ qu'on auroit eue par la même série dans le cas de l'article précédent.

Faisons donc $3412 = 0,3412 \times 10000$, et essayons la formule (G) dans le cas dont il s'agit. Puisque (175), $-\delta \log. n = \log.(n - \delta n) - \log. n = \log.(n - \delta n)$, lorsque $n = 1$, (172); en faisant $(n - \delta n)$ ou $1 - \delta n = 0,3412$, on aura $\delta n = 0,6588$, et $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{0,6588}{1,3412}$, fraction un peu plus petite que $\frac{2,412}{4,412}$. Donc il vaudra mieux, dans ce cas, employer la formule (G) que la formule (F).

188. Nous avons vu (185, 187), qu'en multipliant ou divisant par les puissances de 10, on peut réduire un nombre quelconque à n'avoir qu'un chiffre, ou à n'en avoir aucun avant la virgule. Si on le réduit à la premiere forme, on trouve immédiatement son log. entier par le moyen de la formule (F); et si c'est à la seconde, par le moyen de la formule (G). Il reste seulement à établir une regle précise qui apprenne à laquelle des deux il sera plus avantageux de recourir, selon les différents cas; problême que nous allons résoudre.

Il est clair que la plus convergente de ces deux séries sera celle qui, dans le calcul du log. d'un nombre donné, aura pour premier terme une moindre fraction. Soit donc en général z le nombre dont on cherche le logarithme; l'égalité de convergence des deux séries aura lieu lorsque z sera tel que, par les substitutions convenables, le premier terme soit de même valeur dans l'une et dans l'autre; bien entendu que si l'on se sert de la formule (F), z est un nombre réduit de maniere à n'avoir qu'un chiffre avant la virgule; et que

ce nombre sera $\frac{z}{10}$, c'est-à-dire qu'il n'aura point de chiffres avant la virgule, si l'on cherche son log. par la formule (G). Cela posé; si, pour plus de clarté, l'on suit de l'œil l'exemple (187), en y mettant z au lieu de 3,412, on verra que pour la formule (F), $\frac{\delta n}{2n+\delta n} = \frac{z-1}{2+z-1} = \frac{z-1}{z+1}$; et qu'en écrivant de même $\frac{z}{10}$ au lieu de 0,3412, on a pour la formule (G), $\frac{\delta n}{2n-\delta n} = \frac{1-\frac{1}{10}z}{2-(1-\frac{1}{10}z)} = \frac{10-z}{10+z}$. Donc dans le cas de valeur égale, on a $\frac{z-1}{z+1} = \frac{10-z}{10+z}$. En résolvant cette équation, on trouve $z = \sqrt{10} = 3,1622776 +$; et selon qu'on donnera à z une valeur ou plus grande ou moindre, on aura $\frac{z-1}{z+1}$ ou plus grand ou moindre que $\frac{10-z}{10+z}$. Donc toutes les fois qu'un nombre donné, réduit à n'avoir qu'un chiffre avant la virgule, sera moindre que 3,16 +, il sera mieux de chercher son log. par la formule (F), et au contraire par la formule (G), si ce nombre excede 3,16 +.

Un log. étant connu, si on veut de celui-là passer à un autre, ces formules employées comme on l'a fait (176, 184), et comme on verra (189), seront d'autant plus convergentes, que le nombre n, dont on connoît le log., sera plus grand, et que δn sera plus petit.

189. Puisqu'avec les formules (F) et (G) on peut calculer immédiatement le logarithme d'un nombre quelconque, elles serviront donc aussi à calculer le log. de toute ligne trigonométrique, connue d'abord en nombres naturels. (Par *logarithme* nous entendrons toujours à l'avenir le logarithme vulgaire, les log. hyperboliques n'étant d'aucun usage dans la trigonométrie).

Si l'on veut donc construire des tables avec plus de décimales que n'en contiennent celles que l'on a, voici la méthode qui me semble la plus prompte. Calculons d'abord le log. du cosinus de 26°, l'un des plus avantageux pour avoir la formule (G) convergente, et en même temps pour avoir dans le diviseur un nombre de chiffres qui surpasse peu celui des chiffres du dividende; ce qui

ajoute à l'exactitude du quotient. Nous ferons l'opération avec peu de décimales; mais elle guidera pour faire le calcul avec autant de chiffres qu'on le voudra. J'ai par les tables cos.26° = 0,898794 = 1 — 0,101206. Soit $n = 1$ et $\delta_1 n = 0{,}101206$; on aura (187), $-\delta_1 \log. n = \log.(1 - \delta_1 n)$, log. cherché. En déterminant sa valeur par la série (G), on a

$$-\frac{\delta_1 n}{2n - \delta_1 n} = \frac{-0{,}101206}{1{,}898794} = -0{,}05330015$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta_1 n}{2n - \delta_1 n}\right)^3 = \quad \cdots \quad -0{,}00005047$$
$$-\frac{1}{5}\left(\frac{\delta_1 n}{2n - \delta_1 n}\right)^5 = \quad \cdots \quad -0{,}00000008$$
$$\text{Total} \quad -0{,}05335507$$

Il faut multiplier la somme des termes par 2 M; or 1°. le double de la somme est — 0,1067014; 2°. je prends (181) les produits correspondants aux chiffres qui forment cette somme ainsi doublée; et je les écris comme il suit :

0,04342945
260577
30401
43
17
Total — 0,04633983

Que l'on convertisse en positif (165) ce logarithme négatif, et on aura 10 — 0,0463398 = 9,9536602. Tel est dans les tables le log. du cos. de 26°.

En déterminant ainsi quelques logarithmes par intervalles, par exemple de cinq en cinq degrés, plus ou moins, selon qu'il paroîtra nécessaire pour l'exactitude, on formera ensuite successivement, par une opération rapide, tous les log. intermédiaires. Qu'on veuille, par exemple, déduire du log. de cos.26° celui de cos.26°1', on fera n = cos.26° = 0,898794, et $\delta_1 n$ = cos.26° — cos.26°1' = 0,0001275; et par conséquent $\frac{\delta_1 n}{2n - \delta_1 n} = \frac{0{,}0001275}{1{,}7974605}$. Observons

que le numérateur n'a que quatre chiffres effectifs, tandis que le dénominateur en a huit. Pour faire la division il seroit donc nécessaire d'ajouter des zéros au numérateur; mais on n'auroit pas ainsi la véritable différence entre cos.26° et cos.26° 1′, puisque si les tables ne donnent les cosinus qu'avec sept décimales, c'est qu'elles négligent celles qu'on auroit au-delà. Or il y a un moyen facile de connoître cette différence avec plus de décimales que n'en donnent les tables, même sans connoître la valeur absolue des deux cosinus. En faisant B = 26°, et $\delta_1 B = 1'$, on a (II, 31ᵉ), $-\delta_1 \cos.26° = 2 \sin.30'' \sin.26° 0' 30''$. En calculant cette formule avec les log. des tables ordinaires, j'ai

$$\begin{aligned} \log.2 &= 0,3010300 \\ \log.\sin.30'' &= 6,1626961 \\ \log.\sin.26° 0' 30'' &= 9,6419714 \\ \log. -\delta_1 \cos.B &= 6,1056975 \end{aligned}$$

Ce log., dans les tables des log. des nombres, correspond au nombre 0,000127555; et telle est la différence qu'on auroit trouvée entre cos.26° et cos.26° 1′, si on eût calculé ces cosinus avec neuf décimales exactes. C'est un exemple de l'utilité des formules (II. 30ᵉ à 33ᵉ). Au surplus on n'auroit pas besoin de cet expédient pour construire une table, parce qu'alors il est nécessaire de connoître les sinus et cosinus en nombres naturels, avec quelques décimales de plus que l'on n'en veut dans leurs logarithmes (184).

Comme nous n'avons employé que huit décimales dans nos calculs pour trouver le log. de cos.26°, il est inutile d'en employer davantage pour la recherche de la différence entre ce log. et celui de cos.26° 1′. Il suffit donc de faire $\frac{\delta n}{2n - \delta n} = \frac{0,00012755}{1,79746}$. J'ai désigné par un point dans le dénominateur, le chiffre à compter duquel il suffit de commencer la multiplication par le premier du quotient, en tenant compte seulement des dixaines données par le chiffre voisin 4, ou, si l'on veut, par les deux derniers, 46. On

trouvera pour quotient 0,00007096, dont le double, multiplié par M, donnera

$$-\delta_1 \log.\cos.26^\circ = -\ 0{,}00006163$$

$$9{,}95366017 = \log.\cos.26^\circ \text{ avec 8 décimales, comme on l'a calculé.}$$

$$\text{Différence } 9{,}9535985 = \log.\cos.26^\circ\,1', \text{ et c'est ainsi que le donnent les tables.}$$

Donc avec un seul terme de la série (G), (car dans le second la virgule seroit suivie de douze zéros au moins), nous sommes arrivés du log. connu de cos. 26° à log. cos. 26° 1′; on pourroit calculer de même les logarithmes des cosinus des arcs plus grands, de minute en minute; et au moyen de la formule (F), ceux des cosinus des arcs plus petits. Il est donc clair que si, au lieu de construire une table de logarithmes, de minute en minute, on la desiroit de 10″ en 10″, ou de degré en degré, &c., on pourroit user de la même méthode, pourvu qu'on ne négligeât pas ce que nous avons dit (184).

Si nous avons suggéré de commencer le calcul par un cosinus, c'est que quand on a les logarithmes des cosinus de 0° à 45°, on en déduit tous les autres par de simples soustractions, au moyen de la formule (I. 29*), qui donne $\log.\cos.(45^\circ + \frac{1}{2}A) = \log.\cos.A - \log.2 - \log.\cos.(45^\circ - \frac{1}{2}A)$.

Après avoir formé les logarithmes des cosinus, et par conséquent des sinus de tout le quart de cercle, on aura promptement ceux des tangentes, au moyen de la formule (I. 31*) qui donne $\log.\text{tang.}A = \log.\text{sin.}A - \log.\cos.A$.

190. J'ai donné des méthodes pour former les logarithmes avec un nombre illimité de décimales; mais comme il semble difficile que vingt décimales ne suffisent pas dans les cas les plus extraordinaires, on trouvera à la fin de cet Ouvrage la table (BB) qui sera d'un grand secours, comme nous le verrons bientôt. Je l'ai tirée de Gardiner, en me bornant aux logarithmes des nombres premiers;

j'y ai ajouté les facteurs de ceux des nombres composés, qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, parce que ceux qui le sont se distinguent à la premiere inspection. Il sera facile, par le moyen de cette table, de former au besoin les logarithmes des autres nombres composés. Pour en éprouver l'utilité, cherchons la racine cinquieme de 161900, approchée jusqu'à douze décimales. Négligeant les deux zéros qui n'influent que sur la caractéristique, nous chercherons d'abord le logarith. de 1619, mais, pour plus de sûreté, avec quatorze décimales : le plus approché que donne la table est celui de 162 ou de 1620. Je fais $n = 1620$, et j'ai $\delta n = 1$. Donc par la formule (G)

$$-\frac{\delta n}{2n-\delta n} = -\frac{1}{3239} = -\ 0,\ 000\ 308\ 737\ 264\ 59$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta n}{2n-\delta n}\right)^3 = \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ -\ 0,\ 000\ 000\ 000\ 009\ 81$$
$$\text{Total} \quad -\ 0,\ 000\ 308\ 737\ 274\ 40$$

Le double de cette somme multiplié par M, comme à l'ordinaire, donne

$$-\delta \log. 1620 = -\ 0,000268165789\overline{25}$$
$$\log. 1620 = \log. 2 + 4 \log. 3 + \log. 10 = \quad 3,209515014542\overline{63}$$
$$\text{Différence ou } \log. 1619 = \quad 3,209246848753\overline{38}$$

Ajoutant 2 à la caractéristique, parceque le log. cherché est celui de 161900, et divisant le log. par 5, on aura

$$\log. \sqrt[5]{161900} = 1,\ 041\ 849\ 369\ 750\ 68$$

En cherchant dans les tables ordinaires à quel nombre correspond ce log. considéré dans ses premieres décimales, on trouve que le log. le plus approché est celui de 11,01 qu'on a ensuite par la table (BB), comme on va voir.

$$\log. \sqrt[5]{161900} = 1,\ 041\ 849\ 369\ 750\ 68$$
$$\log. 11,01 = \log. 3,67 + \log. 3 = \quad 1,\ 041\ 787\ 318\ 971\ 75$$
$$\text{Différence} \quad 0,\ 000\ 062\ 050\ 778\ 93$$

En appellant $\delta \log. n$ cette différence, et faisant $n = 11,01$, la

formule (K), (180), donnera la quantité qu'il faut ajouter à 11,01 pour avoir la racine cherchée. La multiplication de la valeur de $\delta \log.n$ par celle de $\frac{1}{M}$, se fera par addition, au moyen de la préparation (182); et on aura

$$\begin{aligned}
\tfrac{\delta \log. n}{M} &= 0,000\ 142\ 877\ 198\ 57 \\
\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\delta \log. n}{M}\right)^2 &= 0,000\ 000\ 010\ 206\ 94 \\
\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{\delta \log. n}{M}\right)^3 &= 0,000\ 000\ 000\ 000\ 49 \\
\text{Total} \quad & 0,000\ 142\ 887\ 406\ 00
\end{aligned}$$

En multipliant cette somme par n ou par 11,01, on aura

$$\begin{aligned}
\delta 11,01 = \delta n &= 0,001\ 573\ 190\ 340 \\
n &= 11,01 \\
\text{Et la somme ou } \sqrt[5]{161900} &= 11,011\ 573\ 190\ 340
\end{aligned}$$

191. Ces calculs sont courts, si on limite, comme nous l'avons fait, chaque opération à 14 décimales. Je crois même qu'avec les moyens abrégés que j'ai donnés, cette méthode est plus expéditive que celle de Halley, dont les formules, qui d'ailleurs ne peuvent donner qu'un nombre limité de décimales exactes, ont été généralisées par M. l'Abbé Marie. J'ai tiré le problême de ce dernier Auteur, qui le résout ainsi, après avoir démontré que $\sqrt[5]{(a^5 - b)} = \frac{3}{4}a + \sqrt{\left(\frac{1}{16}a^2 - \frac{b}{10a^3}\right)}$ à peu près. Soit $161900 = a^5 - b$. On divisera par 5 le log. de 161900 pris dans les tables ordinaires; on aura pour résultat le logarithme de 11,012, racine approchée de $a^5 - b$. On supposera ce nombre 11,012 égal à a, et l'on élevera cette valeur supposée de a à la cinquieme puissance; ce qui donnera un nombre composé de six chiffres avant la virgule, et de quinze décimales. On nommera b la différence entre ce nombre et le nombre donné 161900. C'est en calculant l'équation ci-dessus avec ces valeurs de a et de b, qu'on trouvera la racine cherchée, et qu'on pourra reconnoître quelle est la méthode la plus courte. Au reste

voici la formule générale de M. l'Abbé Marie, que je donne pour ceux qui la préféreroient : $\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = \frac{m-2}{m-1}\, a + \sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)\, a^{m-2}}}$, valeur qui n'est qu'approchée.

192. Après avoir vu l'usage qu'on peut faire de nos formules, ainsi que de la table (BB), pour l'extraction des racines, on pourra facilement en faire l'application à la recherche des logarithmes des lignes trigonométriques ou d'un nombre quelconque. Qu'on demande, par exemple, avec vingt décimales, le logarithme de l'arc de 1″, dont nous aurons besoin par la suite. Je prends, avec vingt-deux chiffres, la valeur de cet arc dans la table (AA); puis j'observe qu'en séparant les quatre premiers chiffres à gauche, et les considérant, pour plus de commodité, comme un nombre entier, je puis en avoir le logarithme par la table (BB), puisque log.4848 = log.3 + 4log.2 + log.101. Soit donc $4848 = n$, et appellons δn les dix-huit chiffres qui suivent; nous aurons, en négligeant dans le dénominateur les décimales inutiles pour la division,

$$\frac{\delta n}{2n + \delta n} = \frac{0,\ 136\ 811\ 095\ 359\ 935\ 899}{9696,\ 136\ 811\ 095\ 359\ 9}.$$

En calculant seulement ce terme et le second, de la série (F), et multipliant par $2M$, on aura

$$\delta \log.n = 0,\ 00001\ 22556\ 65310\ 72710.$$

Ajoutant à cette quantité log.3, 4 log.2 et log.101, on trouvera, en prenant 4 pour caractéristique (165), attendu que dans la valeur de l'arc de 1″, la virgule est suivie de cinq zéros,

$$\log.1'' = 4,\ 68557\ 48668\ 23540\ 51953.$$

Sans le secours de la table (BB), ce logarithme auroit exigé le calcul de vingt termes de la formule (G), employée comme on l'a vu (187, 188).

193. Nous avons fait usage, dans l'exemple (190), de la formule (K). Quand le log. donné est plus petit que le log. approché pris dans la table, alors il faut se servir de la formule (L), qui donne

donne la différence que l'on doit soustraire du nombre correspondant au logarithme plus grand, pour avoir le nombre correspondant au logarithme plus petit. Le premier de ces nombres est, dans ce cas, celui qu'on appelle *n*.

Comme les tables de logarithmes sont toujours précédées des instructions nécessaires pour en faire usage, pour trouver les parties proportionnelles, &c., nous nous dispenserons d'en parler.

Les logarithmes à sept décimales des tables ordinaires ne suffisent pas pour donner avec exactitude les secondes et les dixiemes de secondes pour les cosinus, depuis 0° jusqu'à 15° environ. Lorsqu'on desirera une pareille précision, on pourra l'obtenir pour les cosinus entre 5° et 15°, en faisant les calculs en nombres naturels, et se servant des tables de cette espece. Si le cosinus donné répond à un arc moindre que de 5°, ou qu'on veuille faire usage des logarithmes, il faudra les former et les employer avec autant de décimales qu'on le croira nécessaire ; et alors pour trouver à quel arc correspond le logarithme d'un cosinus, on calculera d'abord, par l'une des formules (H), (K), (L), le nombre auquel répond le logarithme donné ; puis, par les méthodes enseignées (161), l'arc auquel répond ce nombre lui-même. Au surplus nous chercherons des expédients pour éviter ces cosinus, autant qu'il sera possible, dans l'usage des formules pour la résolution des triangles.

194. Le calcul par logarithmes, très expéditif de sa nature, le devient encore davantage par l'usage du *Complément arithmétique*, opération qui transforme la soustraction en addition, ainsi qu'il suit. Que l'on ait à retrancher 579 de 895; il est clair que $895 - 579 = 895 + 1000 - 579 - 1000 = 895 + 421 - 1000 = 316$. Je puis donc, au lieu de retrancher 579 de 895, ajouter 421 à ce dernier nombre, ce qui me donnera pour somme 1316, pourvu que dans la somme je supprime une unité du même ordre que celle dont cette somme s'est accrue par l'opération. Dans notre exemple cet ordre est celui des unités de mille ; il faut donc supprimer une unité de mille dans la somme 1316, et nous aurons

316 = 895 — 579. Actuellement si l'on compare 421 à 579, on trouve que 4 et 2 sont la différence ou le complèment de 5 et de 7 à 9, et que 1 est le complément de 9 à 10. Donc *pour opérer par le* COMPLÉMENT ARITHMÉTIQUE, *il faut, au lieu du nombre qu'on doit soustraire, écrire le complément à 9 de chacun de ses chiffres, excepté le dernier à droite, dont on écrira le complément à 10 : faire ensuite l'addition, et supprimer dans la somme une unité du même ordre que celle dont cette somme a été augmentée par cette opération.* Cette suppression ne cause aucun embarras dans les calculs par logarithmes, parcequ'elle tombe toujours sur les dixaines de la caractéristique, qu'on omet déja par la regle donnée (166). Par le *dernier* chiffre, on entend le dernier effectif; car les zéros qui seroient à la fin du nombre à soustraire, s'écriroient tels qu'ils sont; mais on écrira 9 au lieu de chacun de ceux qui se trouveront entre les chiffres effectifs. Au premier aspect tout cela paroît devoir embarrasser le calcul plutôt que le faciliter; mais la pratique fera reconnoître l'avantage de l'emploi du complément arithmétique. Nous en ferons un usage continuel dans nos exemples. Pour le moment il suffit de dire que quand on en a l'habitude, il ne coûte pas plus d'écrire, au lieu d'un logarithme, son complément arithmétique, que de copier ce logarithme tel qu'il se trouve dans la table. D'ailleurs si on examine la conversion du log. négatif en logarith. positif (165), on verra qu'elle se réduit à prendre le complément du logarithme négatif. Ainsi la cotangente a pour logarithme le complément arithmétique de celui de la tangente, et *vice versâ;* puisque (I. 32e), log. tang.A = log. 1 — log. cot.A = — log. cot.A, (172). On en doit dire autant du cosinus et de la sécante (23), et du sinus et de la cosécante (24).

195. Si les logarithmes sont utiles pour les multiplications, les divisions, les élévations aux puissances et les extractions des racines; ils semblent incapables, par leur nature, de se prêter au calcul, quand il s'agit des additions et des soustractions. Il est sans doute à propos de rechercher les expédients les plus commodes pour surmonter cette difficulté.

Soit à calculer une équation de cette forme, $x = ab + cd$, dans laquelle ab et cd représentent deux termes composés chacun de facteurs et de diviseurs monomes, quels que soient leur nature et leur nombre; le moyen le plus court pour trouver la valeur de x, en calculant l'équation par logarithmes, est en général de chercher le nombre correspondant à $\log.ab = \log.a + \log.b$, et de la même maniere le nombre correspondant à $\log. cd$; ensuite de prendre la somme de ces deux nombres.

196. Mais si, par exemple, x est une ligne trigonométrique; pour trouver à quel arc elle répond, il est plus avantageux de se servir des tables trigonométriques en logarithmes que des tables en nombres naturels. Car dans les premieres, à cause de leur usage bien plus fréquent, on a inséré les différences entre les logarithmes contigus, et par ces différences on trouve promptement les secondes, dixiemes, &c.; avantage que n'ont pas les tables trigonométriques en nombres naturels. Par la même raison, si ab ou si ab et cd étoient des lignes trigonométriques, il seroit à desirer de n'avoir pas à les chercher dans ces dernieres tables, et de pouvoir résoudre l'équation par les logarithmes.

Nous donnerons donc deux moyens pour trouver le log. de l'inconnue, en résolvant l'équation proposée.

197. J'écris l'équation comme il suit : $x = ab\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$; je prends le nombre correspondant à $\log.\frac{cd}{ab}$; j'y ajoute l'unité, et j'ai ainsi le nombre $\left(1 + \frac{cd}{ab}\right)$, dont je prends le log., auquel j'ajoute celui de ab déja trouvé en calculant $\log. \frac{cd}{ab}$; la somme est $\log.x$.

198. Le second moyen n'est pas moins général, et il a l'avantage particulier de dispenser de l'usage de la table des logarithmes des nombres, lorsque toutes les quantités contenues dans l'équation sont des lignes trigonométriques. Je prends dans l'équation réduite (197) le binôme $1 + \frac{cd}{ab}$, et je le compare avec le second

membre de l'équation $\frac{1}{\cos.^2 A} = 1 + \text{tang.}^2 A$, (I. 19e). Si donc je suppose $\frac{cd}{ab} = \text{tang.}^2 A$, supposition qu'on ne peut contester, puisqu'une tangente peut avoir (34, 41) toutes les valeurs imaginables ; j'aurai $1 + \frac{cd}{ab} = \frac{1}{\cos.^2 A}$, et par conséquent $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. L'équation $\text{tang.}^2 A = \frac{cd}{ab}$ me donne $\text{tang.} A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$; ayant déterminé par son moyen l'arc A, je prends dans la table le logarithme de cos.A, et je l'emploie dans l'autre équation $x = \frac{ab}{\cos.^2 A}$. Donc en séparant en deux parties l'équation donnée, on peut en faire le calcul par logarithmes avec bien plus de facilité qu'en employant les méthodes données jusqu'à présent par la Caille et autres Auteurs qui, en pareil cas, emploient la formule (II. 18e).

Au lieu de l'équation (I. 19e), on peut prendre indifféremment celle-ci $\frac{1}{\sin.^2 A} = 1 + \cot.^2 A$, (I. 4e); en faisant $\text{cot.} A = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, on aura $x = \frac{ab}{\sin.^2 A}$.

199. Donnons un exemple de ces sortes de transformations. Étant donnés les log. des sinus et des cosinus, et par conséquent (189) des tangentes des deux arcs de 1° et de 2°; cherchons le log. de sin.3° par cette formule, $\sin.3° = \sin.2° \cos.1° + \cos.2° \sin.1°$, (II. 1e). En la comparant à la formule générale (195), on a $\sin.3° = x$, $\sin.2° \cos.1° = ab$, $\sin.1° \cos.2° = cd$. Donc (197) $\sin.3° = \sin.2° \cos.1° \left(1 + \frac{\sin.1° \cos.2°}{\sin.2° \cos.1°}\right) = \sin.2° \left(1 + \frac{\text{tang.}1°}{\text{tang.}2°}\right) \cos.1°$, (I. 31e). Par conséquent en faisant, comme ci-dessus (198), $\text{tang.} A = \sqrt{\frac{\text{tang.}1°}{\text{tang.}2°}}$, on aura $\sin.3° = \frac{\sin.2° \cos.1°}{\cos.^2 A}$. Calculons par logarithmes les deux dernieres équations :

log. tang.1°	= 8,2419215
(I. 32e), log.cot.2°	= 1,4569162
Total	9,6988377

La moitié de cette somme (167), ou log.tang.A = 9,8494188. Ce log. répond, dans les tables, à tang.35° 15′ 37″. Il faudroit

actuellement soustraire deux fois le log. du cosinus de cet angle, de la somme de log. sin. 2° et de log. cos. 1°. J'évite ces soustractions en écrivant deux fois, au lieu de log. cos. 35° 15′ 37″, son complément arithmétique, et je n'ai qu'une seule addition à faire.

$$\begin{aligned}
\log.\cos.1^\circ &= 9,9999338\\
\log.\sin.2^\circ &= 8,5428192\\
\text{compl. log. cos. } 35^\circ\ 15'\ 37'' &= 0,0880236\\
&\quad\ 0,0880236\\
\text{Somme ou log. sin. } 3^\circ &= 8,7188002
\end{aligned}$$

Et tel est en effet, dans les tables, le logarithme de ce sinus.

200. Il est bon d'observer que dans ces sortes de calculs il n'est pas nécessaire de chercher l'angle A lui-même. Par exemple dans ce cas-ci, il suffit de connoître le log. de la tangente de cet angle pour déterminer immédiatement celui de son cosinus, seule quantité dont on ait besoin. En effet, que l'on prenne la différence de log. tang. A, c'est-à-dire, dans notre exemple, de 9,8494188, au logarithme le plus voisin dans les tables : ce logarithme est, dans celles de Gardiner, 9,8494323 = log. tang. 35° 15′ 40″ ; et sa différence à celui de tang. A est 0,0000135. Que l'on prenne aussi, dans ces tables, la différence 447, ou 0,0000447, entre les deux logarithmes les plus proches, en plus et en moins, de log. tang. A. Enfin qu'après avoir pris encore la différence 149 entre les deux logarithmes correspondants des cosinus, on fasse la proportion 447 : 135 :: 149 : x, et la valeur de x sera celle qu'on doit ajouter dans ce cas à log. cos. 35° 15′ 40″ qui se trouve dans la table, pour avoir le logarithme cherché de cos. A.

201. Si l'équation à calculer avoit cette forme, $x = ab - cd$; en écrivant $x = cd\left(\frac{ab}{cd} - 1\right)$, le premier moyen indiqué (197) pourra s'y appliquer avec une égale facilité, en retranchant l'unité au lieu de l'ajouter.

202. Quant à la 2ᵉ méthode, on comparera le binôme $\frac{ab}{cd} - 1$

au second membre de l'équation (I. 33e), tang.²A $= \frac{1}{\cos.^2 A} - 1$. En procédant comme on a fait (198), on aura cos.A $= \sqrt{\frac{cd}{ab}}$, et $x = cd$ tang.²A.

203. Si on a $\frac{ab}{cd} < 1$, comme on ne peut avoir $\frac{1}{\cos.^2 A} < 1$, parce que le quarré tang.²A ne peut être négatif, on ne doit plus se servir de la formule (I. 33e) pour en tirer la quantité de comparaison; mais alors on écrira $x = -cd\left(1 - \frac{ab}{cd}\right)$; et prenant l'équation (I. 3e), sin.²A $= 1 -$ cos.²A, on fera cos.A $= \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, et on aura $x = -cd$ sin.²A.

On peut prendre également l'équation (I. 18e), cos.²A $= 1 -$ sin.²A; et faisant sin.A $= \sqrt{\frac{ab}{cd}}$, on aura $x = -cd$ cos.²A.

204. Soit maintenant l'équation générale $y = ab \pm cd \pm ef$. (Dans cette équation et dans les équations générales qui suivent, le signe double embrasse tous les cas, et la regle donnée (11) n'a point ici son application). Je fais $ab \pm cd = x$; je cherche log.x par les moyens que nous venons de donner (197 à 203); ensuite par les mêmes voies je résous par logarithmes l'équation $y = x \pm ef$.

De cette maniere on pourra calculer un polynome quelconque par logarithmes.

205. Soit enfin l'équation générale $z = \frac{ab \pm cd \pm ef \pm \&c.}{AB \pm CD \pm EF \pm \&c.}$. Réduisez par les regles précédentes le numérateur à un seul logarithme; faites la même opération pour le dénominateur, et l'équation sera résolue par logarithmes.

Et si le second membre est ou en partie ou en entier affecté de signes radicaux; si on a, par exemple, $z = \frac{\sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)}}{\sqrt[n]{(AB \pm CD) \pm EF \pm \&c.}}$, alors log. $\sqrt[m]{(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)} = \frac{1}{m}$ log. $(ab \pm cd \pm ef \pm \&c.)$, et on a de même log. $\sqrt[n]{(AB \pm CD)} = \frac{1}{n} \times$ log. $(AB \pm CD)$. Il ne reste donc qu'à suivre les regles données

pour trouver le logarithme d'un binôme ou d'un polynome, sauf la division convenable par l'exposant du radical.

Mais comme les racines quarrées sont d'un usage fréquent, nous allons donner les formules particulieres dont nous nous servirons, et qui nous seront très utiles.

206. Soit donc $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$; on aura (14), $x = p \times \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$. En comparant ce dernier radical avec $\sqrt{(1 + \text{tang.}^2\text{A})}$, (I. 19e), on aura $\text{tang.A} = \frac{q}{p}$, et $x = \frac{p}{\text{cos.A}}$. Par la simplicité de ces équations, on voit que la proposée, $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, est une de celles auxquelles cette espece de transformation s'applique avec le plus d'avantage.

On trouveroit la même chose en suivant la regle générale (205). Alors $\log.x = \frac{1}{2}\log.(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}\log.p^2\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log.p + \frac{1}{2}\log.\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)$; et, (198), $\frac{q^2}{p^2} = \text{tang.}^2\text{A}$, ou $\frac{q}{p} = \text{tang.A}$. De même $1 + \frac{q^2}{p^2} = \left(\frac{1}{\text{cos.A}}\right)^2$; donc $\frac{1}{2}\log.\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right) = \log.\frac{1}{\text{cos.A}}$. Et par conséquent $\log.x = \log.p + \log.\frac{1}{\text{cos.A}}$, ou $x = \frac{p}{\text{cos.A}}$.

En comparant $\sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{p^2}\right)}$ avec $\sqrt{(1 + \text{cot.}^2\text{A})}$, (I. 4e), on a aussi $\text{cot.A} = \frac{q}{p}$, et $x = \frac{p}{\text{sin.A}}$.

207. Si l'équation étoit de cette forme $x = \sqrt{(p^2 + rst^2)}$, elle se réduiroit à la précédente $x = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, en mettant rst^2 au lieu de q^2; et on auroit $\text{tang.A} = \frac{t}{p}\sqrt{rs}$ et $x = \frac{p}{\text{cos.A}}$, ou $\text{cot.A} = \frac{t}{p}\sqrt{rs}$ et $x = \frac{p}{\text{sin.A}}$.

208. Soit à présent $x = \sqrt{(p^2 - q^2)}$. Les log. s'appliquent aisément à ce cas, parce qu'alors $x = \sqrt{(p - q)(p + q)}$. Mais si p ou q, ou l'un et l'autre, sont des lignes trigonométriques (196), ou que l'on ait seulement les logarithmes de p et de q, sans avoir leur valeur en nombres naturels, il faut alors recourir à l'une des deux formules (I. 3e, 18e); et faisant $x = p\sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)}$, on aura $\frac{q}{p} = \text{cos.A}$ et $x = p\ \text{sin.A}$, ou $\frac{q}{p} = \text{sin.A}$ et $x = p\ \text{cos.A}$.

209. Enfin toute expression comparable à l'une quelconque des formules trigonométriques, pourra se résoudre et se calculer par le moyen des tables trigonométriques. Soit par exemple $x = m \times \frac{a+b}{a-b}$. Je fais (9), $x = m \times \frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}$; et comparant cette fraction avec le second membre de la formule (II. 8e), j'ai $\frac{b}{a} =$ tang. B, et $x =$ m tang. $(45° + B)$.

Nous voilà en état d'entreprendre la résolution des triangles dans tous les cas.

CHAPITRE VIII.

Résolution des triangles rectilignes rectangles.

Fig. 1. 210. COMME GD est la tangente (7) de l'arc BD décrit du rayon CD, on aura, en procédant comme on a fait (46, 47),

CD : DG :: R : tang. C :: R : cot. CGD,

puisque dans un triangle rectangle les deux angles obliques sont compléments l'un de l'autre. Donc *dans tout triangle rectangle un côté est à un autre côté comme le rayon est à la tangente de l'angle opposé à ce second côté*, ou *comme le rayon est à la cotangente de l'angle adjacent à ce même côté.*

211. On a vu de plus (46) que *dans un triangle rectangle l'hypothénuse est au rayon comme un côté est au sinus de l'angle opposé*, ou *comme un côté est au cosinus de l'angle adjacent.*

212. On sait encore que *dans tout triangle rectangle le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux côtés ;* en sorte que des trois côtés d'un triangle rectangle, deux étant connus, le troisieme se trouvera, soit par l'extraction des racines, soit par les méthodes trigonométriques (206 et 208).

213.

213. Avec les regles contenues dans les trois articles précédents, il suffit de connoître deux choses, outre l'angle droit, dans un triangle rectangle, pour qu'on puisse trouver la valeur de chacune des trois autres parties de ce triangle. Il faut excepter seulement le cas où les deux choses connues sont les deux angles; car alors le problême est indéterminé, parce qu'il peut évidemment y avoir une infinité de triangles semblables, tels, par exemple, que GCD, ABC; de sorte que de la connoissance des angles il est impossible de conclure la mesure absolue d'aucun des côtés: on en déduit seulement les rapports qui regnent entre ces côtés, (47).

En appellant A l'angle droit, B et C les deux autres, nous avons rassemblé dans la table suivante toutes les solutions que fournissent les regles (210, 211, 212). Pour les vérifier, on pourra les appliquer au triangle ABC, fig. 1. Mais on doit observer que dans le cas de la derniere formule de cette table, il est souvent à propos de calculer BC de la maniere enseignée (206), qui se réduit à chercher d'abord B ou C par la 17e formule, et ensuite BC par la 2e, ou par la 4e, ou par la 6e, ou par la 8e.

Si dans les formules 13e et 15e de cette même table, le sinus ou le cosinus étoient d'une grandeur telle (193) qu'on ne pût avoir les angles par les tables trigonométriques avec l'exactitude desirée, on auroit recours aux formules (217).

Nous verrons bientôt (223) que ce défaut des tables n'apporte ni incertitude ni erreur dans le calcul des équations, lorsque les grands sinus et cosinus sont dans le second membre, c'est-à-dire dans les quantités connues.

Trois seulement des formules qui suivent dépendent du théorême (212); toutes les autres sont fondées sur cette remarque: Si l'on prend l'hypothénuse pour rayon, chaque angle a pour sinus le côté opposé, pour cosinus le côté adjacent; si on prend un côté pour rayon, l'autre côté est la tangente de l'angle opposé, la cotangente de l'angle adjacent; et alors l'hypothénuse est la sécante du premier de ces angles, la cosécante du second.

Table pour la résolution d'un triangle rectiligne ABC *rectangle en* A.

DONNÉES.	INCONNUES.		FORMULES.
AB, B	AC.....	1°	$AC = AB \times \text{tang.B}$
	BC.....	2°	$BC = \frac{AB}{\text{cos.B}}$
AB, C	AC.....	3°	$AC = AB \times \text{cot.C}$
	BC.....	4°	$BC = \frac{AB}{\text{sin.C}}$
AC, B	AB.....	5°	$AB = AC \times \text{cot.B}$
	BC.....	6°	$BC = \frac{AC}{\text{sin.B}}$
AC, C	AB.....	7°	$AB = AC \times \text{tang.C}$
	BC.....	8°	$BC = \frac{AC}{\text{cos.C}}$
BC, B	AB.....	9°	$AB = BC \times \text{cos.B}$
	AC.....	10°	$AC = BC \times \text{sin.B}$
BC, C	AB.....	11°	$AB = BC \times \text{sin.C}$
	AC.....	12°	$AC = BC \times \text{cos.C}$
AB, BC	B *ou* C...	13°	$\text{cos.B} = \frac{AB}{BC} = \text{sin.C}$
	AC.....	14°	$AC = \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}$
AC, BC	B *ou* C...	15°	$\text{sin.B} = \frac{AC}{BC} = \text{cos.C}$
	AB.....	16°	$AB = \sqrt{(BC - AC)(BC + AC)}$
AB, AC	B *ou* C...	17°	$\text{tang.B} = \frac{AC}{AB} = \text{cot.C}$
	BC.....	18°	$BC = AB\sqrt{\left(1 + \frac{AC^2}{AB^2}\right)}$

214. *Exemples de la résolution d'un triangle rectiligne rectangle.* Soit PO une distance de 752 toises, PC de 439; et soit CPO un angle droit. On demande quelle est la distance OC. On connoît deux côtés et on cherche l'hypothénuse; c'est donc le cas de la 18ᵉ formule, dont voici le calcul, en substituant PO à AB, PC à AC, et OC à BC. Fig. 1.

$$\log.PC = 2,642465$$
$$\text{compl. log.PO} = 7,123782$$
$$\log.\frac{PC}{PO} = 9,766247$$
$$\text{le double de ce log. ou } \log.\left(\frac{PC}{PO}\right)^2 = 9,532494$$

Le nombre correspondant de plus près à ce log. est 0,3408

$$\text{Donc } \log.\left(1+\frac{PC^2}{PO^2}\right) = \log.1,3408 = 0,127364$$
$$\text{dont la moitié ou log. } \sqrt{\left(1+\frac{PC^2}{PO^2}\right)} = 0,063682$$
$$\text{En y ajoutant log.PO} = 2,876218$$
$$\text{on a log.OC} = 2,939900$$

Le nombre correspondant de plus près à ce log. est 870,76. Donc la distance OC est de 870 toises et $\frac{76}{100}$. Telle est la solution géométrique pour laquelle j'ai présenté la formule dans la table, de la maniere la plus commode pour le calcul.

Voyons maintenant la solution trigonométrique. Par la 17ᵉ formule, on a $\frac{PC}{PO}$ = tang.COP. Or le log. de $\frac{PC}{PO}$ trouvé ci-dessus, répond à tang. 30° 16′ 31″,4. Je cherche le log. de sin. 30° 16′ 31″,4; et employant son complément conformément à la formule 6ᵉ, j'ai

$$\text{compl. log. sin. } 30°\ 16'\ 31'',4 = 0,297435$$
$$\log.PC = 2,642465$$
$$\text{Somme ou log.OC} = 2,939900, \text{ comme ci-dessus.}$$

215. Soit proposé de déterminer par la Trigonométrie la hauteur DK d'une tour, d'un clocher, &c. Mesurez à la toise la distance horizontale DC, du pied de la tour, à un point arbitraire C,

duquel on puisse prendre exactement, au moyen des instruments convenables (294 et suiv.), la mesure de l'angle DCK. Supposons que DC ait été trouvé de 23 toises et $\frac{1}{4}$, et DCK de 50° 3′; on aura par la formule 1° (213), DK $= 23\frac{1}{4} \times$ tang. 50° 3′.

Or log. 23, 25 = 1, 366423
log. tang. 50° 3′ = 0, 076956
Somme ou log. DK = 1, 443379 = log. 27, 7574

Donc la hauteur de la tour est, dans ce cas, de 27 tois. $\frac{76}{100}$ environ.

Ce résultat n'est pas celui que la figure présente à l'œil, puisque DK, dans cette figure, est presque double de CD; mais il faut s'accoutumer à se servir des figures telles qu'on les fait à la plume, sans proportions exactes, et seulement pour se guider dans le calcul. C'est ainsi que nous construirons une figure pour le problême suivant.

216. L'industrie des Navigateurs a trouvé le moyen de mesurer l'espace que parcourt un vaisseau. La boussole leur indique de plus la direction de la route ou l'angle formé par la ligne que suit le vaisseau, avec la ligne méridienne. Je suppose qu'on ait fait cinquante lieues par un même vent et sous un angle de 35° $\frac{1}{2}$ nord-est, et qu'on demande la position du bâtiment, ou de quelle quantité il s'est avancé, soit au nord soit à l'est. Je commence par décrire
Fig. 4. sur le papier une ligne quelconque NS, que je nomme la méridienne, et dont j'appelle N une extrémité qui est censée indiquer le nord, et S l'autre extrémité qui indique le sud. D'un point pris arbitrairement dans cette ligne, que je nomme B, et duquel je suppose que le vaisseau est parti, je tire une ligne quelconque BC, par laquelle je désigne de même les cinquante lieues parcourues par le vaisseau. Je mene cette ligne du côté N et non du côté S, et à la droite de NS; parceque la direction de la route étoit au nord et à l'est. L'angle CBN représente celui de 35° $\frac{1}{2}$ nord-est, connu par la boussole. Enfin de l'extrémité C je tire une ligne CA, que je suppose perpendiculaire à NS, et j'ai un triangle BAC censé

rectangle en A, dans lequel, en supposant BC = 50 lieues, et CBA = 35°½, il faut déterminer la longueur de AB, qui est la route faite vers le nord, et la longueur de AC, qui est celle vers l'est. Comme j'ai désigné les trois angles du triangle par A, B, C, c'est-à-dire par les lettres dont j'ai fait usage dans la table générale (213), j'ai promptement, sans travail et sans crainte d'équivoque, les formules nécessaires. Les données étant BC et B, et les cherchées AB, AC, j'ai par la 9ᵉ formule, AB = 50 cos. 35° 30′, et par la 10ᵉ, AC = 50 sin. 35° 30′; ce qui donnera à-peu-près, AB = 40,7 lieues, et AC = 29,035 lieues.

Cet exemple ainsi détaillé peut servir de regle pour décrire les figures dans tous les cas.

217. Pour trouver un angle exactement, lorsqu'on ne pourra se servir des formules 13ᵉ et 15ᵉ (213), à cause de la grandeur du sinus ou du cosinus, on aura recours, suivant le cas, à l'une des quatre équations suivantes, de l'usage desquelles nous donnerons un exemple (223).

Réduisant en proportion la 2ᵉ formule (213), on a BC : AB :: 1 : cos.B. Donc (10), BC : BC — AB :: 1 : 1 — cos.B :: 1 : (I. 7ᵉ) $2\sin.^2\frac{1}{2}B = \frac{BC-AB}{BC}$.

La premiere proportion donne encore BC + AB : BC — AB :: 1 + cos.B : 1 — cos.B :: (9) 1 : $\frac{1-\cos.B}{1+\cos.B}$ :: 1 : (I. 42ᵉ) $\text{tang.}^2\frac{1}{2}B = \frac{BC-AB}{BC+AB}$.

En opérant de la même maniere sur la 8ᵉ formule, ou, ce qui revient au même, en mettant B au lieu de C, et C au lieu de B, dans les deux équations précédentes, on aura

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{BC-AC}{2BC}}, \quad \text{et} \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{BC-AC}{BC+AC}}.$$

218. Il arrive qu'au lieu de connoître la valeur absolue de deux parties d'un triangle rectangle, comme il le faudroit pour résoudre ce triangle par les formules (213), on connoît seulement une partie

et la somme ou la différence de deux autres parties. Nous croyons utile de donner pour ces cas les solutions suivantes.

En multipliant la seconde équation (217) par la 14ᵉ, (213), on a $\text{tang.}^2\frac{1}{2}B \times AC^2 = (BC - AB)^2$, et par conséquent

$$AC : BC - AB :: 1 : \text{tang.}\frac{1}{2}B.$$

Si au lieu de multiplier on divise, on trouvera

$$AC : BC + AB :: \text{tang.}\frac{1}{2}B : 1.$$

Par ces deux analogies on résoudra le triangle, lorsqu'*un angle, et la différence ou la somme de l'hypothénuse et d'un côté seront donnés.*

219. La formule 1ᵉ (213) donne $AB : AC :: 1 : \text{tang.}B$. Donc $AB + AC : AB - AC :: 1 + \text{tang.}B : 1 - \text{tang.}B :: 1 : \frac{1 - \text{tang.}B}{1 + \text{tang.}B}$, et par conséquent (II. 8ᵉ)

$$AB + AC : AB - AC :: 1 : \text{tang.}(45° - B).$$

Par cette analogie on résoudra le triangle, lorsqu'*un angle et la différence ou la somme des deux côtés seront donnés.*

220. La proportion $AB : AC :: 1 : \text{tang.}B$, donne aussi $AB : AB \pm AC :: 1 : 1 \pm \text{tang.}B$. Mais par la 9ᵉ formule (213), $AB = BC \cos.B$. Donc $BC : AB \pm AC :: 1 : \cos.B (1 \pm \text{tang.}B) :: 1 : \cos.B \pm \sin.B$; et par conséquent (II. 7ᵉ)

$$BC : AB \pm AC :: 1 : \sin.(45° \pm B)\sqrt{2}.$$

Par cette analogie on résoudra le triangle, lorsque *l'hypothénuse, et la somme ou la différence des côtés seront donnés.*

Lorsque $\sin.(45° + B)$ est la quantité cherchée, les tables ne donneront pas avec exactitude l'arc correspondant dans le cas où B sera de près de 45°. Mais alors comme on a (28), $\sin.(45° - B) = \sqrt{1 - \cos.^2(45° - B)} = \sqrt{1 - \sin.^2(45° + B)}$, ce qui donne, en substituant à $\sin.(45° + B)$ sa valeur tirée de l'analogie ci-dessus, $\sin.(45° - B) = \sqrt{\left(1 - \frac{(AB + AC)^2}{2BC^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2BC^2 - (AB + AC)^2}{2BC^2}\right)}$; on aura de cette maniere, au lieu de la

valeur de sin.(45° + B), celle de sin.(45° — B), et par conséquent celle de B, avec toute la précision desirée. Si la fraction $\frac{(AB + AC)^2}{2BC^2}$ est peu différente de l'unité, il est à propos de calculer par les nombres naturels, et non par logarithmes, la quantité $2BC^2 - (AB + AC)^2$, pour l'avoir avec exactitude. Mais ensuite on pourra prendre son logarithme, en soustraire le log. de $2BC^2$; la moitié du reste sera le log. de sin.(45° — B).

221. Considérons encore deux cas qui fournissent trois théorêmes utiles.

Soit divisée premiérement *l'hypothénuse en deux segments par une perpendiculaire* comme AD, tirée de l'angle droit. Fig. 5.

1°. *Le plus grand segment sera au plus petit, comme le rayon au quarré de la tangente du plus petit angle.*

2°. *L'hypothénuse sera à la différence des segments, comme le rayon au sinus de la différence des angles.*

En effet, (210), $AD = BD \times \text{tang.}B = CD \times \text{tang.}C$. Mais $\text{tang.}C = \text{cot.}B = \frac{1}{\text{tang.}B}$. Donc $BD \times \text{tang.}^2B = CD$, et par conséquent 1°.

$$BD : CD :: 1 : \text{tang.}^2B.$$

Il est évident que B doit être le plus petit angle, en supposant $BD > CD$; puisque la proportion exige qu'on ait aussi $1 > \text{tang.}B$, c'est-à-dire $B < 45°$, (17).

Cette proportion se transforme ainsi : $BD + CD : BD - CD :: 1 + \text{tang.}^2B : 1 - \text{tang.}^2B :: 1 : \frac{1 - \text{tang.}^2B}{1 + \text{tang.}^2B} :: 1 : \cos.2B$, (I. 25°). Mais $BD + CD = BC$, et $\cos.2B = \sin.(C - B)$, puisque $C = 90° - B$. Donc 2°.

$$BC : BD - CD :: 1 : \sin.(C - B).$$

222. Si au lieu de la perpendiculaire AD, on considere *une ligne* comme AE, *qui tombe obliquement sur l'hypothénuse, en divisant l'angle droit en deux parties égales;* alors

Le plus grand segment de l'hypothénuse est au plus petit, comme le rayon à la tangente du plus petit angle.

En effet (49), $AE = \frac{BE \sin.B}{\sin.BAE} = \frac{CE \sin.C}{\sin.CAE}$. Mais BAE = CAE par la construction, et sin.C = cos.B. Donc BE × sin.B = CE × cos.B, et par conséquent

$$BE : CE :: 1 : tang.B$$

223. Nous terminerons ce qui concerne toutes ces formules, en donnant un exemple pour en faire voir l'usage et l'utilité.

Supposons que *regardant, d'un lieu élevé, l'horizon de la surface de la mer, on demande l'inclinaison du rayon visuel.*

Fig. 6. Soit BT = 40 pieds, et soit la tangente BA le rayon visuel d'un Observateur qui, du point B, regarde l'horizon de la mer. On cherche l'angle ABO que forme l'horizon apparent AB avec l'horizon vrai OR de l'Observateur.

Puisque BAC = 90° = CBO, l'angle cherché ABO = ACB. Pour trouver la grandeur de cet angle, on a par la formule 15°(213), $cos.C = \frac{AC}{BC}$. Les Astronomes ont déterminé la longueur du demi-diametre AC ou TC de la Terre, dont la valeur moyenne est à-peu-près de 19630000 pieds, mesure de Paris, en nombres ronds. En ajoutant 40, on a donc la valeur de BC, et par conséquent

$$\begin{aligned} \log.AC &= \log.19630000 = 7,2929203 \\ \text{compl. } \log.BC &= \text{compl. } \log.19630040 = 2,7070788 \\ \log.\cos.C &= 9,9999991 \end{aligned}$$

Ce log. répond dans les tables au cosinus d'un angle entre 6′ 45″ et 7′ 15″. On auroit ainsi la valeur de l'angle cherché avec 30″ d'incertitude (193). Il est donc à propos d'avoir recours à la formule (217), $\sin.\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{BC - AC}{2BC}}$, qui transforme le grand cosinus en un sinus très petit, et dont voici le calcul.

$$\begin{aligned} \log.\tfrac{1}{2}(BC - AC) = \log.\tfrac{1}{2}BT = \log.20 &= 1,3010300 \\ \text{compl.log.}BC = \text{compl. } \log.19630040 &= 2,7070788 \\ \text{Donc } \log.\tfrac{BC - AC}{2BC} &= 4,0081088 \\ \text{dont la moitié (167), ou } \log.\sin.\tfrac{1}{2}C &= 7,0040544 \end{aligned}$$

Ce

Ce log. répond dans les tables à sin. 3′ 28″, 2; et l'on a ainsi avec précision C = 6′ 56″, 4.

Nous venons de voir que quand on emploie la formule $\cos.C = \frac{AC}{BC}$, le log. de cos. C ne donne pas exactement la valeur de C : mais cette imperfection n'influe en rien sur le calcul lorsque l'angle C est connu, et qu'étant donnés, par exemple, BC et C, on cherche AC par la formule (213, 12°), AC = BC × cos. C. Il est clair que si à log. BC pris de l'exemple ci-dessus, on ajoute log. cos. 6′ 56″, tel que le donnent les tables et que nous l'avons trouvé en calculant la formule $\cos.C = \frac{AC}{BC}$, il en doit résulter nécessairement le même log. de AC, que celui que nous avons employé dans cette même formule. Concluons qu'autant les sinus et cosinus très grands sont peu propres à donner la valeur exacte des angles par le moyen des tables ordinaires, autant ils sont favorables, lorsque l'angle est donné, pour trouver avec précision une autre quantité quelconque d'une équation, puisque s'il y a quelque légere erreur dans l'angle donné, elle n'altere point la valeur de son sinus ou cosinus, et ne nuit point par conséquent à la valeur de la chose cherchée.

Si, au lieu de l'angle d'inclinaison, on vouloit connoître la distance BA, on auroit (213, 16°), AB = $\sqrt{40} \times 3926004o$. En calculant cette équation, on trouvera que l'œil peut, à quarante pieds d'élévation, voir la surface de la mer jusqu'à une distance de 39628 pieds.

CHAPITRE IX.

Résolution des triangles rectilignes obliquangles.

224. *Connoissant deux angles,* et par conséquent le troisieme, *et connoissant aussi un côté, trouver l'un des deux autres côtés.*

Appellons A, B, C, les trois angles, et AC le côté connu. Si Fig. 7. l'on cherche BC, on aura par la regle (49)

$$BC = \frac{AC \times \sin.A}{\sin.B}.$$

Nous avons donné (50) un exemple de ce cas.

Si le côté cherché est AB, on aura par la même regle

$$AB = \frac{AC \times \sin.C}{\sin.B}.$$

225. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté donné,* et par conséquent l'angle intercepté; car ordinairement, avec ces mêmes données, c'est en cherchant celui des angles opposés qui n'est pas connu, qu'on détermine l'angle intercepté.

Appellons les données AC, BC, B; A est l'inconnue demandée, et on aura

$$\sin.A = \frac{BC \times \sin.B}{AC}.$$

L'angle cherché est toujours aigu, s'il est opposé au plus petit des côtés donnés.

En effet, comme le plus grand angle est toujours opposé au plus grand côté, il faut, si $BC < AC$, qu'on ait aussi $A < B$. Or un triangle rectiligne ne peut avoir deux angles obtus.

Si l'angle cherché est opposé au plus grand des côtés donnés, l'espece de l'angle est douteuse, (35).

Fig. 8. En effet soit, par exemple, $BC > AC$; et menons $CD = AC$; nous aurons $A = ADC$, et $\sin.A = (19)\ \sin.CDB = \frac{BC \times \sin.B}{AC} = \frac{BC \times \sin.B}{CD}$. Donc pour savoir si l'angle cherché est aigu comme

A, ou obtus comme CDB, il ne suffit pas de connoître la grandeur de B, celle de BC et celle de AC = CD ; mais il est nécessaire de savoir encore si le plus petit côté donné est dans la direction AC ou dans la direction CD. C'est ce qu'on sait ordinairement par les circonstances locales. Mais sans cela, il est de plus impossible de savoir laquelle il faut adopter des deux valeurs ACB, BCD pour le troisieme angle, et AB, BD pour le troisieme côté.

226. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver le troisieme côté.*

Appellons les données AC, BC, B ; AB est l'inconnue cherchée. Que l'on mene sur AB prolongé, s'il le faut, la perpendiculaire CD ; on aura (211), BD = BC × cos.B, et CD = BC × sin. B. Donc (212), AD = $\sqrt{(AC^2 - CD^2)}$ = $\sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}$. Or AB = BD ± AD. Donc Fig. 2 et 3.

$$AB = BC \times \cos.B \pm \sqrt{(AC^2 - BC^2 \sin.^2 B)}.$$

On voit par les *figures* que le radical négatif a lieu lorsque l'angle A est obtus. Donc pour trouver la valeur de AB, il est nécessaire de savoir l'espece de l'angle opposé au plus grand des côtés donnés, comme dans le problême précédent. Si l'angle donné B est obtus, le radical est positif ; mais il faut observer qu'alors BC × cos.B devient négatif, (36).

J'ai donné pour ce problême une solution directe, et j'en ferai de même pour les problêmes suivants, parceque ces solutions fournissent des expressions utiles et même nécessaires dans les opérations analytiques ; mais dans ce cas-ci la voie la plus expéditive et la plus commode pour le calcul numérique, est de chercher d'abord l'angle A par la formule (225) ; alors le troisieme angle est aussi connu ; et ensuite AB se trouve par la 2e formule (224). Comme les quantités AC, sin.B sont communes à ces deux formules, on n'a que six logarithmes à chercher par cette méthode.

227. *Connoissant deux côtés et l'angle intercepté, trouver le troisieme côté.*

Soient les données AB, AC, A ; BC est le côté demandé. Fig. 2.

Menant une perpendiculaire CD sur l'un des côtés connus, on aura (212), $BC^2 = CD^2 + BD^2 = AC^2 - AD^2 + (AB - AD)^2$ $= AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$. Mais $AD = AC \times \cos.A$, (211); donc

$$BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos.A)}.$$

En appliquant cette solution à la fig. 3 où A est obtus, on verra que le dernier terme est positif, c'est-à-dire tel que la seule considération des regles (36) auroit conduit à l'employer dans le calcul.

228. Cette formule est assez pénible à calculer. Pour la rendre plus commode dans la pratique, substituons $1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2}A$ au lieu de cos.A, et nous aurons (15, 8)

$$BC = \sqrt{(AC \backsim AB)^2 + 4AB \times AC \times \sin.^2 \tfrac{1}{2}A}.$$

Actuellement par les transformations (207) nous aurons

$$\text{tang.}\, a = \frac{2\sin.\frac{1}{2}A}{AC \backsim AB} \sqrt{AB \times AC}\,; \text{ et}$$

$$BC = \frac{AC \backsim AB}{\cos.a}$$

La premiere de ces équations donnera la valeur d'un arc a, qui, employée dans la seconde, fera connoître aussitôt le côté cherché.

229. *Connoissant deux côtés et l'angle intercepté, trouver un des deux autres angles.*

Fig. 2. SOLUTION I. Nommons les données AB, AC, A; soit B l'angle cherché. Du troisieme angle C abaissons la perpendiculaire CD; nous aurons (210), $\text{tang.}B = \frac{CD}{BD}$. Mais (211), $CD = AC \times \sin.A$, et $BD = AB - AD = AB - AC \times \cos.A$. Donc

$$\text{tang.}B = \frac{AC \sin.A}{AB - AC \cos.A} = \frac{\text{tang.}A}{\frac{AB}{AC \cos.A} - 1}$$

La derniere expression nous apprend que dans ce problême il n'est pas nécessaire de connoître la valeur absolue des côtés donnés, mais seulement leur rapport $\frac{AB}{AC}$.

Si A est obtus, cos.A et tang.A seront négatifs (36). Mais si A étant aigu, on a $AC \cos.A > AB$, alors la valeur de tang.B sera

négative, ou, ce qui revient au même, B sera obtus. Soit dit au surplus, une fois pour toutes, qu'il suffit de donner les formules trigonométriques en supposant tous les angles aigus. Quand un angle donné est obtus, ou que la valeur d'une formule se trouve négative, il faut alors se ressouvenir des regles des signes (36) récapitulées et détaillées dans la table (42).

Si au lieu de B on cherche l'angle C; en abaissant la perpendiculaire du point B sur la ligne AC, on trouvera par la même méthode

$$\text{tang. C} = \frac{\text{AB sin.A}}{\text{AC} - \text{AB cos.A}}.$$

On obtiendroit le même résultat en changeant seulement dans la formule précédente B en C et C en B, regle générale et facile dans tous les cas.

230. Solution II. $\text{AB} : \text{AC} :: \text{sin.C} : \text{sin.B}$, (49). Donc $\text{AB} + \text{AC} : \text{AB} - \text{AC} :: \text{sin.C} + \text{sin.B} : \text{sin.C} - \text{sin.B} :: \text{tang.}\frac{1}{2}(\text{C} + \text{B}) : \text{tang.}\frac{1}{2}(\text{C} - \text{B})$, (II. 12e). Mais $\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{C} + \text{B}) = \text{tang.}\frac{1}{2}(180° - \text{A}) = \text{tang.}(90° - \frac{1}{2}\text{A}) = \text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}$, (7). Donc

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{AB} - \text{AC}}{\text{AB} + \text{AC}}; \text{ ou}$$

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{AB} + \text{AC}}{\text{AB} - \text{AC}}.$$

Pour calculer l'une ou l'autre de ces formules, on nommera AC le plus petit des deux côtés donnés. On connoît déja $\frac{\text{C} + \text{B}}{2} = 90° - \frac{1}{2}\text{A}$. Retranchant de cette quantité la valeur de $\frac{\text{C} - \text{B}}{2}$ donnée par la formule, on aura celle de B; en l'ajoutant, au contraire, on aura le plus grand angle C; et cette addition donne l'angle obtus, quand il l'est effectivement.

231. Si la valeur des côtés AB, AC étoit donnée en logarithmes et non en nombres naturels, comme il arrive dans les tables astronomiques pour les distances des planetes au soleil, alors on fera, (209)

$$\text{tang.}x = \frac{\text{AC}}{\text{AB}}; \text{ et on aura}$$

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}(\text{C} - \text{B}) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A tang.}(45° + x).$$

232. *Connoissant les trois côtés, trouver un angle.*

SOLUTION I. Soit A l'angle cherché. De la formule (227) on tire

$$\cos.A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \times AC}.$$

Il seroit facile de déduire de cette formule une nouvelle démonstration de la formule (53), par la marche que nous avons suivie pour démontrer la formule (51); et cette démonstration feroit voir pourquoi j'ai choisi l'une plutôt que l'autre des deux racines du second membre de l'équation dont la formule (53) est tirée.

L'expression ci-dessus de cos.A sera plus commode pour le calcul sous la forme suivante (15):

$$\cos.A = \frac{(AC + AB + BC)(AC + AB - BC)}{2\,AC \times AB} - 1.$$

233. SOLUTION II. En mettant, dans la formule que nous venons de trouver, $2\cos.^2\frac{1}{2}A - 1$ au lieu de cos.A, on aura

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{AC + AB + BC}{2} \times \left(\frac{AC + AB + BC}{2} - BC\right)}{AB \times AC}}$$

Cette solution me paroît la plus expéditive : cependant la suivante est plus usitée, parceque souvent on aime mieux chercher dans les tables le log. d'un sinus que celui d'un cosinus, et surtout parcequ'on n'a pas les petits angles avec exactitude par les cosinus.

234. SOLUTION III. Dans la premiere formule (232), mettons $1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}A$ au lieu de cos.A; nous aurons $2\sin.^2\frac{1}{2}A = 1 + \frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{2AB \times AC} = \frac{(BC + AC - AB)(BC + AB - AC)}{2\,AB \times AC}$. Donc

$$\sin.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AB\right)\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AC\right)}{AB \times AC}}$$

235. La table III, à la fin de cet Ouvrage, contient les solutions analytiques de toutes les questions que renferme ce problême: *Dans un triangle* ABC, *trois parties, dont au moins un côté, étant données, déterminer les autres parties.* Je dis *trois parties dont au moins un côté ;* j'en excepte un seul cas, celui de deux

angles connus, lesquels suffisent pour déterminer le troisieme angle.

On trouvera dans cette table quelques expressions compliquées, mais qui peuvent avoir des applications utiles, comme on en verra des exemples (334) relativement à quelques questions délicates *de minimis*.

Les formules 1e, 2e, 10e, 11e, 19e, 20e, 28e, 29e, 55e, 56e, 82e, 83e de la table III, naissent visiblement de la regle (49).

Les formules 30e, 39e, 48e, 57e, 66e, 75e, 84e, 93e, 102e, sont fondées sur les art. 51, 36, et donnent celles qui les suivent immédiatement, comme on le reconnoîtra si l'on se rappelle les formules (II. 1e, 3e, 5e).

Les formules 8e, 25e, 43e, 77e, 105e, sont démontrées aux articles 226, 227, 232, 229.

Les formules 9e, 17e, 18e, 26e, 27e, se démontrent comme la 8e; ou plutôt la 9e se tire de la 8e, en changeant dans celle-ci A en B et B en A; et par des changements semblables la 9e donne la 17e et la 26e, et la 8e donne la 18e et la 27e.

Les 7e et 16e se démontrent comme la 25e, ou se tirent de la 25e en changeant convenablement les lettres.

Les 70e et 97e se démontrent comme la 43e, ou s'en déduisent en changeant les lettres.

Les formules 50e, 51e se démontrent comme la 77e, ou la 51e se déduit de la 77e et la 50e de la 51e, en changeant les lettres. Il en est de même des 78e et 104e, comparées à la 105e.

La 3e est tirée de la 1e, en mettant dans celle-ci la valeur de sin.A, prise de la 31e, et divisant le numérateur et le dénominateur par sin.C. Les 4e, 12e, 13e, 21e et 22e, se tirent de même des 2e, 10e, 11e, 19e et 20e.

Les 5e, 6e, 14e, 15e, 23e et 24e sont faciles à tirer des formules 51e, 77e, 105e, 50e, 78e, 104e.

La 32e est tirée de la 28e, en substituant dans celle-ci la valeur de AB prise de la 7e. On déduira de la même maniere les formules 33e, 59e, 60e, 86e, 87e des 29e, 55e, 56e, 82e, 83e.

Si on observe que $\sin.A = \sqrt{(1 - \cos.^2 A)}$, on verra que les 34e, 61e, 88e proviennent des 43e, 70e, 97e.

La 35e se déduit de la 28e, en y introduisant la valeur de BC prise de la formule 26e. On déduira de même les formules 36e, 62e, 63e, 89e, 90e des formules 29e, 55e, 56e, 82e, 83e.

En faisant attention que $\cos.A = \sqrt{(1 - \sin.^2 A)}$, on reconnoîtra que les formules 37e, 38e, 64e, 65e, 91e, 92e proviennent des 28e, 29e, 55e, 56e, 82e, 83e.

En observant que $\cos.A = \frac{\sin.A}{\text{tang.}A}$, et divisant la 32e par la 50e, on aura la 41e. On trouvera de la même maniere les formules 42e, 68e, 69e, 95e, 96e.

La 44e est tirée de la 40e, en substituant dans celle-ci la valeur de sin.B prise de la 56e, et celle de cos.B prise de la 65e. Les 45e, 71e, 72e, 98e, 99e sont formées de même, en substituant respectivement dans les 40e, 67e, 94e, les valeurs contenues dans les 82e et 91e, 83e et 92e, 28e et 37e, 29e et 38e, 55e et 64e.

On sait que $\text{tang.}A = \frac{\sin.A}{\cos.A}$; donc en divisant la 35e par la 44e, on aura la 53e. Les 54e, 80e, 81e, 107e, 108e sont formées de la même maniere.

De plus $\text{tang.}A = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos.^2 A} - 1\right)}$; d'où il est facile de conclure que les 52e, 79e, 106e proviennent des 43e, 70e, 97e.

Enfin en divisant la 28e par la 37e, on a la 46e, et l'on forme de la même maniere les 47e, 73e, 74e, 100e, 101e.

236. La table IV, rejettée de même à la fin de cet Ouvrage, n'a pas besoin d'explication. J'ai cru devoir l'ajouter en faveur de ceux qui n'aiment pas les expressions dans lesquelles les parties du triangle sont désignées simplement par les lettres de l'alphabet. J'y ai réuni les solutions les plus commodes pour le calcul numérique.

On aura pu conclure des formules des tables III et IV, et en général de toutes les formules précédentes, que pour résoudre un triangle rectiligne obliquangle, il est nécessaire de connoître trois des

des parties qui le composent, et que l'une au moins de ces parties soit un côté par la même raison que celle donnée (213). Telle est la regle générale. Nous allons cependant donner des solutions pour des combinaisons différentes.

237. *Connoissant deux côtés* AB, AC, *et la différence* (C $\backsim$ B) *des angles opposés, résoudre le triangle.* Fig. 7.

De la seconde formule (230), dans laquelle, pour plus de généralité, je substitue $\backsim$ à —, je déduis l'équation suivante :

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A} = \text{cot.}\tfrac{1}{2}(\text{C} \backsim \text{B}) \times \frac{\text{AB} \backsim \text{AC}}{\text{AB} + \text{AC}} ; \text{ ou}$$

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix}\text{demi-angle compris}\\ \text{entre les côtés donnés}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{ diff. donnée} \times \text{diff. des côtés donnés}}{\text{somme des côtés donnés}}$$

L'angle A étant connu, la détermination des autres parties du triangle n'a plus de difficulté.

238. *Connoissant les angles et la somme* (AB + AC), *ou la différence* (AB $\backsim$ AC) *de deux côtés, résoudre le triangle.*

De l'équation précédente se déduisent les suivantes :

$$(\text{AB} \backsim \text{AC}) = (\text{AB} + \text{AC})\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A}\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{C} \backsim \text{B})$$
$$(\text{AB} + \text{AC}) = (\text{AB} \backsim \text{AC})\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A}\ \text{cot.}\tfrac{1}{2}(\text{C} \backsim \text{B}), \text{ ou}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Diff. des côtés dont}\\ \text{la somme est donnée}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{som. de ces côtés} \times \text{tang.}\frac{1}{2}\text{ angle compris}}{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{ diff. des deux autres angles}}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Som. des côtés dont}\\ \text{la différ. est donnée}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{diff. de ces côtés} \times \text{cot.}\frac{1}{2}\text{ angle compris}}{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{ diff. des deux autres angles}}$$

L'une ou l'autre de ces deux formules donnera la valeur absolue de AB et de AC.

239. *Connoissant un angle* A, *le côté opposé* BC, *et la somme* (AB + AC), *ou la différence* (AB $\backsim$ AC) *des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

En multipliant par $\frac{\text{BC}}{\text{BC}} = 1$ le premier membre de la seconde équation (238), la réduisant en proportion, et se rappellant les formules (I. 31°, 32°), on a

$$\frac{\text{BC}}{\text{BC}} \cdot \frac{(\text{AB} \backsim \text{AC})}{(\text{AB} + \text{AC})} :: \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}\text{A}}{\text{sin.}\frac{1}{2}\text{A}} \cdot \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{C} \backsim \text{B})}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{C} \backsim \text{B})}$$

Or je n'ai qu'à démontrer que les numérateurs sont en proportion ;

il s'ensuivra que les dénominateurs sont aussi en proportion (13): et ces deux analogies feront connoître la valeur de chacune des quatre parties inconnues du triangle. Soient, par exemple, BC, A, et (AB ∽ AC) les choses connues; on trouvera, par la proportion des numérateurs, la valeur de $\frac{1}{2}$(C ∽ B); on emploiera cette valeur dans l'analogie des dénominateurs, de laquelle alors on déduira la valeur de (AB + AC). Connoissant ainsi les sommes et les différences des côtés AB et AC, et des angles opposés B et C, on obtiendra leur valeur absolue de la maniere indiquée (230).

Démontrons l'analogie des numérateurs. Puisque (AB ∽ AC) $= \frac{BC \sin.C \backsim BC \sin.B}{\sin.A}$, (III. 1e, 11e), on aura $BC = \frac{(AB \backsim AC) \sin.A}{\sin.C \backsim \sin.B} = \frac{(AB \backsim AC) \sin.(C+B)}{\sin.C \backsim \sin.B}$ = (I. 6e, II. 22e) $\frac{(AB \backsim AC) \, 2 \sin.\frac{1}{2}(C+B) \cos.\frac{1}{2}(C+B)}{2 \sin.\frac{1}{2}(C \backsim B) \cos.\frac{1}{2}(C+B)} = \frac{(AB \backsim AC) \sin.\frac{1}{2}(C+B)}{\sin.\frac{1}{2}(C \backsim B)}$. Mais $\sin.\frac{1}{2}(C+B) = \sin.\frac{1}{2}(180° - A) = \cos.\frac{1}{2}A$. Donc $BC = \frac{(AB \backsim AC) \cos.\frac{1}{2}A}{\sin.\frac{1}{2}(C \backsim B)}$; équation qui donne la proportion cherchée.

On aura donc, en réduisant en équations les deux analogies que nous venons de démontrer,

$$\sin.\tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \frac{(AB \backsim AC) \cos.\frac{1}{2}A}{BC},$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(C \backsim B) = \frac{(AB + AC) \sin.\frac{1}{2}A}{BC}; \text{ ou}$$

$$\sin.\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}\text{ différence des}\\ \text{angles inconnus}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{diff. donnée} \times \cos.\frac{1}{2}\text{ angle donné}}{\text{côté donné}},$$

$$\cos.\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}\text{ différence des}\\ \text{angles inconnus}\end{matrix}\right\} = \frac{\text{som. donnée} \times \sin.\frac{1}{2}\text{ angle donné}}{\text{côté donné}}$$

240. *Connoissant un angle, un côté adjacent, et la somme des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

Fig. 9. Soient les choses connues B, BC et (AB + AC). Que l'on prolonge AB de maniere qu'on ait BD = (AB + AC), ou qu'on ait AD = AC; on connoîtra dans le triangle BCD les deux côtés BC, BD, et l'angle intercepté B; et l'on trouvera par la solution (230) la valeur de $\frac{1}{2}$(BCD — D), qui est celle

de $\frac{1}{2}$ ACB, puisque D = ACD par la construction. Cette valeur sera exprimée par l'équation suivante :

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{ACB} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{B} \times \frac{(\text{AB} + \text{AC}) + \text{BC}}{(\text{AB} + \text{AC}) - \text{BC}}, \text{ ou}$$

$$\text{cot.}\left\{\begin{matrix}\text{demi-angle inconnu}\\ \text{adjac. au côté connu}\end{matrix}\right\} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ angle donné} \times \frac{\text{somme donnée} + \text{côté donné}}{\text{somme donnée} - \text{côté donné}}$$

241. *Connoissant un angle, un côté adjacent, et la différence des deux autres côtés, résoudre le triangle.*

Soient les choses connues B, BC et (AB — AC). Qu'on prenne BD = (AB — AC), ou qu'on fasse AD = AC. Dans le triangle BCD on trouvera, comme dans le cas précédent, la valeur de $\frac{1}{2}$(BDC — BCD). Mais BDC = 180° — ADC, BCD = ACB — ACD, et ADC = ACD par la construction. Donc la valeur trouvée est celle de 90° — $\frac{1}{2}$ ACB. Donc on tirera la valeur de ACB de l'équation suivante : Fig. 10

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ACB} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{B} \times \frac{\text{BC} + (\text{AB} - \text{AC})}{\text{BC} - (\text{AB} - \text{AC})}, \text{ ou}$$

$$\text{tang.}\left\{\begin{matrix}\text{demi-angle inconnu}\\ \text{adjac. au côté connu}\end{matrix}\right\} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ ang. donné} \times \frac{\text{côté donné} + \text{diff. donnée}}{\text{côté donné} - \text{diff. donnée}}$$

242. Passons au calcul des SEGMENTS. Nous prévenons que dans un triangle quelconque ABC, nous nommons *base*, selon l'usage, le côté AB sur lequel on abaisse une perpendiculaire CD ; et *angle vertical* l'angle C, duquel on abaisse cette perpendiculaire. Fig. 2 et 3.

Trouver les valeurs des segments de la base AB *du triangle* ABC.

Soient *donnés* d'abord *les trois côtés*. Puisque $\text{CD}^2 = \text{AC}^2 - \text{AD}^2 = \text{BC}^2 - \text{BD}^2$, il s'ensuit que $\text{AC}^2 \backsim \text{BC}^2 = \text{AD}^2 \backsim \text{BD}^2$, ou que (AC $\backsim$ BC) (AC + BC) = (AD $\backsim$ BD) (AD + BD). Si la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, (AD + BD) = AB ; si elle tombe en dehors, (AD $\backsim$ BD) = AB.

Donc, pour les deux cas,

$$\text{AD} \overset{\backsim}{+} \text{BD} = \frac{(\text{AC} \backsim \text{BC})\,(\text{AC} + \text{BC})}{\text{AB}}, \text{ ou}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{la somme ou}\\ \text{la différence}\end{matrix}\right\} \text{des segments} = \frac{\text{som. des deux côtés} \times \text{leur diff.}}{\text{la base}}$$

Dans l'usage de cette formule il n'est nécessaire ni de faire attention au double signe, ni de savoir si la perpendiculaire tombe

en dedans ou en dehors. La moitié de la valeur donnée par la formule, ajoutée à la moitié de la base, donnera toujours le plus grand segment, et la différence des deux moitiés le plus petit. Cette remarque s'applique aussi aux solutions suivantes ; et nous en donnerons un exemple (250).

243. Soient *donnés* maintenant *les trois angles et la base* AB.

Fig. 2. Par la regle (210) on a CD = BD × tang.B = AD × tang.A. Donc BD : AD :: tang.A : tang.B, et BD + AD : BD ∽ AD :: sin.(A + B) : sin.(A ∽ B), (II. 10°).

Fig. 3. Si la perpendiculaire tombe en dehors, on a BD + AD : BD — AD :: sin.(CAD + B) : sin.(CAD — B). Mais CAD + B = 180° — A + B = 180° — (A — B), et CAD — B = 180° — (A + B). Donc on a BD + AD : BD — AD :: sin.(A — B) : sin.(A + B).

Donc en général

$$BD \overset{\sim}{+} AD = \frac{AB \times \sin.(A \sim B)}{\sin.(A + B)}, \text{ ou (III. 84°)}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{la diff. ou}\\ \text{la somme}\end{matrix}\right\} \text{des segments} = \frac{\text{la base} \times \text{sin. diff. des ang. adjacents}}{\text{sin. de l'angle vertical}}$$

244. *Trouver les valeurs des segments d'un côté, formés par une ligne qui divise également l'angle opposé.*

Fig. 10. Soit BCD = ACD, et soient *donnés* dans le triangle ABC *les angles et le côté divisé* AB ; *ou* encore soient donnés *les trois côtés.*

Par la regle (49) on a $CD = \frac{BD \sin.B}{\sin.BCD} = \frac{AD \sin.A}{\sin.ACD}$. Donc BD : AD :: sin.A : sin.B, et BD + AD : BD ∽ AD :: tang.$\frac{1}{2}$(A + B) : tang.$\frac{1}{2}$(A ∽ B), (II. 12°). Donc

$$BD \sim AD = \frac{AB \text{ tang.} \frac{1}{2}(A \sim B)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(A + B)} = \frac{AB\,(BC \sim AC)}{BC + AC}, \text{ (230) ; ou}$$

$$\text{diff. des segments} = \frac{\text{côté divisé} \times \text{tang.} \frac{1}{2} \text{ diff. des ang. adjacents}}{\text{tang.} \frac{1}{2} \text{ somme de ces angles}}$$

$$\text{diff. des segments} = \frac{\text{côté divisé} \times \text{diff. des deux autres côtés}}{\text{somme de ces deux côtés}}$$

245. *Trouver les valeurs des segments de l'angle vertical.*

Soient *donnés l'angle vertical* ACB *et les deux côtés adjacents*

AC, BC. On a (211), $CD = AC \times \cos.ACD = BC \times \cos.BCD$; donc $BC : AC :: \cos.ACD : \cos.BCD$; et $BC + AC : BC \backsim AC ::$ (II. 13°) $\cot.\frac{1}{2}(BCD + ACD) : \text{tang.}\frac{1}{2}(BCD \backsim ACD) ::$ (I. 32°) $\cot.\frac{1}{2}(BCD \backsim ACD) : \text{tang.}\frac{1}{2}(BCD + ACD)$. Donc en général pour les deux cas de la perpendiculaire située en dedans ou en dehors, Fig. 2 et 3.

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,BCD \overset{\backsim}{+} ACD = \cot.\tfrac{1}{2}ACB \times \frac{BC \backsim AC}{BC + AC}\text{ ; ou}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\text{diff. ou}\\ \text{somme}\end{matrix}\right\}\text{ des segments} = \cot.\tfrac{1}{2}\text{ang. vertical} \times \frac{\text{diff. des côtés adjac.}}{\text{somme de ces côtés}}$$

246. *Trouver les valeurs des segments d'un angle, formés par une ligne qui partage également le côté opposé.*

Supposons $AD = BD$, et soient *donnés l'angle divisé* ACB *et les deux côtés adjacents* AC, BC. Fig. 19

On a (49), $CD = \frac{BD \sin.B}{\sin.BCD} = \frac{AD \sin.A}{\sin.ACD}$; et par conséquent $\sin.BCD : \sin.ACD :: \sin.B : \sin.A :: AC : BC$. Donc aussi $AC + BC : AC \backsim BC :: \text{tang.}\frac{1}{2}(BCD + ACD) : \text{tang.}\frac{1}{2}(BCD \backsim ACD)$, (II. 12°); et

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(BCD \backsim ACD) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}ACB \times \frac{AC \backsim BC}{AC + BC}\text{ ; ou}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{diff. des segments} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{ang. divisé} \times \frac{\text{diff. des côtés adjac.}}{\text{somme de ces côtés}}.$$

247. *Résoudre un triangle isoscele.*

Le triangle isoscele se résout comme les triangles rectangles, au moyen d'une perpendiculaire qui partage en deux parties égales la base et l'angle vertical. Les deux analogies suivantes donnent la solution de tous les cas.

Un côté est à la moitié de la base, comme le rayon est au cosinus d'un angle à la base, ou *comme le rayon est au sinus de la moitié de l'angle vertical.*

Il est facile de vérifier ces proportions sur une figure avec le secours de la table (213).

248. Les exemples suivants pourront diriger pour l'usage des formules que nous avons données dans ce Chapitre.

Fig. 3. Soit AC une distance de 585 pieds 5 po. 6 lig., AB une autre distance de 55 pi. 3 po. 4 lig.; soit aussi connu CAB de 143° 36′, et soit BC une distance cherchée.

Ce cas est celui de la formule (IV. 3°). Pour prendre les logarithmes des deux distances connues, je convertis d'abord ces distances en lignes, et j'ai AC = 84306 lignes, et AB = 7960 lig. Voici le calcul de la formule.

log. AC	= 4,9258585
log. AB	= 3,9009138
somme	8,8267716
demi-somme	4,4133858
log. 2	= 0,3010300
log. sin. ½CAB = log. sin. 71° 48′	= 9,9777108
compl. log. (AC — AB) = compl. log. 76346	= 5,1172137
somme ou log. tang. a	= 9,8093403
(200), compl. log. cos. a	= 0,0754710
log. (AC — AB) pris de son compl. ci-dessus	= 4,8827863
somme ou log. BC	= 4,9582573

Et par conséquent BC = 90836 lig.

On résout ordinairement ce problême en cherchant d'abord les deux angles inconnus, par la formule (IV. 4°), et ensuite le côté par la formule (IV. 1°). On a alors huit log. à chercher, et sept seulement par notre méthode, attendu que l'usage continuel que l'on fait du log. de 2 le fixe nécessairement dans la mémoire.

249. Employons actuellement les mêmes valeurs des trois côtés, pour donner un exemple de la formule (IV. 5°); et cherchons un angle, par exemple B. Voici le calcul: nous y employons 90835,86 pour la valeur de BC, valeur prise ci-dessus, mais avec toute la précision que peuvent donner les logarithmes, afin d'avoir l'angle B aussi exactement que nous l'aurions eu par la formule (IV. 4°) avec les données de l'article précédent.

log.$\frac{1}{2}$ somme des trois côtés = log.91550,93 = 4,9616627
log.($\frac{1}{2}$ somme — AC) = log.7244,93 = 3,8600342
compl.log.AB = 6,0990869.
compl.log.BC = 5,0417427

somme ou log. cos.^{2} $\frac{1}{2}$B = 9,9625265
demi-somme ou log.cos.$\frac{1}{2}$B = 9,9812632

Ce logarithme répond à cos.16° 42′ 34″ $\frac{1}{2}$. Donc l'angle cherché B = 33° 25′ 9″. Le lecteur pourra s'exercer à le chercher par les formules (IV. 4e et 6e). On observera que l'usage du complément arithmétique a dispensé des soustractions de log.AB et de log.BC.

250. On demande la largeur AD d'un fleuve qui passe au pied d'une tour CD. Sur le bord A on prendra, avec des instruments, l'angle DAC, que je suppose de 27° 42′; on passera à un autre point quelconque B, dans le même plan vertical que A et C; on relevera de même l'angle CBA, que je suppose de 16° 23′, et on mesurera la distance horizontale AB, que je suppose de 125 toises. Ces données suffisent pour trouver la valeur de AD, qui est le plus petit segment de la base AB du triangle ACB, prolongée jusqu'à la perpendiculaire CD. Voici le calcul de la formule (243); pour plus de commodité, je ne chercherai que la moitié de sa valeur; ce qu'on fera également pour toutes les autres semblables. Fig.11

log.sin.(CAB — B) = log.sin.135° 55′ = 9,842424
compl.log.sin.(CAB + B) = compl.log.sin.168°41′ = 0,707232
log.$\frac{1}{2}$AB = log.62,5 = 1,795880

somme ou log.$\frac{1}{2}$(BD $\overset{S}{+}$ AD) = 2,345536

Donc $\frac{1}{2}$(BD $\overset{S}{+}$ AD) = 221,6
et retranchant $\frac{1}{2}$AB, ou 62,5

on a pour le petit segment 159,1.

Donc la largeur cherchée ou AD = 159 toises à très peu près.

CHAPITRE X.

Des analogies différentielles des triangles rectilignes.

251. DANS les deux Chapitres précédents nous avons donné les solutions d'un triangle rectiligne. Considérons à présent deux triangles qui ont deux parties communes, ou, ce qui revient au même, un triangle qui, conservant deux parties constantes, éprouve un changement dans les quatre autres. Nous chercherons à déterminer par des analogies, qu'on nomme alors *analogies différentielles*, le rapport entre le changement d'une partie du triangle et le changement d'une autre partie; et cette recherche appliquée aux cas où une seule partie est constante, et où même aucune ne l'est, complettera les solutions de tous les problêmes déterminés que peut résoudre la Trigonométrie rectiligne. Je traiterai ce sujet d'une maniere que je crois absolument neuve; je construirai les analogies dans la plus grande généralité, de sorte qu'elles soient applicables rigoureusement à toutes sortes de variations, de quelque grandeur qu'elles soient. Je nommerai ces analogies *différentielles finies;* j'en déduirai celles qu'on donne communément, qui ne sont exactes que pour les variations infiniment petites, et qui déterminent aussi, mais par approximation, les variations finies et très petites; je nommerai *infinitésimales* ces dernieres analogies.

Fig. 12 Soient deux triangles ABC, ABD, ayant le côté AB et l'angle A communs; ou soit un triangle ABC qui se convertisse en ABD, de sorte qu'*un côté* AB *et un angle adjacent* A *restent constants.*

Le côté AC, en devenant AD, augmente d'une quantité CD, que nous appellerons δAC, à la maniere du calcul différentiel. On aura de même BD = BC + δBC. L'angle B, en devenant ABD, augmente aussi d'une quantité CBD, que nous appellerons δB; et comme CBD est de même la diminution de l'angle C, qui devient

vient D, puisqu'on sait que l'angle extérieur C = D + CBD, on aura δB = δC, en observant que ces variations ont lieu en sens contraire.

Cela posé, le triangle BCD donne (49), CD : sin.CBD :: BC : sin.D :: BD : sin.C. Donc, en substituant les dénominations adoptées,

$$\delta AC : \left\{ \begin{matrix} \text{sin.}\delta B \\ ou\ -\text{sin.}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \text{sin.}(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \text{sin.}C.$$

252. Dans l'usage de cette formule et des autres formules différentielles finies qui suivront, il faut employer les expressions sin.(C — δC), (BC + δBC), et autres semblables, en donnant aux *différences* le signe qui convient selon les cas; ce qu'il est toujours facile de reconnoître dans la Trigonométrie rectiligne. Il est clair, par exemple, à la seule inspection de la figure, que les changements de AC et de C doivent toujours se faire en sens contraire; et c'est ce que nous indiquons en donnant des signes contraires à δAC et à sin.δC, (154). Si l'angle C augmentoit, l'analogie deviendroit — δAC : — sin.δB *ou* + sin.δC :: BC : sin.(C + δC) :: BC — δBC : sin.C. Nous verrons de plus (266), que le signe de δBC dépend aussi de l'espece de l'angle C.

253. Si l'on suppose que les variations soient infiniment petites, on pourra (140) mettre δB au lieu de sin.δB; (133), sin.C au lieu de (sin.C $\mp$ δC), et BC au lieu de (BC $\pm$ δBC); alors la formule (251) deviendra

$$\delta AC : \delta B \ ou\ -\delta C :: BC : \text{sin.}C.$$

Et, à l'exception du signe négatif que l'on omet, telle est la forme ordinaire sous laquelle on donne cette analogie.

Avant de construire d'autres analogies différentielles, nous allons donner un exemple qui fera pressentir l'utilité de ces formules; il nous servira de plus à reconnoître les limites entre lesquelles on peut, sans erreur dans le calcul, faire usage des analogies infinitésimales, lorsque les variations sont petites, mais cependant finies et non pas infiniment petites.

Fig. 13 254. Soit AC une hauteur à mesurer par la méthode (215). A quelle distance doit se placer l'Observateur, pour que l'erreur que peut commettre l'instrument dans la mesure de l'angle ABC produise la moindre erreur possible dans le calcul de la hauteur ?

Supposons que l'erreur dans la mesure soit en *plus*, que l'instrument donne, par exemple, ABD au lieu de ABC; la hauteur calculée sera AD au lieu de AC. On voit par la figure que ces erreurs n'influent ni sur le côté AB, ni sur l'angle A qui demeurent constants. (Le raisonnement seroit le même si l'erreur étoit en *moins*). Appellant donc δB l'erreur dans l'angle observé, et δAC l'erreur dans la hauteur, on aura (253), $\delta AC = \frac{BC \times \delta B}{\sin.C}$, ou $\frac{\delta AC}{\delta B} = \frac{BC}{\sin.C}$. Or dans ce problême il s'agit de trouver non la valeur absolue de δAC et de δB, mais seulement quelle doit être, dans un cas quelconque, la distance AB pour que le rapport $\frac{\delta AC}{\delta B}$ ait la moindre valeur possible. Pour y parvenir, éliminons une des quantités BC et C, dépendantes l'une et l'autre de la position cherchée du point B. Dans ce cas-ci, $A = 90°$; on a donc (213, 8°), $BC = \frac{AC}{\cos.C}$; et par conséquent $\frac{\delta AC}{\delta B} = \frac{AC}{\sin.C \cos.C} = \frac{2AC}{\sin.2C}$, (I. 6°). Il est évident que le numérateur 2 AC est une quantité constante qui ne dépend ni de l'erreur δB, ni de la distance AB. Donc la moindre valeur de $\frac{\delta AC}{\delta B}$ aura lieu lorsque sin.2 C sera le plus grand possible, c'est-à-dire, quand on aura $C = 45°$. L'Observateur se placera donc, autant qu'il se pourra, à une distance AB = AC.

Pour démontrer que cette conclusion est rigoureuse, quelle que soit la valeur de δB, quoique d'ailleurs l'équation $\delta AC = \frac{2AC \times \delta B}{\sin.2C}$ ne puisse donner la valeur exacte de δAC que lorsque δB est infiniment petit, ainsi que nous le verrons par un exemple numérique (258); prenons l'analogie différentielle finie (251), $\delta AC : \sin.\delta B :: BC : \sin.(C - \delta C)$, qui donne, en substituant à BC sa valeur ci-dessus, $\frac{\delta AC}{\sin.\delta B} = \frac{AC}{\sin.(C - \delta C) \cos.C} =$

$\frac{AC}{\sin.(C-\delta C)\sin.ABC} = \frac{2AC}{\cos.(C-\delta C-B)-\cos.(C-\delta C+B)}$, (II. 16°). Mais $B = 90° - C$, et $\delta C = \delta B$, (251); ensorte qu'on a $\cos.(C-\delta C+B) = \sin.\delta B$. Donc $\frac{\delta AC}{\sin.\delta B} = \frac{2AC}{\cos.(C-\delta C-B)-\sin.\delta B}$, expression dans laquelle on voit que la moindre valeur de $\frac{\delta AC}{\sin.\delta B}$ a lieu lorsque $\cos.(C-\delta C-B)$ est le plus grand possible, c'est-à-dire quand $C = B + \delta C = B + \delta B$. Mais comme on ne sait si l'erreur δB est commise par l'instrument en plus ou en moins, et que dans le second cas la moindre valeur cherchée a lieu lorsque $C = B - \delta B$, il faut prendre le milieu pour satisfaire aux deux cas. On fera donc $C = B$, et l'analogie rigoureuse nous donne la même conséquence que la formule infinitésimale.

255. Qu'on observe avec quelle facilité le calcul différentiel résout les problêmes de cette espece. Je dis *le calcul différentiel*; car la formule (253), et toutes les autres formules infinitésimales que nous trouverons ci-après, peuvent s'obtenir en différentiant les équations trigonométriques qui contiennent les constantes et les variables dont il s'agit dans les différents cas. Dans notre exemple, les constantes sont A et AB, les variables que nous considérons sont AC et B; il faut donc différentier l'équation (IV. 77°), en l'écrivant, pour plus de commodité, comme il suit: $AB \times \text{tang.}B - AC \cos.A \text{ tang.}B = AC \sin.A$. Or la différentielle de AC est δAC, et $\delta \text{tang.}B = \frac{\delta B}{\cos.^2 B}$, (II. 39°). Donc (131,134), $\frac{AB\,\delta B}{\cos.^2 B} - \cos.A \text{ tang.}B\,\delta AC - AC \cos.A \times \frac{\delta B}{\cos.^2 B} = \sin.A\,\delta AC$, ou $\delta B\left(\frac{AB - AC\cos.A}{\cos.^2 B}\right) = \delta AC(\sin.A + \cos.A \text{ tang.}B)$. Multipliez l'équation par cos.B; mettez $\frac{AC \sin.A}{\text{tang.}B}$ au lieu de $AB - AC \times \cos.A$, (IV. 77°), et BC au lieu de $\frac{AC \sin.A}{\sin.B}$, (IV. 19°), et enfin sin.C au lieu de (sin.A cos.B + sin.B cos.A), (III. 85°); l'équation deviendra $\delta B \times BC = \delta AC \times \sin.C$; d'où se déduit l'analogie (253).

256. Essayons maintenant de donner une valeur finie à δB

dans l'exemple (254). Supposons que l'instrument puisse commettre une erreur de $30' = \delta B$; que B ait été observé de 45°, et que la distance mesurée AB soit de 83 pieds; dans ce cas, $AB = AC$, et $\sin.2C = 1$. Donc $\delta AC = \frac{2AC \times \delta B}{\sin.2C} = 2 \times 83 \times 30'$. Pour ce calcul, il semble qu'il eût été mieux de conserver $\sin.\delta B$ comme dans la formule rigoureuse (251), puisqu'on a des tables de logarithmes des sinus; tandis que pour avoir $\log.\delta B$, il faudroit prendre dans la table (AA) la valeur de l'arc δB, puis chercher le log. de cette valeur entre les logarithmes des nombres. Mais comme les tables de ces derniers logarithmes portent ordinairement en tête de chaque page la réduction des nombres en degrés, minutes et secondes, il est très facile de prendre, par exemple, log. 1800 au lieu de log.($30' = 1800''$), puis d'ajouter à log. 1800 le log. de l'arc d'une seconde, que nous avons préparé (192), et dont il est bon de retenir de mémoire les premiers chiffres; on aura le logarithme cherché de l'arc de $30'$, puisqu'il est évident que l'arc de $1800'' = 1800 \times$ l'arc de $1''$.

En général cette opération est plus courte que celle de chercher le logarithme du sinus d'un petit arc, sur-tout quand cet arc est exprimé en minutes, secondes et dixiemes, comme il arrive continuellement dans l'usage des analogies différentielles.

257. Faisons maintenant le calcul de l'équation $\delta AC = 2 \times 83 \times 30'$.

$$\begin{aligned} \log.(2 \times 83 = 166) &= 2,220108 \\ \log. 1800 &= 3,255273 \\ (192), \log. 1'' &= 4,685575 \\ \text{somme ou } \log.\delta AC &= 0,160956 \end{aligned}$$

Le nombre correspondant à ce logarithme est 1,4486; une erreur de $30'$ dans la mesure de l'angle B produit donc sur la hauteur cherchée AC une erreur de 1,4486 pieds.

258. Ce résultat ne peut pas être absolument exact, parcequ'un arc de $30'$ n'est pas infiniment petit. En employant la formule

différentielle finie (251), et supposant que l'angle ait été relevé plus grand qu'il n'est en effet, ainsi que le donne la figure, (si au contraire il eût été relevé plus petit qu'il ne l'est, il faudroit (252) changer les signes des *différences*), on a $\delta AC = BC \times \frac{\sin.\delta B}{\sin.(C-\delta C)} = \frac{AB}{\cos.B} \times \frac{\sin.\delta B}{\sin.D} = \frac{AB \sin.\delta B}{\cos.B \cos.(B+\delta B)} = \frac{83 \times \sin.30'}{\cos.45° \cos.45° 30'}$. Donc $\log.\delta AC = 0,164773$, et $\delta AC = 1,4614$. En comparant ce résultat avec le précédent, on voit que l'erreur de la formule infinitésimale est de 0,0128, ou de $\frac{1}{80}$ de pied à très peu près; ce qui ne mérite aucune attention; mais comme cette erreur seroit plus grande à mesure que B, AB et δB seroient plus grands qu'on ne les a supposés dans cet exemple, il importe de savoir quand elle peut se négliger.

259. Dans le cas où δB excéderoit un degré ou environ, une premiere cause d'erreur seroit d'avoir employé δB au lieu de $\sin.\delta B$: mais, de 0° à 1°, il est aisé de voir, en comparant les logarithmes des sinus à ceux des arcs, que la différence est insensible dans les calculs ordinaires, sur-tout si l'on cherche une petite quantité. Par exemple, la différence de $\log.30'$ à $\log.\sin.30'$ n'est que de 0,000006. Or pour le cas que nous venons de calculer (257), cette quantité de plus ou de moins dans le log. de δAC n'altere en rien la valeur 1,4486 de δAC. Prenons donc pour regle générale dans les analogies différentielles, qu'on peut employer sans scrupule δA, δB, &c., au lieu de $\sin.\delta A$, $\sin.\delta B$, &c., toutes les fois que l'arc δA, l'arc δB, &c. ne sera pas plus grand que d'un degré.

Il est clair que δA pourra même aller jusqu'à 2°, lorsque dans les formules infinitésimales on aura $\frac{1}{2}\delta A$ au lieu de $\sin.\frac{1}{2}\delta A$. Mais quand on aura $\frac{1}{2}\delta A$ au lieu de $\tang.\frac{1}{2}\delta A$, et quand on aura 1 au lieu de $\cos.\frac{1}{2}\delta A$, il faudra, pour renfermer l'erreur dans les mêmes limites, que, dans le premier cas, δA soit moindre que de 1° 30', et que dans le second il ne soit pas plus grand que de 1° 10'; ce qu'il est facile de comprendre en examinant les tables.

260. Une seconde cause d'erreur et la seule qui ait influée dans le calcul (257), vient de ce que nous avons employé 2 au lieu de l'expression exacte $\frac{1}{\cos.45^\circ \cos.45^\circ 30'}$, (258); ce qui revient au même que d'avoir employé, dans le dénominateur, cos.45° au lieu de cos.45° 30′, puisque cos.^{2}45° $= \frac{1}{2}$, (44). Il suffit d'ouvrir les tables pour voir que la différence d'un cosinus à un autre pour un intervalle δB varie beaucoup à raison des différentes grandeurs de B. Soit par exemple δB $=$ 30′; si B $=$ 10°, on a cos.10° — cos.10° 30′ $=$ 0,0015528. Mais si B $=$ 80°, on a cos.80° — cos.80° 30′ $=$ 0,0086006. Donc en général lorsque dans les analogies différentielles on emploie cos.A au lieu de cos.(A $\pm$ δA), l'erreur est d'autant plus grande que A approche plus de 90°. On voit de même par les tables, que si l'on emploie 1°. sin.A au lieu de sin.(A $\pm$ δA), 2°. tang.A au lieu de tang.(A $\pm$ δA); 3°. cot.A au lieu de cot.(A $\pm$ δA), l'erreur est d'autant plus grande, dans le premier et le troisieme cas, que A est plus petit; et dans le second cas, d'autant plus que A approche davantage de 90°.

Au surplus toutes les fois qu'on jugera l'erreur telle qu'on ne croira pas devoir la négliger, les formules différentielles finies que je donne, serviront à corriger le résultat des formules infinitésimales, ou à faire immédiatement les calculs avec une précision rigoureuse. Il sera bien de faire attention à l'erreur provenant de la seconde cause, lorsque δA ou $\frac{1}{2}\delta$A ne sera pas moindre que de 30′. Cette erreur est toujours la plus considérable.

261. Pour avoir le log. d'un arc, par exemple le log. de 30′, nous avons ajouté (256) log.1800 à log. de l'arc de 1″; ce qui revient au même que de diviser 1800 par le nombre des secondes contenues dans l'arc égal en longueur au rayon; et c'est ce dernier parti qu'on prend communément. En effet si l'on nomme R″ ce nombre de secondes, puisque 1800 $\times$ l'arc de 1″ $=$ l'arc de 1800″, par la même raison R″ $\times$ l'arc de 1″ $=$ l'arc R″ $=$

$R = 1$. Donc l'arc de $1'' = \frac{1}{R''}$, et par conséquent 1800 × l'arc de $1'' = \frac{1800}{R''}$.

262. Par l'équation R'' × l'arc de $1'' = 1$, on a la valeur de $R'' = \frac{1}{\text{l'arc de } 1''}$. Le log. du rayon exprimé en secondes, n'est donc autre chose que le complément arithmétique de log.$1''$, (192); donc

$$\log.R'' = 5,31442\ 51331\ 76459\ 48047.$$

Le nombre correspondant à ce log. est 206264,8 +. Tel est le nombre des secondes contenues dans l'arc égal au rayon ; par conséquent cet arc est de $57° 17' 44'' 48'''$, &c. Il est facile de le tirer de la table (AA), et de pousser plus loin l'approximation.

En retranchant de log.R'' le logarithme de 60, pris dans la table (BB), on a le logarithme de l'arc égal au rayon et exprimé en minutes, ou

$$\log.R' = 3,53627\ 38827\ 92815\ 84796.$$

En retranchant encore de ce logarithme celui de 60, on a le logarithme de l'arc égal au rayon et exprimé en degrés, ou

$$\log.R° = 1,75812\ 26324\ 09172\ 21545.$$

Au moyen de ces trois logarithmes, on trouve, sans aucun travail, le logarithme d'un arc de la table (AA). Qu'on veuille, par exemple, le log. de l'arc de 40°. En prenant, parmi les logarithmes des nombres naturels, celui de 40, et y ajoutant le complément de log.$R°$, on aura le logarithme cherché. Si l'arc eût été, par exemple, de $40° 10' = 2410'$, on auroit ajouté à log.2410 le complément de log.R'. Enfin si l'arc eût été, par exemple, de $40° 10' 9'',8 = 144609'',8$; en prenant entre les logarithmes des nombres naturels celui de 144609,8 et y ajoutant le complément de log.R'', on auroit eu le logarithme cherché.

263. Comme il est important de ne pas oublier d'employer R'' dans le calcul des analogies différentielles infinitésimales, nous l'insérerons dans toutes ces analogies, même dans celle qui a été

donnée (253), que nous répéterons, ainsi que l'analogie (251), pour les rapprocher de toutes celles que nous allons trouver.

(251), $\delta AC : \left\{ \begin{matrix} \text{sin.}\delta B \\ ou \\ -\text{sin.}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \text{sin.}(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \text{sin.}C$

(253), $\delta AC : \frac{\delta B}{R''}$ *ou* $- \frac{\delta C}{R''} :: BC : \text{sin.}C.$

Il est clair que par cette derniere analogie, quand δB sera la chose cherchée, on aura $\delta B = \frac{\delta AC \times \text{sin.}C \times R''}{BC}$, et qu'ainsi on aura δB, δC, &c. en minutes et secondes, par les tables des log. des nombres, (256). Il ne doit plus rester actuellement de difficulté sur l'usage de la quantité R″; on pourra faire l'épreuve de ce que nous venons d'en dire, en traitant δB comme l'inconnue dans l'exemple (257). Poursuivons la formation des analogies différentielles.

Fig. 12 264. Le triangle BCD donne (49), BD : BC :: sin.BCD : sin.D. D'où l'on tire, en procédant comme on a fait (230), $\text{cot.}\frac{1}{2}(BCD - D) : \text{tang.}\frac{1}{2}CBD :: BD + BC : BD - BC$. En substituant les dénominations adoptées (251), et observant que $\text{cot.}\frac{1}{2}(BCD - D) = \text{cot.}\frac{1}{2}(180° - C - D) = \text{tang.}\frac{1}{2}(C + D) = \text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C)$, on aura $\text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C) : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$ *ou* (154) $- \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: 2BC + \delta BC : \delta BC$, et par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\delta BC : \left\{ \begin{matrix} \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B \\ ou \\ -\text{tang.}\frac{1}{2}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC + \tfrac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}(C - \tfrac{1}{2}\delta C).$$

Cette formule rigoureuse se réduit à la forme infinitésimale, en mettant $\frac{1}{2}\delta B$ au lieu de $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$, (153), et supprimant les *différences* dans le dernier rapport, (253, 260); ensorte que l'on a

$$\delta BC : \frac{\delta B}{R''} \text{ ou } - \frac{\delta C}{R''} :: BC : \text{tang.}C.$$

Ces deux formules donnent le rapport entre la variation du côté BC et celle de l'angle B ou de l'angle C, quand AB et A restent constants comme on l'a supposé (251).

265. Le triangle BCD donne, selon l'avant-derniere formule (239), $\text{sin.}\frac{1}{2}(BCD - D) = \text{cos.}\frac{1}{2}CBD \times \frac{BD - BC}{CD}$. Mais

sin.

$\sin.\frac{1}{2}(BCD - D) = \cos.(C - \frac{1}{2}\delta C)$, (264), et $\cos.\frac{1}{2}CBD = \cos.\frac{1}{2}\delta B = \cos.\frac{1}{2}\delta C$, puisque le cosinus reste positif, quoique δC soit négatif (154). Donc $\cos.(C - \frac{1}{2}\delta C) = \cos.\frac{1}{2}\delta B \times \frac{\delta BC}{\delta AC}$. Et par conséquent

$$\delta AC : \delta BC :: \cos.\tfrac{1}{2}\delta C : \cos.(C - \tfrac{1}{2}\delta C).$$

D'où il suit qu'on aura pour l'infinitésimale, (140, 133)

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos.C.$$

266. On peut observer dans les analogies précédentes (264, 265), que quand l'angle C est obtus, ou plus rigoureusement parlant, lorsqu'on a $(C - \frac{1}{2}\delta C) > 90°$, la tangente et le cosinus de cet angle étant négatifs (36), BC varie alors en sens contraire de B, et AC de BC. Cela est facile à reconnoître par une figure. Mais attendu l'application que j'ai faite des signes convenables aux différentielles dans mes analogies, si l'on observe de plus les regles des signes (36, 42), on n'aura besoin ni de réflexion, ni d'une figure qui représente exactement l'espece de chaque angle.

267. Prenons maintenant pour *quantités constantes un angle et le côté opposé.*

Si le triangle ABC se convertit en ADE, de maniere qu'on ait DE = BC, A et BC seront les quantités constantes; et comme la somme des angles d'un triangle rectiligne est toujours constante, $\delta B = \delta C$; mais ces variations sont en sens contraire. Fig. 14

Cela posé, puisque (49), AB sin.A = BC sin.C, en différentiant (131, 139), on aura δAB sin.A = BC $2\sin.\frac{1}{2}\delta C \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Mais sin.A : BC :: sin.C : AB. Donc δAB sin.C = AB $2\sin.\frac{1}{2}\delta C \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$, et par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\delta AB : \sin.\tfrac{1}{2}\delta C \textit{ ou } -\sin.\tfrac{1}{2}\delta B :: AB : \frac{\sin.C}{\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)}.$$

Donc on aura pour l'infinitésimale

$$\delta AB : \frac{\delta C}{R''} \textit{ ou } \frac{-\delta B}{R''} :: AB : \text{tang.C}.$$

268. On a aussi AC sin.A = BC sin.B. En différentiant, et

donnant aux différentielles les signes convenables, conformément à la figure, on trouvera de la même maniere

$$-\tfrac{1}{2}\delta_1 AC : -\sin.\tfrac{1}{2}\delta_1 B \text{ ou } +\sin.\tfrac{1}{2}\delta_1 C :: AC : \frac{\sin.B}{\cos.(B-\frac{1}{2}\delta_1 B)}, \text{ et}$$

$$-\delta_1 AC : -\frac{\delta_1 B}{R''} \text{ ou } +\frac{\delta_1 C}{R''} :: AC : \text{tang.}B.$$

269. Maintenant si l'on divise l'une par l'autre, les analogies différentielles finies (267, 268), on aura $\frac{\delta_1 AB}{-\delta_1 AC} : 1 :: \frac{AB}{AC} : \frac{\sin.C\ \cos.(B-\frac{1}{2}\delta_1 B)}{\sin.B\ \cos.(C+\frac{1}{2}\delta_1 C)} :: 1 : \frac{\cos.(B-\frac{1}{2}\delta_1 B)}{\cos.(C+\frac{1}{2}\delta_1 C)}$, (49); et par conséquent

$$\delta_1 AB : -\delta_1 AC :: \cos.(C+\tfrac{1}{2}\delta_1 C) : \cos.(B-\tfrac{1}{2}\delta_1 B).$$

Donc on aura pour l'infinitésimale,

$$\delta_1 AB : -\delta_1 AC :: \cos.C : \cos.B.$$

On seroit parvenu à la même analogie en divisant l'une par l'autre les deux infinitésimales (267, 268).

Fig. 15 270. Si $A = 90° = D$, en développant l'expression $\cos.(C+\frac{1}{2}\delta_1 C)$ dans l'analogie différentielle finie (267), on a $\delta_1 AB = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta_1 C \times AB}{\sin.C}(\cos.C\cos.\frac{1}{2}\delta_1 C - \sin.C\sin.\frac{1}{2}\delta_1 C) =$ (I. 6°) $\sin.\delta_1 C \times AB\cot.C - AB\,2\sin.^2\frac{1}{2}\delta_1 C = AC\sin.\delta_1 C - AB + AB\cos.\delta_1 C$, (213, 3°), (I. 7°). Or $AB + \delta_1 AB = BD$, et $\delta_1 C = ACD = ABD$; donc

$$BD = AC\sin.ACD + AB\cos.ACD.$$

En opérant de même sur l'analogie différentielle finie (268), et considérant que parceque l'hypothénuse est constante, si $BD = AB + \delta_1 AB$, alors $CD = AC - \delta_1 AC$, on trouvera

$$CD = AC\cos.ACD - AB\sin.ACD.$$

Si $\delta_1 C$ étoit négative, de sorte qu'on eût $BCA > BCD$, ce qui arriveroit si, par exemple, on mettoit, dans la fig. 15, A au lieu de D, et D au lieu de A, on trouveroit, en procédant de même, et observant qu'alors on a $BD = AB - \delta_1 AB$ et $CD = AC + \delta_1 AC$,

$$BD = AB\cos.ACD - AC\sin.ACD.$$

$$CD = AC\cos.ACD + AB\sin.ACD.$$

Donc, deux triangles rectangles ayant l'hypothénuse commune, si on connoît la différence des angles ayant même sommet, et de plus deux côtés dans l'un de ces triangles; les deux premieres ou les deux dernieres équations que nous venons de donner feront trouver les deux côtés de l'autre triangle. Ce cas se rencontre fréquemment dans l'Astronomie. Mais comme il arrive aussi quelquefois qu'au lieu de la différence des angles on connoît leur somme ACD, il est à propos de faire voir qu'alors les deux dernieres Fig. 16 équations donnent encore les quantités cherchées, en faisant seulement un changement de signes dans la premiere de ces deux équations.

271. En effet (213, 4°), $BC = \frac{AB}{\sin.BCA} = \frac{BD}{\sin.BCD}$. Donc $AB : BD :: \sin.BCA : \sin.(ACD - BCA) :: \sin.BCA : \sin.ACD \times \cos.BCA - \sin.BCA \cos.ACD :: 1 : \sin.ACD \cot.BCA - \cos.ACD$, (9). Donc $BD = AB \sin.ACD \cot.BCA - AB \times \cos.ACD$. Mais (213, 17°), $\cot.BCA = \frac{AC}{AB}$. Donc

$$BD = AC \sin.ACD - AB \cos.ACD.$$

Par la même méthode, en partant des équations $BC = \frac{AC}{\cos.BCA} = \frac{CD}{\cos.BCD}$, on trouvera

$$CD = AC \cos.ACD + AB \sin.ACD.$$

272. Soient maintenant *deux côtés constants*, et soient ces côtés AB, AC, ensorte que le triangle ABC se convertissant en Fig. 17 ABD, AD soit égal à AC.

On a (49), $AC : AB :: \sin.B : \sin.C :: \sin.ABD : \sin.D$. Or on voit par la dernière proportion, que si ABD est $> B$, on doit avoir aussi $D > C$, pourvu que tous ces angles soient aigus, comme nous le supposons toujours (229), nonobstant même ce que la figure pourroit représenter, (215). Nous ferons donc δC positif, ou $D = C + \delta C$, puisque la figure suppose $ABD > B$ ou $ABD = B + \delta B$.

On a donc $\sin.(B + \delta B) : \sin.B :: \sin.(C + \delta C) :$

Fig. 17 sin.C. Donc aussi (10), (II. 12°), tang.$\frac{1}{2}$(B + δB + B) : tang.$\frac{1}{2}$(B + δB — B) :: tang.$\frac{1}{2}$(C + δC + C) : tang.$\frac{1}{2}$(C + δC — C), et, en réduisant et transposant,

tang.$\frac{1}{2}\delta$B : tang.$\frac{1}{2}\delta$C :: tang.(B + $\frac{1}{2}\delta$B) : tang.(C + $\frac{1}{2}\delta$C).

On aura donc pour l'infinitésimale

$$\delta B : \delta C :: \text{tang.}B : \text{tang.}C.$$

Ici le diviseur R″ est inutile, parcequ'il diviseroit également δB et δC.

273. Par la méthode employée (264), on tire du triangle BCD, cot.$\frac{1}{2}$(BDC — BCD) = tang.$\frac{1}{2}$CBD × $\frac{BC + BD}{BC - BD}$ = tang.$\frac{1}{2}\delta$B × $\frac{2BC - \delta BC}{-\delta BC}$, en supposant BC > BD, comme cela doit être (A étant aigu), à cause de BAC > BAD. Mais BDC — BCD = D + ADC — (ACD — C) = D + C, parceque le triangle ACD est isoscele. Donc cot.$\frac{1}{2}$(D + C), ou cot.(C + $\frac{1}{2}\delta$C) = tang.$\frac{1}{2}\delta$B × $\frac{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{-\delta BC}$; donc aussi

tang.$\frac{1}{2}\delta$B : $-\frac{1}{2}\delta$BC :: cot.(C + $\frac{1}{2}\delta$C) : BC — $\frac{1}{2}\delta$BC; et

$$\frac{\delta B}{R''} : -\delta BC :: \text{cot.}C : BC.$$

274. Divisons l'une par l'autre les analogies différentielles finies (272, 273), et nous aurons

tang.$\frac{1}{2}\delta$C : $-\frac{1}{2}\delta$BC :: cot.(B + $\frac{1}{2}\delta$B) : BC — $\frac{1}{2}\delta$BC;

et par conséquent

$$\frac{\delta C}{R''} : -\delta BC :: \text{cot.}B : BC.$$

275. Dans le triangle BCD on a, par la derniere formule (239), cos.$\frac{1}{2}$(BDC — BCD) = sin.$\frac{1}{2}$CBD × $\frac{BC + BD}{CD}$ = sin.$\frac{1}{2}\delta$B × $\frac{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{CD}$. Or (247), $\frac{1}{2}$CD = AC sin.$\frac{1}{2}$CAD = — AC sin.$\frac{1}{2}\delta$A, en appellant A l'angle BAC, qui, en diminuant, devient BAD; et $\frac{1}{2}$(BDC — BCD) = C + $\frac{1}{2}\delta$C, (273). Donc

$\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C) = \sin.\frac{1}{2}\delta B \times \frac{BC - \frac{1}{2}\delta BC}{-AC \sin.\frac{1}{2}\delta A}$; et par conséquent

$$\sin.\tfrac{1}{2}\delta B : -\sin.\tfrac{1}{2}\delta A :: AC \cos.(C + \tfrac{1}{2}\delta C) : BC - \tfrac{1}{2}\delta BC;$$

ce qui nous donne pour l'infinitésimale

$$\delta B : -\delta A :: AC \cos.C : BC.$$

276. Si nous appliquons la même solution à la figure 18, dans laquelle ABC se changeant en AEC, on a $AB = AE$, $BCE = \delta C$, $E = B + \delta B$, $CE = BC - \delta BC$, et $BAE = -\delta A$; nous trouverons de même $\cos.\frac{1}{2}(CEB - CBE) = \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B) = \sin.\frac{1}{2}\delta C \times \frac{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{BE} = \sin.\frac{1}{2}\delta C \times \frac{BC - \frac{1}{2}\delta BC}{-AB \sin.\frac{1}{2}\delta A}$. Donc aussi Fig. 18

$$\sin.\tfrac{1}{2}\delta C : -\sin.\tfrac{1}{2}\delta A :: AB \cos.(B + \tfrac{1}{2}\delta B) : BC - \tfrac{1}{2}\delta BC$$

Et par conséquent

$$\delta C : -\delta A :: AB \cos.B : BC.$$

277. En divisant l'une par l'autre les analogies différentielles finies (273, 275), ainsi que celles trouvées (274, 276), on aura

$$-\tfrac{1}{2}\delta BC : -\sin.\tfrac{1}{2}\delta A :: AC \sin.(C + \tfrac{1}{2}\delta C) : \cos.\tfrac{1}{2}\delta B$$
$$-\tfrac{1}{2}\delta BC : -\sin.\tfrac{1}{2}\delta A :: AB \sin.(B + \tfrac{1}{2}\delta B) : \cos.\tfrac{1}{2}\delta C$$

Et les infinitésimales seront

$$-\delta BC : -\frac{\delta A}{R''} :: AC \sin.C : 1$$
$$-\delta BC : -\frac{\delta A}{R''} :: AB \sin.B : 1$$

278. Si *deux angles* sont *constants*, et par conséquent le troisieme ; en faisant varier les côtés, on a deux triangles semblables, dans lesquels les variations des côtés sont proportionnelles aux côtés eux-mêmes, ou (49) aux sinus des angles opposés à ces mêmes côtés. La solution de ce cas appartient à la Géométrie plutôt qu'à la Trigonométrie.

279. Pour faciliter l'usage des analogies différentielles que nous avons trouvées jusqu'à présent, j'ai cru qu'il seroit utile d'en composer une table. J'y ai exprimé les infinitésimales de la maniere

qu'on préfere le plus généralement, c'est-à-dire en dénommant les différentes parties du triangle. J'ai omis R″ pour plus de briéveté; on suppléera cette quantité dans le calcul : nous en avertissons à la fin de la table. J'ai disposé chaque analogie *infinitésimale* sous l'analogie *finie* correspondante; ensorte qu'on verra sur-le-champ dans celle-ci ce qui se trouve négligé dans celle-là, et qu'on en tiendra compte dans le calcul, lorsqu'il le faudra et qu'on le pourra. Les analogies différentielles finies donnent la valeur exacte de l'une quelconque des quantités contenues dans chacune d'elles. Il n'en est pas ainsi des infinitésimales, qui ne peuvent que donner à-peu-près la valeur finie de l'une des deux différentielles que chacune d'elles renferme. Et si ce n'étoit pas une différentielle qu'on cherchât par ces analogies; si, par exemple, connoissant δAC et δBC, on cherchoit l'angle C par le moyen de l'analogie (265), δAC : δBC :: 1 : cos.C, l'erreur pourroit être grave; car en général *dans l'usage même des formules rigoureuses, il n'est pas sûr de chercher des grandes quantités par le moyen des petites*; puisqu'alors une légere erreur dans les quantités données peut en produire une considérable dans les quantités cherchées : on en verra un exemple (799). Au contraire, si dans l'analogie que nous venons de citer, on connoît une des deux différentielles; pour trouver la valeur très approchée de l'autre, il suffit de connoître à-peu-près l'angle C. Une légere erreur sur une grande quantité telle qu'on suppose cos.C relativement aux différentielles, ne produit ordinairement qu'une erreur insensible sur une petite quantité telle qu'on suppose la différentielle cherchée. On en a vu un exemple (258).

De ce que nous avons dit, il résulte que le calcul des analogies infinitésimales est extrêmement commode, puisqu'entre autres avantages on peut négliger les secondes dans la valeur des arcs, en employant leurs lignes trigonométriques.

TABLE DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES, FINIES ET INFINITÉSIMALES, *démontrées* (263 à 277).

Quantités constantes AB, A ; ou *un côté et un angle adjacent.*

1° ANAL. $\delta AC : \left\{ \begin{matrix} \text{sin.}\,\delta B \\ ou \\ -\text{sin.}\,\delta C \end{matrix} \right\} :: BC : \text{sin.}(C - \delta C) :: BC + \delta BC : \text{sin.}\,C$

(M)... La variation du *côté adjacent à l'angle constant* est à la variation de l'*un des angles*, comme le côté opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

2° $\frac{1}{2}\delta BC : \left\{ \begin{matrix} \text{tang.}\,\frac{1}{2}\delta B \\ ou \\ -\text{tang.}\,\frac{1}{2}\delta C \end{matrix} \right\} :: BC + \frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C).$

(N)... La variation du *côté opposé à l'angle constant* est à la variation d'*un des angles*, comme ce côté est à la tangente de l'angle opposé au côté constant.

3° $\delta AC : \delta BC :: \text{cos.}\frac{1}{2}\delta C : \text{cos.}(C - \frac{1}{2}\delta C).$

(O)... La variation du *côté adjacent à l'angle constant* est à la variation du *côté opposé*, comme le rayon au cosinus de l'angle opposé au côté constant.

Quantités constantes BC, A ; ou *un côté et l'angle opposé.*

4° $\frac{1}{2}\delta AB : \text{sin.}\frac{1}{2}\delta C \; ou \; -\text{sin.}\frac{1}{2}\delta B :: AB : \frac{\text{sin.}\,C}{\text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C)}.$

5° $-\frac{1}{2}\delta AC : \text{sin.}\frac{1}{2}\delta C \; ou \; -\text{sin.}\frac{1}{2}\delta B :: AC : \frac{\text{sin.}\,B}{\text{cos.}(B - \frac{1}{2}\delta B)}.$

(P)... La variation d'*un côté* est à la variation d'*un angle*, comme ce même côté à la tangente de l'angle opposé.

6° $\delta AB : -\delta AC :: \text{cos.}(C + \frac{1}{2}\delta C) : \text{cos.}(B - \frac{1}{2}\delta B).$

(Q)... Les variations des *côtés* sont proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

Quantités constantes AB, AC; ou *deux côtés.*

7° $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: \text{tang.}(B+\frac{1}{2}\delta B) : \text{tang.}(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

(R)... Les variations des *angles opposés aux côtés constants* sont proportionnelles aux tangentes de ces mêmes angles.

8° $-\frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: BC-\frac{1}{2}\delta BC : \cot.(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

9° $-\frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta C :: BC-\frac{1}{2}\delta BC : \cot.(B+\frac{1}{2}\delta B)$.

(S)... La variation du *côté* est à celle d'*un angle adjacent*, comme ce même côté à la cotangente de l'autre angle adjacent.

10° $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta B :: BC-\frac{1}{2}\delta BC : AC\cos.(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

11° $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta C :: BC-\frac{1}{2}\delta BC : AB\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)$.

(T)... La variation de l'*angle opposé au côté variable* est à celle d'*un angle adjacent*, comme le côté variable est au produit du côté constant opposé à cet angle adjacent, par le cosinus de l'autre angle adjacent.

12° $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : -\frac{1}{2}\delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta B : AC\sin.(C+\frac{1}{2}\delta C)$.

13° $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : -\frac{1}{2}\delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta C : AB\sin.(B+\frac{1}{2}\delta B)$.

(V)... La variation de l'*angle opposé au côté variable* est à celle de *ce côté*, comme le rayon est au sinus de l'un des deux autres angles, multiplié par le côté constant contigu à cet angle.

Dans les analogies infinitésimales, nous supposons toujours que *les variations des angles* (lesquelles se prennent en secondes) sont divisées par R″, (262).

280. Les analogies précédentes, et sur-tout les infinitésimales, peuvent devenir plus nombreuses au moyen des substitutions. Par exemple, si l'on cherchoit une des différentielles de l'analogie $\delta AB : \delta C :: AB : \text{tang.}C$, (267); que le côté AB fût inconnu, mais que les angles B et C et le côté AC fussent donnés, on pourroit

trouver,

trouver, par leur moyen, le côté AB $= \frac{AC \sin.C}{\sin.B}$, et employer ensuite la valeur numérique de AB dans cette analogie ; mais si au lieu de cette valeur numérique, on substitue dans cette même analogie la valeur analytique de AB telle que nous venons de la donner, la proportion deviendra δAB : δC :: AC cos.C : sin.B, et le calcul sera plus expéditif. Il en seroit de même si on connoissoit AB, AC et A, et que l'angle C fût inconnu ; en substituant la valeur (229) de tang.C, on auroit δAB : δC :: AC — AB × cos.A : sin.A. On fera donc ces substitutions quand elles seront nécessaires : nous les omettons ici ; mais nous nous proposons d'y suppléer dans les analogies différentielles de la Trigonométrie sphérique, qui sont d'un plus grand usage. On pourra recourir à celles-ci, même pour la Trigonométrie rectiligne, à l'usage de laquelle il est facile de les réduire, comme nous le verrons (727).

281. Il y a deux manieres de calculer les analogies différentielles finies, lorsque le second rapport contient aussi la différentielle cherchée : je suppose, par exemple, que l'on cherche δC par l'analogie (279, 1°), qui donne — sin.δC $= \frac{\delta AC}{BC} \times$ sin.(C — δC).

La premiere méthode déja indiquée (pag. 71) consiste à employer sin.C au lieu de sin.(C — δC) qu'on ne peut employer, parceque δC est inconnu : on a alors une valeur approchée de δC, pourvu que δC soit très petit relativement à C. En se servant de cette valeur approchée de δC, que l'on substitue dans le calcul sin.(C — δC), au lieu de sin.C, et on aura une autre valeur de δC plus approchée que la premiere. Si cette seconde valeur n'est pas encore aussi exacte qu'on le desire, on l'emploiera au lieu de la premiere, et on en trouvera une troisieme beaucoup plus exacte, et ainsi de suite. Ordinairement on voit, dès le premier calcul, quelle est à très peu près la valeur exacte de δC.

282. Par la seconde méthode, je réduis l'équation de sorte que l'inconnue soit d'un seul côté. J'omets alors le signe négatif de sin.δC ; il influeroit ici sur le calcul, tandis qu'il ne doit (252)

qu'indiquer que C diminue lorsque AC augmente : je développe sin.(C — δC), (II. 2°); et divisant l'équation par sin.δC, j'ai

$$\cot.\delta C = \frac{BC + \cos.C \times \delta AC}{\sin.C \times \delta AC}.$$

Mais cette méthode, peu commode pour le calcul par logarithmes, donne en outre, dans de certains cas, une équation compliquée du second degré; par exemple lorsqu'on cherche δC par l'analogie (279, 2°), en développant tang.(C — $\frac{1}{2}\delta$C), (II. 6°).

283. *Si une seule partie du triangle est constante*, nous allons voir que les mêmes analogies (279) serviront encore; mais *il faut connoître deux variations pour pouvoir trouver toutes les autres.* Je parle seulement des analogies infinitésimales; car on ne pourra que rarement, dans ce cas, appliquer la méthode suivante aux analogies différentielles finies, parcequ'elles exigent beaucoup de données et qu'elles se prêtent peu aux substitutions.

Fig. 19 Soit le triangle DTS, qui se convertisse en DES, le seul côté DS demeurant constant. Soit connue la valeur de EDT = + δD, et celle de TSE = + δS; et soit demandée, par exemple, la variation de DT qui devient DE.

On prolongera DT, s'il est nécessaire, jusqu'à la rencontre de SE, et on considérera d'abord le triangle DTS converti en DRS, et conservant par conséquent comme constants *un côté* DS *et un angle adjacent* D. Puisqu'on connoît δS, on aura la variation TR de DT, qui dans ce cas est *le côté adjacent à l'angle constant* D, par l'analogie (M), (279), qui donnera δDT : δS :: TS : sin.T. J'observe que S est l'angle variable adjacent au côté constant, et qu'il en est de même de l'angle B dans l'analogie (279, 1°). J'en conclus que δS étant ici donné positif de même que δB l'est dans l'analogie citée, δDT doit être positif, puisqu'il correspond à δAC. (C'est ce qu'on voit par la fig. 19; mais cependant en général ce n'est pas aux figures qu'on doit se fier pour des solutions de ce genre). On a donc $\delta DT = \delta S \times \frac{TS}{\sin.T}$.

Cette équation donne la différence de DT à DR. Pour avoir la

différence cherchée de DT à DE, il reste à connoître celle de DR à DE. Considérons le triangle DSR converti en DSE, *un côté* DS *et l'angle adjacent* DSR demeurant constants. Puisqu'on connoît δD, et qu'on cherche la variation de DR, *côté opposé à l'angle constant,* l'analogie (N), (279), est celle qui convient à ce cas ; et on aura δDR : δD :: DR : tang.R. J'observe que D correspond à B dans l'analogie (279, 2e); et raisonnant comme ci-dessus, j'en conclus que δDR doit être positif. Il faut donc ajouter la valeur de δDR à celle déja trouvée de δDT dans le triangle DTS, ou de DR — DT, pour avoir la valeur entiere cherchée de δDT ou de DE — DT. Donc $\delta DT = \delta S \times \frac{TS}{\sin.T} + \delta D \times \frac{DR}{tang.R}$. En écrivant DT au lieu de DR, et T au lieu de R, comme nous avons toujours fait dans les analogies infinitésimales, où nous avons employé seulement les parties du triangle primitif ABC, auquel correspond DTS dans le cas présent; on aura

$$\delta DT = \frac{TS \times \delta S + DT \times \cos.T \times \delta D}{\sin.T}.$$

284. Le *triangle n'ayant donc qu'une seule partie constante,* (que je nommerai *la premiere*), et étant données les variations de deux autres parties, que je nommerai *la seconde* et *la troisieme,* la méthode générale pour connoître la variation de l'une quelconque des trois parties restantes du triangle sera celle qui suit :

Considérez comme *constantes la premiere et la seconde;* prenez dans la table (279) l'analogie convenable pour calculer la variation ou l'effet que la variation connue de la *troisieme* produit sur la *quatrieme,* qui est celle dont je suppose qu'on cherche la variation. Considérez ensuite comme *constantes la premiere et la troisieme,* et cherchez de même l'effet que produit sur la *quatrieme* la variation connue de la *seconde.* La somme de ces deux effets sera, dans tous les cas, la variation cherchée. Je dis *la somme dans tous les cas;* parce que je suppose qu'on prendra les analogies infinitésimales dans la table (279), en donnant aux différentielles les signes

qu'elles se trouveront avoir dans les analogies finies correspondantes, ou les signes contraires si les données l'exigent (252, 283).

On verra plusieurs applications de cette méthode (782, 785, &c.).

Ainsi pour avoir tenu compte des signes des différentielles en composant les analogies, nous sommes dispensés de former des figures exactes, qui seroient quelquefois compliquées et embarrassantes dans le cas dont il s'agit, et bien plus encore dans le suivant.

285. *Lorsqu'aucune des parties du triangle n'est constante, trois variations étant données, on trouvera toutes les autres* par la même méthode. Je nomme *premiere, seconde* et *troisieme*, les trois parties dont les variations sont données; pour connoître la variation de l'une quelconque des trois autres parties, que je nomme *quatrieme*, je suppose *constantes la premiere et la seconde;* je trouve, comme ci-dessus, l'effet que produit sur la *quatrieme* la variation connue de la *troisieme;* je suppose ensuite *constantes la premiere et la troisieme;* je trouve l'effet que produit sur la *quatrieme* la variation connue de la *seconde;* enfin je suppose *constantes la seconde et la troisieme,* et je trouve l'effet que produit sur la *quatrieme* la variation connue de la *premiere.* La somme de ces trois effets, pris avec leurs signes respectifs, sera l'effet total ou la variation cherchée.

La table (279) fournit donc les analogies différentielles pour tous les cas possibles. J'ajouterai seulement encore quelques expressions qu'on emploie fréquemment dans l'analyse infinitésimale.

286. Dans un triangle rectiligne rectangle, *lorsque la différence de l'hypothénuse au plus grand côté est très petite, elle est égale à la moitié du quarré du plus petit côté, divisée par l'hypothénuse.*

Fig. 20 Puisque dans un triangle ABC rectangle en A, on a (213, 14°), $BC - AB = \frac{AC^2}{BC + AB}$; en appellant δBC la différence de l'hypothénuse BC au plus grand côté AB, il s'ensuit que $AB = BC - \delta BC$, et par conséquent que $BC - AB = \frac{AC^2}{2BC - \delta BC} =$

$\frac{AC^2}{2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}$. Quand δBC est très petit par rapport à BC, on peut mettre BC au lieu de $(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, (253); donc alors $BC - AB = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{BC}$.

287. *Le sinus verse d'un arc très petit est égal à la moitié du quarré de ce même arc.*

Prenant l'hypothénuse pour rayon, si l'on mene l'arc CD jusqu'à la rencontre de AB prolongé, on verra que BC — AB = AD = sin.v. CD, (4), et que AC = sin.CD. Mais quand le sinus est très petit, on peut lui substituer l'arc, (259). Par cette substitution l'équation finale de l'article précédent devient sin.v. CD $= \frac{\frac{1}{2}CD^2}{BC} = \frac{1}{2}CD^2$, en faisant, comme à l'ordinaire, le rayon BC = 1.

C'est aussi la valeur que donneroit la seconde équation (154), puisque sin.v. A = 1 — cos. A = $\frac{A^2}{2}$, en négligeant les puissances plus élevées de A, qui ont une valeur insensible relativement à A^2, lorsque A est très petit.

288. *Lorsque l'arc est très petit, l'excès de sa sécante sur le rayon est égal à la moitié du quarré de ce même arc.*

Soit DE la tangente et BE la sécante (7) du petit arc CD; on cherche la valeur de CE, quantité qu'on nomme aussi *l'écart de la tangente*, c'est-à-dire la distance de l'extrémité de la tangente à l'arc. Or AB : BC :: AD : CE $= \frac{BC \times AD}{AB} = \frac{BC \times \frac{1}{2}CD^2}{BC - \delta BC}$, (287, 286). Donc en négligeant comme ci-dessus δBC, CE $= \frac{1}{2}CD^2$.

On voit que dans le calcul infinitésimal *le sinus verse se considere comme égal à l'excès de la sécante sur le rayon.*

On aura une expression exacte de cet excès, par la formule (I. 27*), qui donne $\frac{1}{\cos.A} - 1$ ou séc. A — 1 = tang. A tang. $\frac{1}{2}$A. Cette expression peut être utile dans plusieurs cas.

CHAPITRE XI.

De l'usage de la Trigonométrie rectiligne sur le terrein.

289. Nous parlerons en premier lieu de la maniere de mesurer méchaniquement une distance et un angle, puisque ce sont là les opérations fondamentales qui fournissent les données pour calculer les autres parties inconnues d'un triangle, ainsi qu'on l'aura déja observé dans les exemples (48, 50, 215, &c.). Comme la mesure des angles est bien plus facile à relever que celle des côtés, on mesure ordinairement un côté seulement, et ce côté se nomme *la base*.

De la maniere de mesurer la base.

Fig. 21 Soit proposé de mesurer sur le terrein la distance AB.

On commencera par planter verticalement, au moyen du fil à plomb, deux pieux bien droits, AC, BD, aux deux points extrêmes A et B. Ces pieux, qu'on nomme aussi *piquets* ou *jallons*, se terminent ordinairement d'un bout par une pointe ferrée, pour qu'ils pénétrent plus aisément en terre, et portent à l'autre bout un signal pour faciliter la direction du rayon visuel figuré par la ligne ponctuée CD. L'Observateur ayant l'œil appliqué en C ou en D, fera poser, de distance en distance, d'autres piquets toujours d'à-plomb, et qui soient en même temps dans la direction, ou, pour mieux dire, dans le plan vertical du rayon visuel CD; (le plan vertical est celui qui, prolongé, passeroit par le centre de la Terre, que nous supposerons sphérique dans tout ce Chapitre, parceque son ellipticité est tout-à-fait insensible dans les opérations dont il y est question). Ces piquets se multiplient autant qu'il est nécessaire pour que l'on puisse suivre par leur moyen la ligne droite AB lorsqu'on la mesure, sans s'écarter de la direction de cette ligne,

ni à droite ni à gauche. Si l'on veut procéder avec plus de sûreté, on tracera un petit sillon de A en B, en appliquant de temps en temps l'œil aux jallons et dans leur plan vertical, pour conduire le sillon bien droit; ou bien on menera une ficelle d'un jallon à l'autre. On prendra ensuite la mesure avec un grand compas, ou avec une chaîne de gros fil-fer, ou avec une perche d'une longueur connue. La longueur de la chaîne ou l'ouverture du compas, c'est-à-dire la distance de ses deux pointes, doivent être des parties aliquotes de la toise ou de quelque mesure bien connue. Le compas doit être tel que son ouverture ne puisse varier pendant l'opération. On portera successivement les pointes du compas, ou la chaîne bien tendue, ou la perche, sur le sillon ou le long de la ficelle; et l'on mesurera ainsi avec précision le nombre des pieds ou des toises de la distance AB. On opére plus promptement et plus sûrement encore, si l'on emploie deux perches égales, que l'on met successivement l'une au bout de l'autre, de maniere que la premiere devienne la seconde, et ainsi de suite alternativement.

290. Cette maniere de mesurer suppose que le terrein soit plan depuis A jusqu'en B, et la distance mesurée se nomme, dans ce cas, *distance horizontale*. Dans la rigueur mathématique, deux points de la surface de la terre, quelque voisins qu'ils soient, ne peuvent avoir leur horizon dans un même plan, à cause de la courbure du Globe. Mais cette sphéricité n'occasionne qu'une erreur absolument insensible dans ces sortes d'opérations. Les bases les plus longues que l'on ait mesurées jusqu'à présent, sont environ de 36000 pieds, mesure de Paris : cette distance répond à un arc un peu plus grand que de six minutes; ce qui se trouve par la proportion suivante : *Le rayon de la terre exprimé en pieds* (223) *est à un arc terrestre exprimé en pieds, comme le rayon de la table* (AA), *ou* 1, *est à l'arc de même degré pris dans la même table.* En appellant A cet arc de la table, on a donc, dans le cas dont il s'agit, $A = \frac{36000}{19630000}$, (223). La différence de l'arc à la corde est $\frac{1}{24} A^3$, en ne prenant que le premier terme de la derniere série (152), les termes

qui suivent étant insensibles. Cette différence, en parties du rayon de la table, est donc $(\frac{36}{19630})^3 \times \frac{1}{24}$; il faut multiplier cette valeur par le rayon terrestre, ou par 19630000, ce qui donnera la différence ci-dessus exprimée en pieds et fractions de pieds; et on trouvera qu'un arc terrestre long de 36000 pieds est plus long que la corde qui lui est sous-tendue, de $\frac{5}{1000}$ de pieds seulement. On voit donc qu'un tel arc peut se prendre, sans le moindre scrupule, pour une ligne droite dans les opérations les plus délicates de la Géodésie.

Lorsqu'on voudra avoir l'arc en minutes et secondes, on emploiera R″, (262), au lieu de 1 dans l'analogie ci-dessus.

291. Si le terrein de la base est incliné ou inégal, on procédera comme il suit. Après avoir fixé avec des jallons l'alignement de la
Fig.22 base BC, on en prendra la mesure en tenant toujours les perches horizontales, comme *ac*, *be*, &c. Les perpendiculaires ponctuées DC, E*c*, &c., représentent le fil à plomb qui doit raser les extrémités des deux perches, supérieure et inférieure, pour qu'on soit assuré que l'une commence où l'autre finit, condition sans laquelle il est évident que la mesure ne seroit pas juste. En opérant ainsi, la somme des perches *ac*, *be*, *dm*, *h*B, sera égale à la distance horizontale AC des points B et C.

Si cependant on vouloit connoître *la distance effective* BC des mêmes points, on pourroit mesurer successivement les hauteurs *a*C, *bc*, *de*, *hm*, dont la somme est égale à AB; et connoissant AC et AB, on trouveroit par le calcul de la formule (213, 18°), la longueur de l'hypothénuse BC. (Si le terrein monte et descend alternativement, il est clair que pour avoir AB il faut soustraire la somme des différences des hauteurs des perches en descendant, de celle de ces différences en montant). Mais il est plus aisé de mesurer AB par le nivellement, méthode dont se servent ordinairement les Ingénieurs et les Arpenteurs. L'usage du barometre (311) est encore plus facile. Enfin la voie la plus courte est de prendre avec des instruments la mesure de l'angle ACB, (296 et suiv.);

par

par le moyen de cet angle et du côté AC ; on trouvera BC ; (213, 8e).

292. Pour disposer les perches horizontalement dans la mesure des terreins inclinés, on se sert du niveau. Il y a des niveaux de plusieurs especes et de plusieurs formes. La fig.23 représente un *niveau d'air.* C'est un tube de verre, FE, fermé hermétiquement, et rempli d'une liqueur, ordinairement d'esprit de vin, sur laquelle surnage une bulle d'air. On pose cet instrument sur la perche, dont on éleve et abaisse celle des extrémités qui ne touche point au terrein, (par exemple l'extrémité *a* de la perche *ac* dans la fig.22), jusqu'à ce que la bulle d'air s'arrête en G, dans la partie du milieu du tube, qui est ordinairement indiquée par deux traits. La perche est alors parallele à l'horizon.

293. Ce que nous venons d'exposer est plus que suffisant pour les mesures ordinaires de l'Arpentage, de la Topographie et de la Géographie. Lorsqu'il est question de pratiques plus délicates ; s'il s'agit, par exemple, de déterminer la longueur d'un degré de la Terre, il faut alors mettre en usage bien d'autres moyens, employer d'autres précautions, que nous omettrons, pour ne pas être diffus inutilement, puisqu'en pareil cas on ne peut se dispenser d'avoir sous les yeux des Traités particuliers, comme l'excellent Livre de *la Figure de la Terre,* par Bouguer, et le *Voyage astronomique et géographique,* Ouvrage dans lequel le savant P. Boscovich a donné les méthodes les plus ingénieuses pour l'Astronomie-pratique et les solutions, par la Géométrie la plus simple, d'un grand nombre de problêmes relatifs à la figure de la Terre.

De la maniere de relever les angles sur le terrein.

294. La *planchette* est le plus commode, et peut-être le plus ancien instrument qui ait été inventé pour prendre la mesure des angles sur le terrein. C'est effectivement une petite planche bien dressée, d'un pied et demi ou environ en quarré, soutenue ordinai- Fig.24

rement sur trois pieds, et montée avec divers mouvements pour qu'on puisse l'incliner à volonté à l'horizon. Les meilleures planchettes sont celles qui peuvent se mouvoir en tout sens avec facilité, qui sont solides, fortes, conservant invariablement l'inclinaison sur laquelle on les fixe, et qui ne sont point sujettes à se détruire ou à se déformer par les variations de la chaleur et du froid, de la sécheresse et de l'humidité. FG est une alidade, c'est-à-dire une regle de cuivre, garnie de deux pinnules qui servent à diriger le rayon visuel. Fig.25

Pour prendre l'angle formé par deux objets, comme B et C, vus d'un point de station auquel je suppose que réponde d'à-plomb un point A de la planchette; on fixera sur cet instrument un papier bien tendu, sur lequel on appliquera l'alidade de maniere qu'en regardant par les pinnules l'objet B, on puisse mener le long de la regle qu'il faut contenir fermement, une ligne indéfinie A*b*. On mirera de même au travers des pinnules l'objet C, et l'on tirera une ligne A*c*; l'angle *c*A*b*, sur le papier, sera l'angle cherché CAB. Fig.24

Il est facile de déterminer sur le terrein le point correspondant au point A du papier, en suspendant successivement aux bords *m*, *n* de la planchette, un fil à plomb qui descende près de la superficie du sol, et portant sur le terrein, dans la direction de l'un des plombs vers l'autre, une des deux distances A*m* ou A*n* mesurée horizontalement.

295. Pour savoir le nombre des degrés de l'angle *b*A*c*, on en prend la mesure avec un demi-cercle de cuivre ou de corne, comme l'enseignent les Éléments de Géométrie. Si l'on veut cette mesure avec plus de précision, on prendra avec le compas une portion AD = AE sur les droites A*b*, A*c*, et DE sera la corde de l'angle A pour le rayon AE. On mesurera sur une échelle de parties égales les lignes AE, DE, et l'angle A sera connu par le moyen des tables des sinus, puisqu'on a AE : DE :: 1 : 2 sin. $\frac{1}{2}$A, (247). C'est aussi la méthode la plus exacte pour former sur le papier un angle donné, en menant une ligne AE d'une longueur arbitraire, et de Fig.26

cette ligne comme rayon, et du centre A, décrivant un arc qu'on coupe en D, à un intervalle ED, qu'on détermine en calculant la même analogie. Quand ces deux opérations n'exigent pas une extrême exactitude, on peut éviter le calcul en faisant usage de l'échelle des cordes, que donne le compas de proportion.

296. Après la planchette, l'instrument le plus usité pour relever les angles sur le terrein, est le *graphometre*. C'est un demi-cercle de métal, divisé de degré en degré, ou de demi-degré en demi-degré; il porte une alidade mobile EC, qui tourne sur le centre A de l'instrument, et qui est garnie de pinnules. Deux autres pinnules sont aussi fixées sur le demi-cercle, perpendiculairement à son plan, aux extrémités du diametre qui passe par les divisions marquées o et 180. Les deux extrémités de l'alidade portent ordinairement quelques divisions dont voici l'usage. Fig. 27

Supposons le graphometre divisé de 30′ en 30′; si on prend un intervalle, par exemple, de 14 divisions ou de 7 degrés, et qu'un intervalle semblable soit divisé, sur chacune des extrémités de l'alidade, en 15 parties égales, il est clair que chacune de ces parties vaudra $\frac{7^{\circ}}{15}$ ou 28′. La premiere division, marquée o sur l'alidade, doit correspondre précisément au milieu des pinnules, c'est-à-dire qu'elle doit être dans le plan des fils verticaux, qui sont ordinairement fixés dans le milieu des pinnules. On appelle communément cette division de l'alidade *la ligne de foi;* elle indique à laquelle des divisions du graphometre correspond la direction du rayon visuel. Je suppose donc que la ligne de foi tombe sur le graphometre entre 40° et 40° 30′. Pour savoir combien il y a de minutes entre la division de 40° et le point du graphometre qui correspond à zéro de l'alidade, on contiendra l'alidade, et on cherchera parmi ses divisions quelle est celle qui coincide le plus exactement avec l'une de celles du demi-cercle. Supposons que ce soit la 7e division de l'alidade : dans notre exemple elle coincidera nécessairement avec celle de 43° sur le graphometre. Puisque l'intervalle de six espaces sur l'alidade, de la 1e à la 7e division, vaut $6 \times 28' = 2^{\circ}\,48'$,

Fig. 27 il s'ensuit que la premiere division de l'alidade répond, sur le graphometre, à un point situé à 43° — 2° 48′ = 40° 12′. Si c'eût été la 8ᵉ division de l'alidade qui eût coincidé avec celle de 43° 30′, on auroit trouvé de la même maniere, que le zéro de l'alidade seroit tombé sur 40° 14′. Ces exemples font aisément comprendre que les divisions de l'alidade subdiviseront les espaces du demi-cercle, de 2′ en 2′.

Le limbe qui porte ces divisions se nomme le *nonius* ou le *vernier*.

Le graphometre doit être monté sur un pied bien solide, et de maniere qu'on puisse fixer le plan du demi-cercle dans toutes les positions, horizontale, verticale, et inclinée à l'horizon. Les graphometres plus perfectionnés, sont en outre garnis de vis qui servent aux petits mouvements, soit pour achever de mettre avec toute l'exactitude possible le plan de l'instrument dans l'inclinaison desirée, soit pour placer rigoureusement l'alidade dans la direction de l'objet qu'on veut mirer au travers des pinnules. Au lieu de pinnules on se sert avec avantage de deux lunettes, l'une fixée au demi-cercle, parallelement au diametre qui passe ou réellement ou mentalement par les divisions marquées 0 et 180. Cette lunette est placée au-dessous du demi-cercle, pour que l'alidade puisse tourner librement sur la surface supérieure. L'alidade porte la seconde lunette, laquelle doit être disposée de maniere qu'elle puisse s'incliner un peu, verticalement, sur le plan de l'alidade. Chacune de ces lunettes doit avoir deux fils bien tendus en croix, au foyer commun des verres, ou au moins un seul fil tendu verticalement.

Enfin le graphometre porte une boussole qui sert à déterminer l'angle que fait le rayon visuel avec la ligne méridienne, comme nous l'expliquerons plus clairement ci-après, (340).

297. Il est aisé de concevoir l'usage du graphometre. Si l'on veut mesurer la distance angulaire de deux objets F, G, vus d'un point quelconque, on placera perpendiculairement sur ce point le centre A du graphometre, et on inclinera ou disposera l'instrument de maniere qu'en regardant à travers les pinnules fixes, le fil vertical

paroisse partager également l'un F des deux objets, et qu'en même temps le plan de l'instrument pût, s'il étoit prolongé, rencontrer l'autre objet G. Ensuite on fera tourner l'alidade EC, jusqu'à ce que le fil de ses pinnules partage également l'objet G. On observera à quel point du demi-cercle correspond la ligne de foi de l'alidade; la distance de ce point à la premiere division du graphometre en B, est l'arc BC, qui indiquera de combien de degrés et minutes est l'angle cherché BAC ou FAG.

Cet angle, mesuré dans un plan commun aux trois points A, F, G, n'est égal à l'angle GAF, mesuré sur le plan horizontal du point A, que quand les points F et G sont situés dans ce dernier plan, comme nous le verrons (321). Nous donnerons (322) le moyen d'évaluer et de corriger cette différence; correction qu'on s'épargnera, si le graphometre est armé de lunettes, lorsqu'un seul des objets sera situé hors de l'horizon de l'Observateur. Car alors on pourra mirer cet objet au moyen du petit mouvement vertical que nous avons supposé (296) à la lunette de l'alidade, en laissant toujours le plan du demi-cercle dans celui de l'horizon.

298. Avant de se servir d'un instrument, il est essentiel de s'assurer de sa bonté. On peut exiger de l'Artiste qui le fournit, qu'il en démontre la justesse, ou qu'il donne les moyens de la reconnoître. Pour les opérations ordinaires, les petites imperfections sont insensibles, les erreurs considérables sont aisées à découvrir; nous ne dirons donc que peu de mots sur ce point.

Il faut d'abord vérifier dans un graphometre si les rayons visuels qui passent par les pinnules fixes et par celles de l'alidade, se coupent dans le point précis qui correspond au centre du demi-cercle; et si l'arc de 180° est juste, c'est-à-dire si les divisions marquées 0 et 180 sont aux points précis où elles doivent être. Pour ces vérifications il suffit d'observer si les quatre fils se confondent ensemble dans un même plan, lorsque les zéros des verniers de l'alidade coincident parfaitement avec les divisions marquées 0 et 180; si cela a lieu dans les deux positions de l'alidade, c'est-à-dire, soit

Fig.27 lorsque la pinnule E est du côté de la pinnule D, soit lorsque cette pinnule E est du côté de la pinnule B; et enfin si, en tournant l'alidade, le bord des nonius couvre ou coupe une partie égale dans chacune des divisions du demi-cercle. Ces opérations feront reconnoître si le point A, sur lequel se meut l'alidade, est vraiment le centre de l'instrument; s'il est, comme il doit l'être, dans la commune intersection du plan des fils du demi-cercle et du plan des fils de l'alidade; enfin si l'arc de 180° est absolument juste. Après cette derniere vérification, on pourra reconnoître s'il y a des erreurs sensibles dans la position des autres divisions, en y présentant successivement le nonius, ou mesurant les cordes avec un compas à pointes très fines.

299. Si le graphometre est garni de lunettes, il n'exige alors qu'un nonius du côté de l'objectif de la lunette mobile : on mettra la ligne de foi de ce nonius en coïncidence avec la premiere division
Fig.28 B du demi-cercle, et l'on observera si les fils verticaux des deux lunettes couvrent les mêmes points d'un même objet, comme C; (cette opération suppose que les deux fils soient bien verticaux; ce dont on peut s'assurer d'abord, en observant s'ils se confondent avec un fil à plomb pendant à une certaine distance). Ensuite on tournera l'alidade de maniere que la ligne de foi du nonius soit en coïncidence avec la derniere division du demi-cercle en D. Si le fil vertical, ou l'intersection des deux fils, se trouvoit ne pas tomber alors sur des points remarquables d'un objet quelconque, il faudroit en planter un, tel que E. Après avoir reconnu avec certitude les points précis de l'objet E, couverts par le fil de la lunette mobile, et ceux de l'objet C, couverts par le fil de la lunette fixe, on tournera le graphometre de maniere que le point D se trouve où étoit d'abord le point B, et *vice versâ;* (ce qui s'obtient facilement si, avant de mouvoir le graphometre, on marque sur le terrein, au moyen d'un fil à plomb, les points correspondants aux points B et D). Alors on observera si le fil de la lunette fixe étant dirigé sur les points remarqués de l'objet E, celui de la lunette mobile couvre

de même aussi les points reconnus de l'objet C. Par cette opération l'arc de 180° sera vérifié, ainsi que la position exacte du centre de l'instrument dans l'intersection commune aux plans verticaux des axes optiques des deux lunettes.

Les autres vérifications se feront comme nous avons dit (298).

Dans toutes ces opérations, que, pour plus de sûreté, il est à propos de répéter plusieurs fois; s'il se trouvoit quelque erreur, il faudra en apprécier la quantité par le moyen du nonius ou de la vis qui le fait marcher (296), si les mouvements de cette vis sont mesurés par un index. Et en se servant de l'instrument, on tiendra compte des erreurs découvertes.

300. Un autre instrument d'un usage très étendu, est le *quart de cercle*, qui n'est que la moitié ABL du graphometre. Aussi ne mesure-t-il les angles obtus que lorsqu'on les a divisés en deux angles aigus, par le moyen d'un objet intermédiaire quelconque. Dans la vérification de cet instrument, il faut comparer l'arc de 90° à quatre angles droits pris successivement, en faisant mouvoir l'instrument autour de son centre, comme nous l'avons dit (299) pour la comparaison de l'arc de 180° du graphometre à deux angles de 180° chacun. Lorsqu'il s'agit du graphometre, l'erreur trouvée par la comparaison est le double de l'erreur de l'arc de 180°; et si l'on opere avec le quart de cercle, l'erreur trouvée en mesurant le 4e angle est le quadruple de l'erreur de l'arc de 90°. Fig.27

C'est le quart de cercle qu'on emploie dans les opérations les plus délicates, parcequ'à volume et poids égaux, il peut avoir un rayon plus grand que le graphometre, et que plus le rayon est grand, plus on a les angles avec une précision rigoureuse. Quant aux méthodes des vérifications scrupuleuses du quart de cercle pour parvenir à reconnoître jusqu'à une seconde d'erreur, cette matiere a été épuisée par M. l'Abbé Boscovich dans l'Ouvrage cité (293). On peut encore avoir recours aux Éphémérides de Milan pour 1782; on y trouvera un résumé bien fait des vérifications des instruments de l'Observatoire de Milan, auxquelles on a apporté

de exactitude. Enfin le Liv. XIV de l'Astronomie de nde réunit d'excellents préceptes pour la vérification tes sortes d'instruments astronomiques.

Le célebre Astronome Tobie Mayer a imaginé un instrument très simple, et commode pour relever les angles. On peut voir la description dans le Tom. II des Actes de Gottingue.

Il seroit trop long d'énoncer et de décrire tous les instruments qui ont été imaginés pour relever les angles. Nous nous contenterons d'avoir parlé de ceux qui sont les plus connus et les plus en usage. Nous nous réservons de parler de la boussole, (339).

Nous terminerons en observant que si dans ces instruments on préfere les lunettes aux pinnules, c'est qu'avec celles-ci, comme on ne distingue pas bien les objets éloignés, on ne peut répondre d'une erreur de 2'.

De la mesure des hauteurs.

302. *On demande la hauteur d'un clocher,* représentée par la ligne ponctuée AB, B étant le centre de la base du clocher ou le point correspondant perpendiculairement au point A. Fig. 29

À une distance convenable (254), j'établis le graphometre monté verticalement, c'est-à-dire dans le plan de la ligne verticale AB, (il en seroit de même du quart de cercle), de sorte qu'en même temps le diametre CD soit parallele à l'horizon; ce dont je m'assure par le fil à plomb, qui, dans ce cas, appliqué légérement au plan de l'instrument, doit battre à la fois sur la division marquée 90 et sur le centre N. Je fais tourner l'alidade EF jusqu'à ce que j'apperçoive sur le milieu du fil de ses pinnules ou de sa lunette le sommet A du clocher. Les degrés et minutes de l'arc FD sur le graphometre, seront la mesure de *l'angle d'élévation* ANH. Du point G sur le terrein auquel correspond à plomb le centre N de l'instrument, je mesure (289 et suiv.) la distance horizontale GK = NH, en suivant toujours la direction de la lunette

lunette CD ; j'ajoute à GK la distance BK = MH. Connoissant NM et ANM, je trouverai AM, comme dans l'exemple (215) ; j'y ajouterai (ce qu'on doit faire dans toutes les opérations semblables) l'élévation, au-dessus du terrein, de la lunette fixe, c'est-à-dire GN = KH = BM, et j'aurai la hauteur cherchée AB.

303. Proposons-nous de *déterminer une hauteur inaccessible par le pied.*

Soit CD la hauteur qu'on veut déterminer. Puisque la riviere AD empêche de mesurer une distance horizontale du point D à la station de l'Observateur ; on mesurera une ligne horizontale AB dans le plan de la hauteur CD, et on prendra les angles d'élévation B et CAD. Dans le triangle CAB on connoîtra les trois angles et le côté AB ; on cherchera la valeur de l'un des deux autres côtés, (224) ; et alors on aura CD = AC sin.A, ou bien CD = BC sin.B, (211). Fig. 1

304. *Déterminer une hauteur, dans le plan de laquelle on ne peut mesurer une distance horizontale.*

Soit AB la hauteur cherchée. Choisissez deux stations, C et D, dont l'une soit dans le même plan horizontal que le point A, et telles que vous puissiez mesurer leur distance effective CD, (291). Mesurez les angles BCD et CDB, en plaçant l'instrument dans le plan oblique des trois points B, C, D. De celle des deux stations qui est dans le plan horizontal de A, prenez avec l'instrument dirigé verticalement, l'angle d'élévation BDA, ou BCA. Connoissant les angles et l'un CD des côtés dans le triangle BCD, vous trouverez l'un des deux autres côtés BC, BD ; et vous aurez AB = BD sin.BDA, ou bien AB = BC sin.BCA. Fig. 3a

On verra (344) comment, étant en B, et une hauteur AB étant donnée, on peut déterminer une distance horizontale CD.

305. Lorsque l'Observateur est à une distance considérable de l'objet, les hauteurs déterminées par les méthodes précédentes ont besoin de quelques corrections.

En premier lieu l'horizon de l'Observateur n'est pas le même
Fig. 31 que celui de l'objet observé. Soit C le centre de la Terre, R la cime d'une montagne, A le point d'où l'on a observé l'angle d'élévation RAB; ORI, perpendiculaire à CR, est l'horizon du point R; BAD, perpendiculaire à CA, est l'horizon du point A. Si on prend CE = CA, RE sera la vraie hauteur de la montagne, relativement au point A. Si on mene la corde ponctuée AE, *le véritable angle d'élévation* de la montagne seroit RAE; mais RAB est *l'angle d'élévation apparent*, c'est-à-dire celui qui a été observé avec les instruments, lequel est toujours relatif à l'horizon BAD de l'Observateur. Donc la hauteur de la montagne, déterminée par les méthodes précédentes, sera BR et non RE.

De plus, dans le calcul des hauteurs, nous avons toujours supposé RBA = 90°; à la rigueur RBA égale la somme des deux angles intérieurs C et BAC, ou RBA = 90° + C; mais comme C n'est jamais que de très peu de minutes (290), on peut résoudre le triangle RBA comme rectangle en B, sans qu'il en résulte une erreur sensible dans le calcul de BR.

BE est donc la seule erreur dépendante de la différence des horizons, de laquelle il soit nécessaire de tenir compte. Pour la calculer, on se servira avec avantage de la formule (286) qui donne $BE = \frac{AB^2}{2BC}$. En voici un exemple.

306. Les Académiciens François (Bouguer, *Figure de la Terre*) mesurerent au Pérou une base inclinée (291), dont la longueur AR se trouva de 6274, 057 toises, et ils observerent l'angle RAB de 1° 5′ 43″, l'effet de la réfraction (307) déduit. En faisant BR = AR × sin.RAB, on trouve BR = 119,93 toises. Pour calculer BE, on peut prendre AR au lieu de AB, et CE au lieu de BC, les erreurs qui en résultent étant insensibles. On a déja le log. de AR employé dans le calcul de BR, et 2CE est le diametre de la Terre. (Le diametre moyen, déduit des mesures de degrés, prises

dans la Laponie, à Paris et au Pérou, est exactement de 6543373 toises). Avec ces données on fait promptement le calcul qui suit :

$$\begin{aligned} \log.AR &= 3,797548 \\ \text{Idem} &= 3,797548 \\ \text{compl. log. } 2\,CE &= 3,184198 \\ \log.BE &= 0,779294 = \log.6,02. \end{aligned}$$

En ajoutant BE à BR, on a la hauteur vraie de la montagne ou RE = 125,95 toises. Et en effet, par un calcul rigoureux, en résolvant le triangle RAE, on trouve RE = 125,97.

Par la formule $BE = \frac{AB^2}{2\,BC}$, on reconnoît aisément si BE peut se négliger. Par exemple, lorsque AB = 1000 toises, BE = 0,15 toises seulement.

307. En second lieu les réfractions produisent une erreur, lorsqu'on prend les angles d'élévation, comme RAB. Les rayons de lumiere, qui traversent l'atmosphere obliquement, se plient continuellement vers la Terre, à cause de l'attraction progressivement plus grande qu'ils éprouvent en traversant les couches de plus en plus denses de l'atmosphere. Ce changement de direction se nomme *réfraction;* il en résulte que les rayons décrivent une ligne courbe, et que l'œil voyant l'objet par la tangente de cette courbe, *l'effet de la réfraction est de faire voir les objets plus élevés qu'ils ne le sont réellement.* Le développement de la théorie de ce phénomene n'entre pas dans le plan de ce Traité ; mais le fait est constant, et il est facile de s'en convaincre par l'expérience.

Soit donc C le centre de la Terre. Par la nature des triangles rectilignes, on a C = 180° — CRA — CAR ; mais CRA = 90° — IRA, et CAR = 90° + RAB. Par la substitution de ces deux valeurs, la premiere équation devient C = IRA — RAB. L'angle C est toujours connu quand on connoît AR que l'on peut employer sans erreur sensible, au lieu de l'arc AE, dans la proportion donnée (290). Si donc se plaçant en R, on mesure avec un instrument l'angle IRA, et du point A l'angle RAB, et que la

Fig.31 différence de ces deux angles ne se trouve pas égale à C, ce dont il s'en faudra sera la somme des deux réfractions. En effet si, l'Observateur étant placé en R, la réfraction fait voir le point A plus élevé qu'il n'est, l'angle observé IRA sera donc plus petit qu'il n'est réellement. Par la même raison si du point A on voit le point R au-dessus de sa vraie position, l'angle RAB sera donné trop grand par l'observation. La différence de ces deux angles sera donc trouvée un peu trop foible, et ce qui lui manquera est la somme des deux erreurs causées par la réfraction qui, par ce moyen, sera connue et déterminée.

308. EXEMPLE. Les PP. Boscovich et Maire, dans l'Ouvrage cité (293), rapportent qu'observant, de l'embouchure de *l'Ausa*, la cime du mont *Carpegna*, ils trouverent l'angle RAB d'élévation apparente $= 2° 7'$. Du point R ils observerent *l'angle de dépression apparente* IRA $= 2° 24' 10''$. (La dépression *vraie* seroit l'angle formé par RA et par une corde parallele à AE, qui, partant du point R, se termineroit au rayon CA prolongé). Donc la différence des deux angles ou IRA — RAB $= 17' 10''$. Mais la distance AR, réduite, pour plus d'exactitude, à AE, avoit déjà été calculée, par la méthode donnée (50), de 18218,25 toises; ce qui donne C $= 19' 9''$, (290). La somme des deux réfractions est donc $19' 9'' - 17' 10'' = 1' 59''$. En prenant $1'$ pour la demi-somme, on a $2° 6'$ pour la valeur réelle de l'angle RAB, et $2° 25' 10''$ pour celle de IRA.

Quand on a calculé l'angle C, on connoît aussi BAE $= \frac{1}{2}$C, puisque l'angle formé par la tangente et par la corde, est égal à la moitié de l'arc intercepté. On trouve dès-lors promptement la hauteur RE par la solution du triangle REA. En le considérant, pour abréger, comme rectangle en E, on a RE $=$ AE tang.RAE $=$ 18218,25 $\times$ tang.$2° 15' 34''$,5 $=$ 718,85. Le P. Maire fixe à 718 toises la hauteur du mont *Carpegna*.

309. Quand la différence de hauteur, entre deux objets, est très petite, on peut avoir un angle de dépression tant d'un côté

que de l'autre. Alors les deux horizons se rencontrent entre les deux objets. Par exemple le point B observé du point E, est déprimé de la quantité BEF, EF étant l'horizon du point E ; et si du point B, ayant OR pour horizon, on observe le point E, on le voit déprimé de la quantité RBE. En procédant comme on a vu (307), on trouvera dans ce cas BCR = BEF + RBE ; et comme chacun de ces angles paroît, à cause de la réfraction, plus petit qu'il n'est réellement, leur somme dans ce cas sera moindre que BCR, de la somme des deux réfractions. Fig. 6.

310. En faisant un grand nombre d'observations de ce genre, on peut en conclure une regle générale assez juste pour corriger l'effet de la réfraction sur un angle observé, lorsqu'on ne peut ou qu'on ne veut pas déterminer chaque fois cette correction par l'observation de deux angles. Les PP. Boscovich et Maire établissent que l'effet de la réfraction est la 18e partie de l'arc de la Terre intercepté ; ce qui se trouve à-peu-près exact dans l'exemple (308), dans lequel C étant de 19′, la réfraction donnée par l'observation est de 1′. Lambert, dans un Ouvrage intitulé *les Propriétés remarquables de la route de la Lumiere*, &c., trouve que la réfraction est la 14e partie de l'arc de la Terre intercepté : M. de la Lande, Cassini de Thuri, et quelques autres, ont adopté de même la quatorzieme partie. On peut prendre le milieu entre ces estimations ; car à cause de l'inconstance des réfractions on ne doit pas compter sur une très grande précision. Les PP. Boscovich et Maire enseignent que moins l'objet est élevé sur l'horizon, plus la réfraction est sujette à varier d'un moment à l'autre. Ils recommandent d'éviter, pour ces observations, les heures trop voisines du lever et du coucher du soleil, et de ne pas avoir le soleil en face. Observons de plus, que les réfractions sont en général très irregulieres, lorsque quelque cause météorologique fait varier rapidement le barometre.

311. La hauteur des montagnes peut difficilement être déterminée avec précision par les méthodes précédentes ; l'angle d'élé-

vation est toujours trop petit, de sorte qu'une légere erreur dans la mesure de cet angle (254) en produit une sensible dans la hauteur cherchée. Et il est très facile de commettre une erreur d'une minute au moins, soit par l'inconstance des réfractions, soit à cause de la petitesse des instruments qu'on transporte pour de semblables opérations, soit par la difficulté de l'observation, attendu les vacillations que les objets terrestres paroissent éprouver dans la lunette à raison des vapeurs de l'atmosphere, soit enfin parceque le vent permet rarement de faire avec exactitude l'observation très essentielle du fil à plomb (302).

Supposons que les observations du P. Maire aient été affec-
Fig. 31 tées d'une erreur de $34'' \frac{1}{2}$ en plus dans l'angle RAE, (308); on trouvera que $18218,25 \times \text{tang. } 2^\circ\ 15' = 715,8$. Donc une erreur de $34'' \frac{1}{2}$ seulement en produit une de trois toises sur la hauteur cherchée de la montagne. Et M. l'Abbé Boscovich prévient (Liv. 4, art. 258) que la derniere des causes que nous venons de citer, c'est-à-dire l'oscillation du fil à plomb, occasionnée par l'agitation de l'air, peut seule avoir apporté dans ces observations une erreur de plus d'une minute.

Pour mesurer plus exactement et avec plus de sûreté la hauteur d'une montagne, il vaut mieux se servir du barometre, en observant les préceptes de M. de Luc dans ses *Recherches sur les modifications de l'atmosphere,* Ouvrage dont le mérite est assez connu. M. Megnié, très habile Constructeur d'instruments astronomiques à Paris, fait des barometres à niveau constant, divisés avec une telle exactitude, qu'on peut y observer avec facilité une variation d'un cinquantieme de ligne.

De la mesure des distances.

Fig. 7. 312. Soit BC la largeur d'une riviere, ou un intervalle quelconque, dont l'un au moins des points extrêmes, par exemple C, soit accessible; on demande la valeur de BC.

Je mesure (289 et suiv.) une base comme AC, dans la direction et de la longueur les plus convenables (332 et suiv.). Je mesure encore (296 et suiv.) les angles A et C ; le troisieme, B, me sera connu, et je calculerai la distance BC, comme dans l'exemple (50).

313. Si on opere avec la planchette, on procédera comme il suit. On formera sur le papier, de la maniere indiquée (294), un angle *a* égal à l'angle A sur le terrein ; on plantera un piquet au point A ; on transportera la planchette en C ; et là, après avoir placé, au moyen des pinnules, la ligne *ca* dans le plan vertical de CA, et de sorte que le point *c* réponde d'à-plomb au point C, on tournera l'alidade, en la centrant au point *c*, jusqu'à ce que l'objet situé en B se trouve de même au milieu des pinnules. Alors on menera le long de la regle la ligne *cb* jusqu'à la rencontre de la ligne *ba* ; et on aura sur le papier un triangle *cab* semblable au triangle CAB sur le terrein. En supposant que la base mesurée AC soit de mille toises, si on appelle x le nombre des toises de l'intervalle cherché BC, on aura $ac : bc :: 1000 : x = 1000 \times \frac{bc}{ac}$. Pour connoître x, il suffit donc de connoître le rapport entre *bc* et *ac* ; or on a facilement ce rapport par une échelle quelconque de parties égales, en déterminant exactement avec un compas combien de ces parties répondent à l'intervalle *bc*, et combien à l'intervalle *ac*.

Il est évident que la longueur de *ac*, qui représente la base sur le papier, est arbitraire, et que de cette ligne dépend la grandeur du triangle *abc*.

314. Déterminer la distance CD, dont les deux points extrêmes sont l'un et l'autre inaccessibles. Fig. 32

Mesurez une base AB, que vous choisirez aussi avantageusement qu'il sera possible (332 et suiv.) : relevez, du point B, les angles CBD, CBA, et du point A, les angles CAD, DAB ; dans les triangles CAB, DAB, vous connoîtrez alors les trois angles

Fig. 32 et un côté AB ; calculez (IV. 1°) les côtés AC, AD, ou les côtés BC, BD; et deux côtés avec l'angle compris vous étant connus dans le triangle CAD, ou dans le triangle CBD, vous trouverez (IV. 3°) le troisieme côté, qui est la distance cherchée CD.

315. Si les angles ont été pris avec la planchette, les lignes tirées sur le papier seront 1°. la base *ab* d'une longueur à volonté; 2°. les lignes indéfinies *ac*, *ad*, que l'on mene, en relevant les angles au point A; 3°. les lignes *bc*, *bd*, menées respectivement jusqu'à la rencontre des deux précédentes, pour former les angles relevés du point B. Cela posé, entre les points d'intersection *c* et *d* on menera la ligne *cd*, et on aura sur le papier une figure *abdc*, semblable au quadrilatere ABDC sur le terrein; et par conséquent, le nombre des toises de AB étant connu, on aura par une échelle de parties égales, le rapport $\frac{cd}{ab}$, et on déduira de la proportion *ab* : *cd* :: AB : CD la valeur en toises de la distance cherchée CD.

On voit combien l'usage de la planchette est commode, puisqu'elle donne les distances, sans qu'il soit besoin de connoître la grandeur des angles, ni de résoudre aucun triangle. Observons cependant qu'elle les donne avec moins de précision, les opérations graphiques ne pouvant jamais atteindre à l'exactitude du calcul.

316. Si les points A, B, C, D, ne sont pas tous quatre dans un même plan, la somme des angles CAD et DAB, mesurés dans le plan de chaque triangle respectif, ne sera pas égale à l'angle CAB, comme nous le verrons bientôt (329), et de même on n'aura point CBD + ABC = ABD. Cette erreur ne peut être corrigée dans l'usage de la planchette; mais elle est ordinairement légere et même insensible. Dans les opérations délicates on se sert du graphometre ou du quart de cercle, et on corrige l'erreur par le calcul, (320 et suiv.), ou, pour éviter toute erreur sur la distance cherchée CD, on mesure aussi les angles CAB, ABD, et on n'emploie, pour la solution de chaque triangle, que les angles

de ce triangle, qui ont été donnés immédiatement par l'observation.

317. Si on ne pouvoit mesurer commodément une base AB, telle que de deux de ses points, A et B, on pût découvrir les objets C et D; alors on feroit, pour déterminer la distance AB, les opérations indiquées (312, 313), ou celles exposées (314, 315), selon que se trouvera située la base qu'on pourra mesurer. L'intervalle AB étant ainsi connu, on en déduira CD, comme nous l'avons dit.

Il est facile de concevoir qu'une seule base étant mesurée, on peut, en ne mesurant plus que les angles, passer de triangle en triangle, et déterminer les distances respectives de tous les lieux d'une province, d'un royaume, &c.

De la réduction des angles au centre de la station.

318. Il arrive rarement qu'on puisse relever un angle en établissant l'instrument au centre de l'objet qu'on a observé des autres points de station. Si cet objet est, par exemple, la croix d'un clocher, la cime d'un arbre, une cheminée, &c., l'angle relevé ne peut être le même que s'il eût été observé précisément du centre de ces signaux, et il faut alors le réduire à ce point. La correction n'est ordinairement que de quelques secondes; on ne la calcule alors que dans les opérations où l'on apporte le plus grand scrupule. Voici comment on la détermine.

Soit *mnro* la base d'un clocher dont la pointe élevée verticalement sur le centre C a été observée de la station A ou B, en relevant l'angle CAB ou ABC; et soit ACB l'angle qu'on veut connoître. Si l'on ne peut placer commodément l'instrument qu'au point E, l'angle observé sera AEB; il faut le réduire à l'angle ACB. Pour y parvenir, faisons ACB — AEB = — δE, et observons que les deux triangles ACB, AEB ont un côté commun AB; nous aurons (284), Fig.33

$$-\delta E = \left(\frac{\delta AE \cot A}{AE} + \frac{\delta BE \cot B}{BE}\right) R''.$$

Fig.33 Si le point E est plus distant du point A que le point C, alors δAE sera négatif; si la distance est égale, $\delta AE = 0$, et le second membre de la formule se réduit alors à un seul terme. (Tout ceci doit s'entendre de même de δBE). On se rappellera de plus que la cotangente d'un angle obtus est négative; et en employant les signes convenables, la formule servira pour toutes les positions possibles du point E, relativement au point C. Quand le second membre de l'équation se trouve être négatif, la correction δE est positive, et l'on a $E < ACB$.

Pour calculer la formule, il faut connoître δAE et δBE. Si on prend $AD = AG = AE$, et $AF = AC$, on aura $\delta AE = GC = DF$. Quand on ne pourra mesurer GC, il sera toujours facile de mesurer DF, en prenant à vue d'œil sur le terrein deux points, D, F, à-peu-près aussi distants du point A, que les points E et C; les petites erreurs sur cette mesure sont insensibles dans le calcul. (On s'y prendroit de même pour connoître $\delta BE = CH$). Quant aux autres quantités de la formule, il suffit de les connoître à-peu-près.

319. Il y a un moyen plus expéditif, qui est celui qu'on enseigne ordinairement, mais qu'on n'a appliqué aux différents cas que par des regles un peu étendues. Il consiste à mesurer GE, EH. Alors on a $GAE = \frac{GE}{AE} \times R''$, en prenant l'angle GAE au lieu du sinus; on a de même $EBH = \frac{EH}{BE} \times R''$: or $GAE + EBH = AEB - ACB$; et par conséquent

$$GAE + EBH = \delta E.$$

Pour employer cette équation dans tous les cas, on donnera le signe négatif au petit angle GAE, quand il sera en dedans du triangle ABC; on en usera de même pour le petit angle EBH; et l'on aura toujours ainsi la correction δE avec le signe qu'il faudra lui donner en l'appliquant à l'angle observé AEB.

Concluons qu'il y a deux positions à choisir de préférence, lorsqu'on le peut. La plus avantageuse est d'établir le centre de

l'instrument en un point comme G ou H, sur la direction de l'une des lignes AC ou BC. Alors l'un des deux petits angles est nul, et le calcul de l'autre seulement donne la réduction au centre par le moyen de la derniere équation. Si l'on ne peut prendre cette position, on fera ensorte de placer l'instrument de maniere qu'on ait δAE = o, ou δBE = o. Alors le calcul de la formule (318) sera réduit à un seul terme.

De la réduction des triangles d'un plan à un autre plan.

320. Après la réduction de chaque angle observé, au centre de chaque station respective, il faut ordinairement réduire les parties d'un ou de plusieurs triangles à un même niveau.

Supposons que les lignes AP, AE, PE soient trois cordes d'arcs terrestres, ou, ce qui revient au même, que les points A, P, E soient à égale distance du centre de la Terre; supposons encore le point R plus élevé que ces trois points de la quantité RE : il s'agit de réduire au triangle APE le triangle APR, dont les parties auront été déterminées par les méthodes précédentes. Nous considérerons RE comme étant perpendiculaire aux cordes AE, PE, quoique chacun des angles REA, REP, soit égal à 90°, plus la moitié de l'arc soutenu par chacune de ces cordes respectivement, comme il est aisé de le voir dans la figure 31, pour l'angle REA formé par une corde et une sécante. Dans la pratique il ne résulte qu'une erreur insensible de cette supposition, d'ailleurs très avantageuse pour simplifier les corrections et trouver des regles générales pour la réduction des triangles d'un plan à un autre. Fig. 34

321. Avant d'aller plus loin, il est bon de se convaincre que les parties du triangle APR ne sont point égales aux parties correspondantes du triangle APE, à l'exception du côté commun AP. En effet AR est > AE, comme il est facile de le reconnoître dans la fig. 31. Par la même raison PR est > PE; et en comparant les triangles APR, APE aux triangles ACB, AEB de la fig. 33, qui

sont dans les mêmes circonstances, mais couchés sur un plan commun, on verra d'un coup-d'œil que le triangle qui a deux côtés plus longs, n'a pas les angles égaux à celui du triangle qui a deux côtés plus courts.

Fig.34 322. Cela posé; on demande que le triangle APR soit réduit au triangle APE, dont les trois sommets A, P, E, sont supposés à une égale distance du centre de la Terre. Nous appellerons *horizon commun* de ces trois points, la section ou le plan qui leur est commun. Cherchons d'abord l'angle PAE, étant donnés l'angle PAR et l'angle vrai d'élévation RAE, (305).

Dans les deux triangles rectangles AER, PER, qui ont un côté commun RE, on a $RE^2 = AR^2 - AE^2 = PR^2 - PE^2$; donc $AR^2 - PR^2 = AE^2 - PE^2$. Ajoutant des deux côtés AP^2, et divisant l'équation par 2 AP, on aura $\frac{AP^2 + AR^2 - PR^2}{2\,AP} = \frac{AP^2 + AE^2 - PE^2}{2\,AP}$. Donc (232), cos.PAR × AR = cos.PAE × AE; et par conséquent (211)

$$\text{cos.PAE} = \frac{\text{cos.PAR}}{\text{cos.RAE}}.$$

On trouvera de même $\text{cos.APE} = \frac{\text{cos.APR}}{\text{cos.RPE}}$. D'où l'on tire cette regle générale pour réduire les angles qui ont leur sommet sur le plan de réduction : *Le cosinus de l'angle réduit est égal au cosinus de l'angle observé, divisé par le cosinus de l'angle d'élévation.*

323. Lorsqu'on aura réduit les angles en A et en P, le troisieme, E, sera connu. Cependant nous allons donner une formule pour réduire, quand on le voudra, l'angle R indépendamment des deux autres. Cette formule nous sera encore utile pour la solution d'un autre problême intéressant (344).

Dans les deux triangles APR, APE, qui ont un côté commun AP, on a (III. 7e), $AP^2 = AR^2 + PR^2 - 2\,AR \times PR \times \text{cos.ARP} = AE^2 + PE^2 - 2\,AE \times PE \times \text{cos.AEP}$. De la

dernière équation on tire $\cos.AEP = \frac{AR \times PR \times \cos.ARP - RE^2}{AE \times PE}$; ce qui donne (211, 210)

$$\cos.AEP = \frac{\cos.ARP - \sin.RAE \sin.RPE}{\cos.RAE \cos.RPE},$$

ou, pour plus de facilité dans le calcul numérique,

$$\cos.AEP = \text{tang.RAE tang.RPE} \left(\frac{\cos.ARP}{\sin.RAE \sin.RPE} - 1\right).$$

De la première de ces deux formules, plus facile à énoncer, je déduis cette règle pour réduire l'angle unique ayant son sommet hors du plan de réduction : *Le cosinus de l'angle réduit est égal au cosinus de l'angle observé, duquel on aura soustrait le rectangle des sinus des angles d'élévation, et qu'ensuite on aura divisé par le rectangle des cosinus de ces mêmes angles.*

324. La réduction des côtés n'a nulle difficulté. AE = AR cos.RAE, PE = PR cos.RPE.

Quand on veut procéder avec une extrême exactitude; au lieu de faire les réductions précédentes, on peut résoudre les triangles RAE, RPE, comme obliquangles (320); et après avoir déterminé les côtés du triangle APE, calculer les angles par les formules (IV. 5e ou 6e, &c.).

Quoiqu'indépendamment des angles d'élévation, il soit toujours bien d'observer aussi les angles correspondants de dépression, puisqu'ils se servent réciproquement de vérification, et qu'ils donnent ensemble la valeur actuelle de la réfraction (307, 308); cependant nous n'en faisons aucune mention dans les formules précédentes, parce qu'un triangle se réduit ordinairement au plan des points les plus bas. Au surplus les formules sont les mêmes dans les deux cas.

325. Soit maintenant le triangle AR*r*, dont on demande la réduction au plan AE*e*, où les points E, *e*, des lignes verticales RE, *re*, sont supposés à la même distance du centre de la Terre, que le point A. Fig. 35

Qu'on prolonge le plan AE*e* jusqu'en P, c'est-à-dire jusqu'à la

la ligne RP, menée par les points R, *r*. Les verticales t toujours supposées perpendiculaires au plan AE*e*P, séquent aux lignes de ce même plan, avec lesquelles ntrent.

n en premier lieu comment nous réduirons l'angle connu EA*e*.

.*r*PA ou sin.RPA $= \frac{Ar \text{ sin.PA}r}{Pr} = \frac{AR \text{ sin.PAR}}{PR}$. Mais Pr : PR :: *re* : RE :: A*r* sin.*r*A*e* : AR sin.RAE ; en substituant ce dernier rapport au premier, dans la derniere équation, nous aurons $\frac{\text{sin.PA}r}{\text{sin. }rAe} = \frac{\text{sin.PAR}}{\text{sin.RAE}}$; ou sin.PAR : sin.PA*r* :: sin.RAE : sin.*r*A*e* ; d'où nous tirerons (10), (II. 12°), tang.$\frac{1}{2}$(PAR + PA*r*) : tang.$\frac{1}{2}$(PAR — PA*r*) :: tang.$\frac{1}{2}$(RAE + *r*A*e*) : tang.$\frac{1}{2}$(RAE — *r*A*e*). Mais PAR — PA*r* est l'angle connu RA*r* ; et les deux derniers termes sont composés des angles d'élévation RAE, *r*A*e*, supposés connus par l'observation ; donc le premier terme de l'analogie sera seul inconnu ; et nous aurons

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{PAR} + \text{PA}r) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{RA}r \times \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{RAE} + rAe)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{RAE} - rAe)}.$$

Jusqu'à présent on n'avoit pu obtenir cette formule que de la Trigonométrie sphérique.

Connoissant la demi-somme et la demi-différence de PAR et PA*r*, on a (230) la valeur absolue de chacun de ces angles. Ensuite on a PAE et PA*e* par le moyen de la formule (322). La différence de ces deux angles est l'angle cherché EA*e*.

Quoique les réductions se fassent d'ordinaire, comme nous l'avons dit, au niveau du point le plus bas, cependant si des deux objets R, *r*, l'un étoit élevé et l'autre abaissé, on voit aisément que dans ce cas le point P tomberoit entre les deux points E, *e*, et que l'angle connu RA*r* seroit égal à PAR + PA*r* ; alors dans la derniere analogie le terme inconnu seroit le second.

326. *Si les angles d'élévation*, RAE, *r*A*e*, *des deux objets étoient égaux*, l'équation $\frac{\text{sin.PA}r}{\text{sin.}rAe} = \frac{\text{sin.PAR}}{\text{sin.RAE}}$ fait voir qu'alors sin.PA*r* =

sin.PAR, ou que (19), PAR = 180° — PA*r*. Cela posé, la formule (322) fait voir de même que cos.PAE = cos.PA*e*, ou que PAE = 180° — PA*e*. Donc EA*e* = PAE — PA*e* = 180° — 2 PA*e*, ou PA*e* = 90° — $\frac{1}{2}$ EA*e*; et par conséquent cos.PA*e* = sin.$\frac{1}{2}$EA*e*. On prouveroit de même que cos.PA*r* = sin.$\frac{1}{2}$RA*r*. Ainsi dans ce cas on aura recours à la formule (322), qui devient

$$\sin.\tfrac{1}{2}EAe = \frac{\sin.\frac{1}{2}RAr}{\cos.rAe}, \text{ ou}$$

le sinus de la moitié de l'angle réduit est égal au sinus de la moitié de l'angle observé, divisé par le cosinus de l'angle d'élévation.

Si l'un des deux objets étoit élevé et l'autre abaissé, de maniere que l'angle d'élévation fût égal à l'angle de dépression, on auroit PAR = PA*r* = $\frac{1}{2}$ RA*r*, et PAE = PA*e* = $\frac{1}{2}$ EA*e*; alors la formule seroit

$$\cos.\tfrac{1}{2}EAe = \frac{\cos.\frac{1}{2}RAr}{\cos.rAe}.$$

327. Pour réduire l'angle ARP à AEP ou AE*e*, par le moyen de la formule (323), il faut connoître l'angle RPE. Or si l'on observe qu'ayant PR : P*r* :: RE : *re*, on a PR : PR — P*r* :: RE : RE — *re*, et que PR : RE :: 1 : sin.RPE; on en conclura que R*r* : RE — *re* :: 1 : sin.RPE = $\frac{RE - re}{Rr}$ = $\frac{AR\ \sin.RAE - Ar\ \sin.rAe}{Rr}$. Prenant les sinus des angles au lieu des côtés opposés, on a

$$\sin.RPE = \frac{\sin.RrA\ \sin.RAE - \sin.ARr\ \sin.rAe}{\sin.RAr}.$$

Pour réduire l'angle A*r*R à l'angle A*e*E, on réduira d'abord, au moyen de la formule (323), l'angle A*r*P à l'angle A*e*P; le supplément de celui-ci sera l'angle cherché A*e*E.

On a déja vu (324) comment se réduisent les côtés adjacents aux angles d'élévation. Quant au côté R*r*, il est facile de trouver que E*e* = R*r* cos.RPE.

328. On s'épargnera les réductions précédentes, (qui ne sont point applicables à la planchette), lorsque le plan du quart de

graphometre sera disposé horizontalement, et que
pourront se mouvoir verticalement et se diriger vers
soit au-dessus soit au-dessous du plan de l'instru-
le se mesure alors sur le plan de l'horizon, puisque
est dans ce même plan, et que le mouvement vertical
lunette ne change rien à la position de l'alidade. Observons
cependant que dans ce cas chaque angle est mesuré sur le plan
horizontal de chaque station respective, et non sur un plan exac-
tement commun à tous les angles; ensorte que si les distances
.31 étoient considérables, l'inclinaison, par exemple, de l'horizon BA
du point A à l'égard de l'horizon OI du point R, pourroit quel-
quefois mériter attention. Cette inclinaison est visiblement égale à
l'angle C, ou à l'arc de la Terre compris entre les diverses sta-
tions.

329. Si l'on suppose que du point A on ait observé les distances
.35 angulaires de trois objets E, *r*, P, l'un desquels, *r*, soit plus élevé
que les autres, il est clair maintenant, par la formule (322), que
la somme des deux angles E*A*r, *r*AP, sera plus grande que l'angle
EAP, comme nous avions promis (316) de le démontrer.

330. Soit C le centre de la Terre, et soit représenté par la
Fig.36 corde AB le plan vu de côté d'un triangle réduit, dans toutes ses
parties, à un horizon commun, par les méthodes précédentes. Si
on veut abaisser ce triangle au plan de la corde DE, cela n'altérera
les angles en rien, puisque les deux plans sont paralleles; il faut
seulement diminuer les côtés. Cette correction est facile; on a
(278), δAB : δBC :: AB : BC :: (247) 2 cos.BAC : 1 ::
2 sin.$\frac{1}{2}$C : 1. Connoissant δBC = BE, quantité de laquelle on
veut que le plan du triangle soit abaissé, on trouvera par l'une
quelconque des trois analogies précédentes, la valeur de δAB,
ou la diminution à faire sur chaque côté du triangle qu'il s'agit
d'abaisser.

Quand on a une chaîne de triangles, dans chacun desquels on
a fait les réductions précédentes; par la derniere réduction ci-
dessus

dessus on les ramene tous à un même niveau, s'ils ne s'y trouvent pas. Ordinairement c'est au niveau de la mer que se fait la réduction générale.

Si au lieu des cordes on vouloit avoir les arcs correspondants, il est facile de les déduire des cordes ; car la troisieme équation (152) donne pour la différence de l'arc à la corde, $A - 2\sin.\frac{1}{2}A = \frac{\sin.^3\frac{1}{2}A}{3} = \frac{(2\sin.\frac{1}{2}A)^3}{24}$. Je n'emploie que le premier terme de la série, parce que les termes ultérieurs sont insensibles. On observera que pour avoir cette différence, et par conséquent l'arc, en parties de la corde exprimées, par exemple, en pieds, toises, &c., il faut diviser l'expression $\frac{(2\sin.\frac{1}{2}A)^3}{24}$, par le quarré du rayon de la Terre exprimé en mêmes parties de la corde ; ce qui est conforme aux regles données (290).

Des conditions les plus avantageuses des triangles ; et de la construction des signaux.

331. On ne doit pas se contenter de mesurer deux angles dans un triangle ; il faut toujours, lorsqu'on le peut, mesurer aussi le troisieme. Si la somme des trois angles réduits au centre des stations respectives est à très peu près de 180°, plus ou moins, on sera sûr de les avoir bien observés, et on partagera l'erreur également entre tous trois, lorsqu'on n'aura aucun motif particulier de douter d'une observation plus que d'une autre : si, par exemple, la somme des trois angles observés est de 180° 0′ 30″, on diminuera de 10″ chaque angle, avant de calculer les côtés et de faire la réduction à un horizon commun. Cette erreur est la plus grande qu'on puisse commettre, lorsqu'on observe attentivement, et qu'on emploie un quart de cercle de trois pieds de rayon, vérifié avec le scrupule nécessaire, comme on peut le voir dans les Ouvrages que nous avons cités (293). Si le rayon de l'instrument n'est que d'un demi-pied, l'erreur peut aller jusqu'à 3′, lorsque le nonius donne

la minute ; jusqu'à 6′, lorsqu'il donne les deux minutes, et ainsi de suite. Puisqu'il est donc absolument impossible d'éviter toute erreur en relevant les angles, il devient essentiel de faire ensorte que cette erreur influe le moins qu'il se pourra sur les côtés, dont la détermination est le but de ces opérations. Or cela se réduit à chercher de quelle grandeur doivent être les angles, pour que l'erreur dans leur mesure influe le moins possible sur les côtés. Il est vrai que les circonstances locales permettent rarement de choisir les triangles conformément aux regles que nous trouverons. L'exposition de ces regles sera néanmoins très utile, soit parcequ'elle fournira les moyens de s'y conformer, au moins d'aussi près qu'il sera possible, soit parceque, quand on sera forcé de s'en éloigner beaucoup, on pourra encore évaluer à-peu-près l'incertitude des résultats.

332. On sait que dans un triangle rectiligne la mesure des angles ne suffit pas (236) pour qu'on puisse déterminer les côtés : il est donc nécessaire d'avoir dans chaque triangle un côté ou mesuré immédiatement, ou déterminé trigonométriquement par le moyen d'autres triangles dans le premier desquels il faudra toujours qu'on ait mesuré une base à la toise. Le choix de la base est donc l'opération fondamentale. Aussi nous allons chercher d'abord quelle doit être sa longueur et sa direction, en supposant qu'on soit libre de les établir l'une et l'autre à volonté.

Fig. 7. Dans un triangle quelconque ABC, on a (III. 1°), AB sin.A $=$ BC sin.C. Soit AB la base, que nous supposerons mesurée sans erreur, parceque dans ces sortes de mesures, lorsqu'on y apporte quelque attention, l'erreur ne peut être sensible, et que d'ailleurs nous ne nous proposons ici que d'examiner l'erreur des angles. Faisant donc AB constant, et différentiant l'équation, on a AB cos.A δA $=$ sin.C δBC $+$ BC cos.C δC. Comme on ne connoît pas la grandeur précise de chacune des erreurs δA et δC des angles A et C, (l'angle B n'entre pas dans le calcul de BC), on supposera ces erreurs égales, d'autant plus qu'elles sont commises

avec un même instrument. Pour abréger, désignons par e chacune des erreurs ; l'équation donnera $\delta BC = e \times \frac{AB \cos.A - BC \cos.C}{\sin.C}$; et en substituant $\frac{BC}{\sin.A}$ à $\frac{AB}{\sin.C}$, on aura

$$\delta BC = e \times BC \ (\cot.A - \cot.C).$$

Cette équation (dans le calcul de laquelle on se souviendra que e, pris en secondes, doit être divisé par R″) donne l'erreur δBC que produiroient dans le calcul de BC les erreurs des angles A et C. Pour que ces erreurs (supposées égales) n'influent point sur le côté BC, il suffit donc qu'on ait A = C ; car il est évident qu'alors l'équation se réduit à zéro.

Mais comme les deux erreurs δA, δC, que la différentiation suppose dans un même sens, pourroient avoir été commises en sens opposés, et qu'alors on auroit $\delta BC = \pm e \times BC$ (cot.A + cot.C), il faut chercher de quelle grandeur doivent être les angles A et C, pour que la somme de leurs cotangentes ait la moindre valeur possible ; il est clair, par l'équation, que ce sera le cas de la moindre valeur de δBC. Or (II. 21°), $\cot.A + \cot.C = \frac{\sin.(A+C)}{\sin.A \sin.C} = \frac{\sin.(A+C)}{\frac{1}{2}\cos.(A \smile C) - \frac{1}{2}\cos.(A+C)}$, (II. 16°), ou $\cot.A + \cot.C = \frac{2 \sin.B}{\cos.(A \smile C) + \cos.B}$, (III. 57°, 66°). Donc quelle que soit la grandeur de l'angle B, la valeur du second membre sera toujours la moindre possible, lorsque cos.(A ⌣ C) sera le plus grand possible, c'est-à-dire quand on aura A = C.

D'où nous conclurons, pour regle générale, que *la condition la plus avantageuse d'un triangle, quand on veut déterminer un côté seulement, est que la base soit égale au côté cherché.* Telle est la condition essentielle. Quant à l'angle compris B, il est sans doute avantageux, dans le cas de cot.A + cot.C, qu'il soit le plus petit possible ; mais sa grandeur est indifférente dans le cas de cot.A — cot.C, (en supposant l'égalité des deux erreurs) ; et il est inutile de s'imposer des restrictions générales, à moins d'une nécessité générale. On donnera donc à la base la direction qui

paroîtra la plus commode, en observant seulement que les angles A et C ne soient pas trop petits.

333. Puisque par la regle précédente la base doit être égale au côté cherché, il est évident que *la condition la plus avantageuse d'un triangle, quand on veut déterminer deux côtés, est que le triangle soit équilatere.*

334. Rarement il arrive que l'on puisse mesurer commodément une base qui soit aussi longue que les côtés cherchés. En supposant donc que la longueur de la base soit limitée, mais qu'au moins sa direction puisse être choisie à volonté, cherchons quelle doit être cette direction dans le cas où l'on veut déterminer l'un seulement des deux autres côtés du triangle.

Soit toujours AB la base, BC le côté cherché. Il faut trouver la moindre valeur de cot.A $\mp$ cot.C, (332), lorsqu'on ne peut avoir A = C.

Or, 1°. dans le cas du signe négatif, on a (III. 51°, 104°), $\cot.A - \cot.C = \frac{AB - BC\cos.B}{BC\sin.B} - \frac{BC - AB\cos.B}{AB\sin.B} = \frac{AB^2 - BC^2}{AB \times BC\sin.B}$. On suppose que, par des circonstances locales, les grandeurs de BC et de AB ne soient pas arbitraires; autrement on accourciroit BC ou on allongeroit AB, jusqu'à ce qu'on eût AB = BC, (332). Donc, AB et BC étant constants, on voit clairement dans la derniere expression, que la moindre valeur de cot.A — cot.C a lieu lorsque B = 90°.

2°. Dans le cas du signe positif, on a (III. 101°), $\cot.A + \cot.C = \cot.A + \frac{\sqrt{(BC^2 - AB^2\sin.^2A)}}{AB\sin.A} = \cot.A + \sqrt{\frac{BC^2}{AB^2\sin.^2A} - 1}$. En raisonnant comme dans le cas précédent, on voit que la moindre valeur de la fraction sous le signe radical, aura lieu lorsqu'on aura A = 90°. Mais alors aussi cot.A disparoît; donc la moindre valeur de cot.A + cot.C a lieu lorsque A = 90°. Telle est la regle générale que donne Bouguer, (*Fig. de la Terre,* p. 88). Mais nous avons trouvé que dans le cas de cot.A — cot.C, il faut qu'on ait B = 90°. Donc comme les angles A et B ne peuvent

être tous deux droits, il est à propos, à ce qu'il nous semble, d'embrasser tous les cas en prenant un milieu, et faisant A = B.

Si l'on applique au côté AC tout ce que nous avons dit du côté BC, on aura des résultats semblables. Donc en général, *quand la base ne peut être égale au côté ou aux côtés cherchés, la condition la plus avantageuse du triangle est que la base soit la plus longue possible, et que les deux angles sur la base soient égaux.*

Je dis que *la base doit être la plus longue possible,* de peur que, de ce qu'on a trouvé qu'il seroit avantageux que chacun des angles sur la base fût de 90°, quelqu'un ne conclût qu'il est à propos que la base soit la plus courte possible. La regle fondamentale est que la base soit égale aux côtés cherchés, (332, 333); c'est une regle qu'il ne faut enfreindre que le moins qu'il se pourra, et c'est seulement pour diminuer les erreurs qui résulteroient d'une infraction forcée que nous disons qu'il est à propos de faire le triangle isoscele.

335. L'équation $\delta BC = e \times BC$ (cot.A $\mp$ cot.C) fait voir que la quantité e (cot.A $\mp$ cot.C) que nous avons examinée jusqu'à présent, est proportionnelle à la grandeur de BC. En supposant donc qu'on ait le choix de déterminer une distance BC par le moyen d'un seul triangle équilatere ABC, ou bien, en la divisant en plusieurs parties, par le moyen de plusieurs triangles équilateres plus petits, BDE, EDG, &c., il convient de discuter auquel des deux partis on doit donner la préférence. Fig. 37

Soit donc BC divisé en trois parties égales BD, DF, FC, et soit BE la base au lieu de AB. En résolvant le triangle BDE, on trouve BD et DE. De-là prenant DE pour base, on résoudra le triangle DGE pour trouver DG. Connoissant DG, on résoudra le triangle DGF pour trouver DF, FG; et poursuivant ainsi, on déterminera toutes les parties de BC. Or dans cette opération il faut observer qu'il y a deux causes d'erreur dans la résolution du second triangle DGE; l'une est l'erreur commise dans l'observa-

tion de ses angles, erreur dont nous avons traité jusqu'à présent; l'autre est l'erreur sur la base DE, produite par celles des angles dans la résolution du premier triangle BDE.

Pour savoir quelle erreur produit sur le côté cherché l'erreur de la base, supposons constants les angles opposés (285), et nous aurons (278) les erreurs proportionnelles à la grandeur des côtés. Soit supposée d'un pied l'erreur produite par celles des angles sur chacun des côtés BD, DE du premier triangle. Il s'ensuit que l'erreur de DG sera de deux pieds, un à raison du côté DE, et l'autre à raison des angles du triangle DGE. L'erreur de DF et de FG sera de trois pieds, savoir deux à cause de DG, et un à cause des angles du triangle DFG. En procédant ainsi on trouve cinq pieds pour l'erreur de CF. Si BC eût été divisé en quatre parties, l'erreur de la quatrieme eût été de sept pieds, et les erreurs croîtroient ainsi toujours en progression arithmétique, si le nombre des parties de BC étoit plus considérable. Maintenant si l'on somme les erreurs 1, 3, 5 pour BD, DF, FC, on aura neuf pieds pour l'erreur totale de BC déterminée par le moyen de cinq triangles. Au contraire en n'employant qu'un seul triangle ABC, l'erreur ne seroit que de trois pieds, c'est-à-dire triple de l'erreur de BD, puisque BC = 3BD, et que l'erreur provenant des angles est proportionnelle au côté cherché, comme nous l'avons vu au commencement de cet article. Il semble donc qu'on devroit en conclure qu'il ne faut multiplier les triangles que le moins qu'il se pourra. Mais on doit réfléchir que l'erreur de neuf pieds sur BC est le résultat de l'accumulation de toutes les erreurs des cinq triangles; ce qui suppose toutes ces erreurs commises dans le même sens. Or cette accumulation est non-seulement infiniment peu probable, mais elle est même démentie et réduite, pour ainsi dire, à zéro par l'expérience. Pour des déterminations importantes et délicates, on mesure deux bases, l'une au commencement, l'autre à la fin des triangles, comme, par exemple, BE, CH; c'est le moyen le plus sûr pour vérifier la justesse des opérations trigono-

métriques intermédiaires. Or les Académiciens François ne trouverent, au Pérou, que deux pieds d'erreur entre la mesure et le calcul, sur la derniere base, à laquelle ils parvinrent par une série de 28 triangles qui servirent à déterminer une distance BC de 180 milles, ou à-peu-près de 75 lieues communes de France. De même l'erreur ne fut pas de cinq pieds sur la seconde base, après une chaîne de onze triangles, par lesquels M. l'Abbé Boscovich détermina une distance de 130 milles ou de 54 lieues environ. Et si les erreurs s'étoient accumulées, en les supposant de 15″ par chaque angle, l'erreur de la seconde base eût été à-peu-près de 28 toises au Pérou, et de 19 en Italie; en faisant les calculs d'après ma supposition des triangles équilateres. On ne peut desirer une preuve plus claire de ce que démontrent d'ailleurs les regles de probabilité, que les erreurs se compensent lorsqu'on multiplie les triangles. Il est évident, au surplus, que cette compensation a lieu d'autant plus sûrement, lorsqu'on observe chacun des trois angles de chaque triangle, et qu'on réduit leur somme à 180°, (331).

336. Peut-être pensera-t-on que les regles précédentes sont rarement utiles, parcequ'on ne trouve pas facilement des clochers et autres objets élevés et distincts, sur lesquels on puisse diriger les instruments, pour former des triangles avec les conditions les plus avantageuses. Mais on peut très souvent suppléer à ces objets par des signaux plantés exprès dans les positions où on les desire. M. l'Abbé Boscovich élevoit des especes de cabanes quarrées ou circulaires, de quatorze pieds de diametre, et d'une élévation quelquefois plus grande, et construites avec de longues branches enfoncées profondément en terre, inclinées entre elles vers le faîte, et unies par des branches transversales assujetties avec des cordes et des clous. Ces cabanes, revêtues de feuillages, s'appercevoient, même avec de foibles lunettes, jusqu'à une distance de cinquante milles, lorsqu'elles étoient posées sur le sommet des hauteurs les plus élevées, de maniere à ce que leur image fût projettée sur le Ciel. Sans cette derniere condition, il faut, pour les

appercevoir, ou diminuer la distance, ou couvrir les signaux avec des draps ou autres matieres tirant sur le blanc. Dans une semblable circonstance, M. l'Abbé Boscovich se servit d'une toile de chanvre enduite de chaux, et alors il distinguoit le signal à 24 milles de distance. Picard employa des feux et avec succès. Un feu large de trois pieds étoit apperçu à une distance de 36 milles.

De la maniere de lever les Plans, et de dresser les Cartes topographiques et les Cartes géographiques de peu d'étendue.

337. On nomme *plan* d'un terrein, d'une ville, &c., un dessin où sont tracées les lignes qui représentent les contours du terrein et de ses principales parties, de sorte que ces lignes, prises ensemble, forment une figure parfaitement semblable à celle du terrein ou de la ville considérée sur un plan horizontal, abstraction faite des élévations. Supposons qu'un clocher soit rasé au niveau du sol; la figure que formeront les bords extérieurs et intérieurs des murs du clocher, vus sur la surface plane du terrein, sera ce qu'on appelle le plan du clocher. Quand on fait le plan d'un seul bâtiment, on peut désigner l'épaisseur des murs par un double trait; mais lorsque le plan contient un espace plus étendu, on ne peut ordinairement y tracer le périmetre des édifices que par de simples lignes.

Un plan est *topographique*, lorsqu'il présente toutes les particularités du terrein dessiné, par exemple les églises, les maisons ou les grouppes de maisons, les moulins, les parcs, les jardins, les deux rives des rivieres, les canaux, les torrents, les aqueducs, les chemins grands ou petits, &c. Les cartes *géographiques* désignent simplement la situation des villes, des bourgs, des forêts et des montagnes, et le cours des fleuves. Nous ne parlerons pour le moment que de celles de pays peu étendus; car la construction de la carte d'un Royaume, ou de plusieurs États, exige, comme nous le verrons, la connoissance de la Trigonométrie sphérique.

Nous

Nous avons vu (315) comment on forme avec la planchette le quadrilatere *abdc*, exactement conforme au quadrilatere ABDC sur le terrein ; ou, ce qui revient au même, comment on détermine la position des deux objets C et D, relativement aux deux stations A et B. On déterminera absolument de même la position d'un nombre quelconque d'objets qu'on puisse appercevoir des stations A et B, au moyen de lignes tirées des points *a* et *b* dans la direction de chacun de ces objets, comme on a fait pour les lignes *ac*, *ad*, *bc*, *bd*. Ces lignes sont ordinairement tracées au crayon, et s'effacent avec la gomme élastique ou la mie de pain, lorsqu'on a marqué à l'encre les points C, D, &c. La base même s'efface aussi, lorsqu'on a déterminé les positions de tous les objets que doit renfermer le plan. Fig. 32

Si l'on veut de plus tracer sur le plan le contour d'un champ, d'un jardin, &c., on marquera à l'encre les lignes du périmetre, tirées successivement d'un angle à l'autre, telles que AB, BD, CD, AC, en supposant que ABDC soit le contour du champ, du jardin, &c. Quant aux objets qu'on ne verroit des stations A et B que sous des angles trop inégaux (333, 334), on fera bien de se transporter, pour déterminer leurs positions par l'observation, aux extrémités de l'un des côtés (par exemple de AC, ou de CD, ou de BD, &c.) qu'on aura d'abord déterminés des stations A et B, et en choisissant celui de ces côtés qui donnera les angles les moins inégaux. Sur ce côté choisi, qu'on peut appeller une seconde base, on opérera de la même maniere que sur la premiere base AB ; et l'on passera ainsi de base en base, jusqu'à ce que l'on ait sur la carte la position de tous les objets qu'on veut relever.

La premiere chose que l'on doive faire est de former au bas du plan une échelle correspondante à la grandeur qu'on veut donner au dessin. Sur cette échelle on prendra la longueur que doit avoir la base qu'on aura mesurée à la toise. Je suppose que cette base soit longue de mille toises, et que l'échelle soit divisée en pouces et lignes ; si on prend sur cette échelle un intervalle de 8 pouces

4 lignes, ou de 100 lignes, pour représenter la base sur le papier, alors un espace d'une ligne sur le dessin, répondra à 10 toises sur le terrein. On fera ensorte que la base soit, autant qu'il sera possible, au milieu du terrein dont on levera le plan, et que les extrémités de cette base soient situées de maniere que de ces points on puisse découvrir un grand nombre des objets à comprendre dans le plan. Selon la situation de la base sur le terrein, relativement à son périmetre, on décrira de même sur le papier la ligne qui représentera la base, en la plaçant soit au milieu, soit plus haut ou plus bas, plus à droite ou à gauche, et prenant la longueur de cette ligne, comme nous l'avons dit, sur l'échelle. Cela fait, les intersections des lignes tirées d'après l'observation de chaque objet, faite de deux stations différentes, donneront la position respective de chaque objet sur la carte, et le plan sera levé.

Pour éviter les méprises, il est à propos d'écrire à l'extrémité de chaque ligne le nom de l'objet dans la direction duquel elle a été menée. On ne notera que quelques points des chemins, pour ne pas multiplier confusément les lignes sur le dessin; on préférera les points extrêmes et ceux des points intermédiaires qui se trouvent aux angles les plus marqués des routes; s'il ne s'y trouvoit pas des objets distincts à pointer, on y feroit planter des piquets ou d'autres signaux. Tout ceci doit s'entendre aussi des rivieres. Nous verrons (339) comment on peut représenter sur le dessin les routes entieres et les fleuves avec leurs tortuosités et leur largeur; de même que les contours des églises, des maisons, &c., pour lesquels il faut employer les méthodes précédentes pour déterminer sur le plan les deux points extrêmes de la largeur d'une face quelconque, en préférant toujours celle qu'on peut observer le plus favorablement de deux points de station.

338. Si le plan qu'on veut lever est celui d'une ville, il faut établir les stations dans les carrefours, et mesurer exactement à la toise la distance de l'une à l'autre de ces stations, lorsque chacune

des distances ne sera pas déterminée sur le dessin par l'intersection des lignes tirées de deux diverses stations. Il est à propos de commencer par la place la plus grande ; et pour en lever le plan, d'établir à-peu-près au milieu le point de station. Du centre de l'alidade on tirera sur le papier une ligne vers chacun des angles des rues qui aboutissent à la place : on mesurera avec attention à la toise toutes les distances de chacun de ces angles, au point du terrein sur lequel répond à plomb le centre de l'alidade ; ensuite l'échelle donnera les longueurs des lignes du plan, correspondantes à celles du terrein. Ayant ainsi fixé les extrémités de ces lignes, on les joindra les unes aux autres, en laissant néanmoins en blanc les intervalles correspondants à la largeur des rues qui donnent dans la place. On aura de cette maniere un assez grand nombre de points fixes qui serviront pour lier entre elles toutes les rues, à partir de la place. Mais il seroit trop long de détailler minutieusement tous les procédés de l'art de lever les plans ; on en apprendra plus en un jour d'exercice, que par la lecture de préceptes multipliés.

Lorsqu'un Ingénieur fait beaucoup d'usage de la planchette, sur-tout à la campagne, il peut, avec le temps, être en état d'estimer à l'œil simplement les angles et les distances ; muni au plus d'un demi-cercle ou d'un rapporteur, quelque petit qu'il soit, avec une alidade quelconque pour diriger le rayon visuel, il relevera les angles, à un degré près, plus ou moins ; et s'il est exercé à mesurer les distances au pas, il pourra dessiner un terrein avec une exactitude très approchante de la vérité. C'est en cela que consiste surtout l'habileté des Ingénieurs-militaires, qui ont rarement le temps et la liberté d'employer la planchette ou autres instruments pour lever leurs plans. Les Géographes eux-mêmes n'ont souvent pas besoin d'une plus grande précision pour placer sur la carte les lieux de peu d'importance, quand ils ont déterminé avec exactitude les positions des villes et autres lieux remarquables. Rarement les cartes géographiques sont d'une échelle assez grande pour qu'un demi-mille y occupe un espace sensible.

339. La largeur des routes se mesure à la toise. Pour avoir celle des rivieres, on peut mirer, de chacune de deux stations, comme à l'ordinaire, deux objets ou signaux posés l'un en face de l'autre sur les deux rives. Mais le moyen le plus expéditif pour relever les sinuosités des routes et des rivieres, ainsi que leur largeur, c'est
Fig.38 d'employer la *boussole*. Il faut qu'elle soit d'un grand diametre, autant qu'il sera possible, très sensible, et bien montée dans une boîte quarrée, dont les côtés doivent être paralleles aux lignes AB, CD, destinées à indiquer le nord, le sud, l'est et l'ouest. L'intérieur de la boîte doit être circulaire et divisé en 360 parties, ou même, pour avoir le demi-degré, en 720; la pointe de l'aiguille aimantée doit raser le bord de ces divisions sans les toucher, pour qu'on puisse voir avec plus de certitude et de précision à laquelle d'entre elles correspond cette pointe. En dehors de la boîte est une piece EF de forme prismatique, parallele au diametre AB ou à la ligne nord et sud, et qui porte sur ses extrémités deux pinnules que l'on n'a pas dessinées sur la figure, pour éviter la confusion. La vis V sert à fixer la piece EF, qui cependant doit pouvoir tourner à frottement dur sur la partie lisse de la vis, ensorte qu'on puisse diriger les pinnules vers les objets hauts ou bas, tandis que la boîte de la boussole reste toujours parallele à l'horizon, pour que les mouvements de l'aiguille s'exercent avec liberté et exactitude.

Fig. 1. Cela posé, soient K, H, deux objets dont on veut prendre la distance angulaire vue du point C. De ce point on observera par les pinnules l'un des objets, par exemple K. Je suppose que dans cette position de la boussole l'aiguille aimantée se trouve dans la direction CF. La direction CK des pinnules étant parallele au diametre AB (fig. 38) de la boussole, il s'ensuit que l'angle que fait l'aiguille aimantée avec ce diametre, est égal à l'angle FCK. On notera la grandeur de cet angle, indiquée par les divisions, et on tournera la boussole de maniere à observer par ses pinnules l'objet H : l'aiguille aimantée prendra encore la direction CF, et indiquera

dans ce cas l'angle FCH. La différence des deux angles observés sera l'angle cherché KCH.

Il est évident que si les deux objets étoient N, K, c'est-à-dire s'ils étoient situés l'un à la droite, l'autre à la gauche de la direction CF de l'aiguille aimantée, l'angle cherché NCK seroit la somme des deux angles observés NCF, FCK.

Actuellement il nous sera facile de dessiner les sinuosités du cours d'une riviere et sa largeur. On plantera des piquets aux points D, E, F, G, H, c'est-à-dire aux points où les courbures du rivage seront plus sensibles ; on mesurera à la toise les distances DE, EF, FG, GH, et, avec la boussole, les angles qu'elles font entre elles. Je suppose que la direction de l'aiguille aimantée soit successivement DN, EN, FN, GN, HN. Il est clair que, du point G par exemple, en observant l'objet H, on aura l'angle NGH, et en observant l'objet F, l'angle NGF; la somme de ces deux angles retranchée de 360°, dans le cas de la figure, donnera l'angle cherché FGH. Fig. 39

Pour ne pas multiplier trop les stations ; en même temps qu'on mesurera les bases DE, EF, &c., on mesurera aussi leurs distances perpendiculaires au rivage, lorsque ces distances varieront notablement entre elles ; elles sont exprimées dans la figure par les lignes ponctuées qui tombent sur GH. On mesurera de même les distances des stations G, H, &c. au rivage. Ces perpendiculaires dispenseroient d'observer les angles, si l'on traçoit les bases GH, FG, &c., sur le plan, dans la direction et dans les proportions de grandeur qui leur conviennent, lors du relevement des objets au travers des pinnules ou de la planchette ou de la boussole.

On releveroit par les mêmes méthodes les contours irréguliers d'un terrein, d'un bois, &c., et les tortuosités des chemins.

Si on veut prendre la largeur d'une riviere par le moyen de la boussole, on observera de deux stations, comme F et G, un objet ou signal S placé sur la rive opposée. En retranchant des angles

Fig.39 NGS, NFS, les angles NGF, NFG, on aura les angles SGF, SFG. Ceux-ci, formés sur la base FG du plan, donneront le point S.

Il faut faire cette opération dans tous les points où la largeur de la riviere varie sensiblement.

Lorsque l'on a sur le plan l'une des faces (337) d'un édifice, d'un enclos, d'un grouppe de maisons, &c., on mesure à la toise les longueurs des autres côtés, et on releve à la boussole les angles qu'ils font entre eux ; c'est ainsi qu'on peut porter tous leurs contours sur le plan.

On se sert aussi de la boussole pour relever les angles dans les mines, dans les souterreins. On mesure à la toise les longueurs des galeries du souterrein; et on parvient ainsi à déterminer sur terre, à ciel découvert, les directions et les sinuosités des mines, et à trouver le point où il est avantageux d'ouvrir un nouveau puits qui puisse aboutir à un filon donné. Mais, dans cet usage de la boussole, la direction de l'aiguille magnétique est quelquefois troublée par la proximité de mines de fer, du voisinage desquelles il faut se défier.

Avec la boussole et le *loch*, on peut encore lever à-peu-près le dessin d'une plage, d'un port, &c. apperçus d'un navire. La boussole donne les distances angulaires entre les promontoires et autres objets situés le long de la côte ; le loch fait connoître le chemin parcouru par le bâtiment entre deux observations faites à des heures différentes, des distances angulaires des mêmes objets. Le chemin parcouru sert de base, et sa direction est donnée par la boussole. En formant sur le plan, aux deux extrémités de cette base, tous les angles relevés, les intersections des lignes tirées de ces extrémités donneront les positions de tous les points observés.

340. Enfin la boussole est sur-tout essentielle pour orienter les plans ; c'est à cet effet que les graphometres sont ordinairement garnis d'une boussole, (296). Sur un plan quelconque on indique par une croix les quatre points cardinaux, en distinguant le nord par une fleche ou par une fleur-de-lys. Cette croix fait connoître la

vraie position de tous les objets compris dans le plan, relativement aux points cardinaux. Il est à propos de fixer ces points avec exactitude, et de se souvenir, lors de cette opération, que l'aiguille aimantée n'indique pas précisément le vrai point du nord, et que sa déclinaison varie dans des temps et dans des lieux différents ; à Paris elle est actuellement environ de 20° à l'ouest, quantité qui, comme l'on voit, ne peut pas être négligée. L'imperfection des petites boussoles dont se servent la plupart des Arpenteurs, le peu d'attention qu'ils font à la déclinaison, et la sécurité avec laquelle ils relevent les petits angles mêmes, donnent lieu à de grandes erreurs dans leurs plans. Le P. Maire assure qu'il a observé jusqu'à 10 milles d'erreur dans des cartes particulieres de quelques provinces de l'État de l'Église, et que trois villages situés réellement sur une même ligne, ont plus d'une fois formé sur la carte un triangle équilatéral.

On peut rapporter à une ligne quelconque, dans un plan, l'indication des quatre parties du Monde : il est plus sûr de la rapporter à la base. On observera l'angle que l'aiguille aimantée fait avec cette base sur le terrein, comme on a fait ci-dessus (339) pour les bases DE, EF, &c. ; on tiendra compte de plus, dans cette opération, de la déclinaison de l'aiguille en telle année et en tel lieu. Cet angle ainsi corrigé se formera, dans le plan, en menant sur la base une ligne tracée au crayon, laquelle indiquera le nord, et servira de regle pour former la croix dans la partie du plan où il paroîtra plus commode de la placer. L'usage est de disposer les plans, de maniere que la partie septentrionale occupe le haut de la carte.

341. Nous avons vu comment on se sert de la planchette et de la boussole pour relever les plans. Il ne faut pas employer la derniere lorsqu'on veut une grande précision. De même aussi on préférera le graphometre et le quart de cercle à la planchette, sur-tout quand il s'agira de grands triangles et de la carte géographique d'une province.

Lorsqu'avec ces instruments on a mesuré au moins deux angles dans chaque triangle, et qu'on a calculé toutes les réductions, de maniere à avoir la grandeur définitive des angles sur un horizon commun, il faut les former sur la carte, en commençant par les angles sur la base. Mais en employant pour cette opération la méthode même la plus sûre (295), les lignes tirées à la main ne peuvent jamais avoir une exactitude mathématique, et les erreurs peuvent se multiplier jusqu'à rendre inconciliables les positions éloignées de la base. Pour éviter cet inconvénient et quelques autres, on a imaginé de rapporter chacun des points principaux de la carte à une seule ligne, qu'on appelle *méridienne* (416), et dont la direction est en effet précisément du septentrion au midi. Voici comme on s'y prend.

Fig. 40 Soient A, B, C, D, F, &c. les points que l'on veut placer convenablement sur la carte. Après avoir réduit tous les angles BAC, ACB, &c., il faut résoudre les triangles du polygone pour calculer toutes les distances ou les côtés AB, AC, CD, &c. On choisira un méridien qui passe à-peu-près par le milieu du polygone; telle est, par exemple, dans la figure, la ligne AN, qui représente le méridien du point A. Il faut connoître en premier lieu l'un des angles BAN, CAN. Soit ⊙ le soleil couchant; on observera la distance angulaire entre le soleil et le point B, c'est-à-dire l'angle BA⊙. L'Astronomie donne des regles pour connoître facilement et exactement l'angle NA⊙ au moment où le soleil se couche. La différence de ces deux angles, dans le cas de la figure, est l'angle cherché BAN; en le retranchant de BAC, on a aussi CAN. Soient B*e*, C*m* perpendiculaires sur la méridienne; connoissant AB et BAN, on résoudra le triangle rectangle A*e*B pour trouver A*e*, B*e*; la premiere de ces lignes est *la distance* du point A *à la perpendiculaire* qui part du point B; la seconde est *la distance* du point B *à la méridienne*. De même connoissant AC et CAN, on trouvera A*m*, C*m*, distances semblables à celles ci-dessus, relativement au point C. Retranchant AB*e* de ABC, on a

CB*e*

CB*e*, qui, ajouté à FBC, donne l'angle FB*u*, par le moyen duquel et de FB, on trouvera F*u* ou *se*, et B*u*. Ajoutant *se* à A*e*, on a A*s*; retranchant B*u* de B*e*, on a *eu* = F*s*.

On calculera de même les distances du point A à la perpendiculaire de chacun des points qu'on veut mettre sur la carte, et la longueur de cette perpendiculaire elle-même, ou la distance de chacun de ces points à la ligne méridienne. En fixant sur la carte, avec ces deux seules données, la position de chaque point, il est évident que les erreurs ne peuvent plus se communiquer et se multiplier; puisque si l'on commet, par exemple, une erreur sur la position du point C, qu'on a déterminée par le moyen des distances A*m*, C*m*, cette erreur ne peut influer sur la position du point D, qui se détermine sur la carte non par le moyen du point C, mais par celui des distances A*n*, D*n*. On voit donc qu'ayant une fois établi sur la carte le point A et le méridien AN, toutes les positions se marqueront indépendamment les unes des autres.

Il est clair que si au lieu de l'angle BAN qu'on déduit de l'observation du soleil couchant, on vouloit l'angle CAN, on le trouveroit de la même maniere, en observant le soleil à son lever.

C'est par cette méthode exacte et ingénieuse, qu'on a levé le plan géométrique très étendu du Royaume de France, divisé en 180 cartes, et fondé sur la mesure de 19 bases qui confirment l'exactitude des opérations et des calculs trigonométriques sur un très grand nombre de triangles.

Problêmes.

342. *Déterminer la position d'un lieu, duquel on apperçoit trois points dont la position est connue, tandis que de ces mêmes points on ne peut appercevoir ce lieu;* ce qui arrive lorsque, par exemple, on ne voit que la pointe d'un clocher, à laquelle on ne pourroit s'élever pour appercevoir le lieu d'où on auroit observé cette pointe.

Fig.32 *la longueur des segments de* CD *formés par la perpendiculaire.*

Qu'on imagine une perpendiculaire du point A sur la ligne CD. En mesurant une base AB, et opérant comme on a dit (314), on connoîtra les valeurs des côtés AC, AD, et de l'angle compris CAD. Alors, par la formule (245), on trouvera les segments de cet angle, et l'on aura par conséquent deux données dans chacun des deux triangles rectangles formés par la perpendiculaire ; et les formules ordinaires (213) donneront la valeur de cette ligne et celles des segments.

346. *Par un point accessible* A, *mener une parallele à une droite inaccessible* CD.

Après avoir fait ce que nous avons enseigné (314) pour connoître AC, AD et CAD, on résoudra le triangle CAD, pour trouver la valeur de CDA. Alors pour avoir la parallele cherchée, il ne reste plus qu'à former au point A, avec la ligne AD, un angle égal à CDA. Cet angle se formera au moyen des instruments ; et en plantant des jallons dans la direction indiquée par la lunette ou par les pinnules, on aura la position de la parallele, déterminée sur le terrein.

347. *Continuer une ligne sur le terrein par-delà un obstacle qui ne permet pas de voir la direction de cette ligne.*

Fig.42 Soit CD la ligne qu'on veut continuer en EF. On choisira un point A duquel on apperçoive les objets C et D, et d'où l'on puisse aussi découvrir le terrein où l'on cherche à déterminer la position de EF. On mesurera CD à la toise ; et après avoir relevé les angles du triangle CDA, on calculera AC. On mesurera avec un instrument l'angle CAE, prenant pour AE la direction qu'on jugera la plus commode. Supposant CD prolongé jusqu'en E, on connoîtra dans le triangle CAE les angles et le côté AC, et l'on trouvera AE. Sur la direction AE donnée par l'instrument, on mesurera à la toise une distance AE égale à celle donnée par le calcul ; et on connoîtra le point E par lequel passeroit la ligne CD prolongée. Alors on formera en E un angle AEF égal au supplé-

ment de l'angle connu AEC, et on aura la direction cherchée EF.

Si la distance CD étoit inaccessible, il faudroit mesurer une autre base AB ; en opérant sur cette base, comme nous l'avons dit (314), on détermineroit AC et AD, ou bien BC et BD, et de-là l'angle DCA, ou l'angle DCB. Le reste est évident et conforme à la marche que nous venons de suivre pour arriver à EF.

Si l'on veut un grand nombre de problêmes de Trigonométrie et de Géométrie-pratique, on trouvera l'abondance à cet égard, réunie à la méthode et à la clarté, dans l'Ouvrage de M. Giannini, premier Professeur au College Militaire de Ségovie, intitulé : *Practicas de Geometria y Trigonometria, Segovia,* 1784.

CHAPITRE XII.

Résolution numérique de toutes les Équations du second et du troisieme degré, par le moyen de la Trigonométrie.

348. TOUTE équation du *second degré* est représentée par cette formule générale :

(A)..... $x^2 + px = q$.

D'où l'on tire

(B)..... $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

Si p et q sont des quantités ou grandes ou fractionnaires, le calcul de cette équation devient laborieux ; mais la Trigonométrie donne des moyens aussi prompts que faciles pour en tirer la valeur de x, soit exacte soit approchée, suivant les cas. Car on sait que si la quantité sous le signe radical n'est pas un quarré parfait, il n'est pas possible d'avoir la valeur de x autrement que par approximation.

Si l'on examine le cas où le radical est positif, l'équation (B)

se peut alors exprimer ainsi : $x = -\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{1+\frac{4q}{p^2}}\right)$, (14).

En faisant, (206),

(C)..... $\text{tang.}A = \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

et par conséquent $\frac{1}{2}p = \frac{\cos.A\sqrt{q}}{\sin.A}$, on aura $x = -\frac{\cos.A\sqrt{q}}{\sin.A}\left(1 - \frac{1}{\cos.A}\right) = \frac{\cos.A\sqrt{q}}{\sin.A} \times \frac{1-\cos.A}{\cos.A} = \frac{1-\cos.A}{\sin.A} \times \sqrt{q}$.

Donc (I. 40°)

(D)..... $x = \text{tang.}\frac{1}{2}A\sqrt{q}$.

Or on a déja par l'équation (C) la valeur de A ; on aura donc celle de x par l'équation (D).

349. Supposons maintenant, dans l'équation (B), le radical négatif; l'équation (C) sera la même, et on aura $x = -\frac{1}{2}p \times \left(1 + \frac{1}{\cos.A}\right) = -\frac{\cos.A\sqrt{q}}{\sin A.} \times \frac{1+\cos.A}{\cos.A} = -\frac{1+\cos.A}{\sin.A} \times \sqrt{q}$.

Donc la seconde valeur de x sera (II. 41°),

(E)..... $x = -\cot.\frac{1}{2}A\sqrt{q}$.

350. On trouvera, par la même méthode, que les formules précédentes s'appliquent aussi au cas où l'équation à résoudre (A) est de cette forme $x^2 - px = q$. La seule différence est que la valeur négative de x est donnée par l'équation (D), et sa valeur positive par l'équation (E).

351. Soit maintenant l'équation à résoudre (A) de cette forme $x^2 + px = -q$; on aura $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Or on sait que, lorsque q est négatif, il faut qu'il ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}p^2$; autrement la quantité sous le signe radical seroit imaginaire, et il n'existeroit aucune valeur réelle de x qui satisfît à l'équation. Cela posé, en considérant d'abord le radical comme positif, on a $x = -\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{1-\frac{4q}{p^2}}\right)$. Et en faisant, (208),

(F)..... $\sin.A = \frac{2\sqrt{q}}{p}$,

ce qui donne $\frac{1}{2}p = \frac{\sqrt{q}}{\sin.A}$; on aura $x = -\frac{\sqrt{q}}{\sin.A}(1 - \cos.A) =$

$-$ tang.$\frac{1}{2}$A $\sqrt{q}$, (II. 40e), c'est-à-dire qu'on aura l'équation (D) avec le signe négatif au second membre.

Considérons actuellement le radical comme négatif; ce qui n'altere pas l'équation (F); nous aurons $x = -\frac{1}{2}p\,(1 + \cos.A) = -\frac{\sqrt{q}}{\sin.A}(1 + \cos.A) = -$ cot.$\frac{1}{2}$A $\sqrt{q}$, (II. 41e); c'est-à-dire que, dans ce cas, nous aurons l'équation (E).

352. Si l'équation à résoudre (A) étoit de cette forme, $x^2 - px = -q$, ce qui n'altere pas l'équation (F), on trouveroit que dans le cas du radical négatif, la valeur de x est celle de l'équation (D); et dans le cas du radical positif, celle de l'équation (E), avec le signe positif pour le second membre.

353. Concluons que les équations (D), (E) donnent les deux valeurs de x dans tous les cas : q est-il positif ? on aura l'arc A par la formule (C), et les deux valeurs de x seront toujours de signes contraires : q est-il négatif ? on cherchera l'arc A par la formule (F), et les valeurs de x seront toutes deux négatives si p est positif, toutes deux positives si p est négatif.

354. Exemple. Soit à résoudre l'équation $x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716}$. On aura, (C), (D),

$$\text{tang.A} = \frac{88}{7}\sqrt{\frac{1695}{12716}},$$

$$x = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A}\sqrt{\frac{1695}{12716}},$$

équations dont voici le calcul.

log.1695	= 3,2291697	
compl.log.12716	= 5,8956495	
somme	9,1248192	
demi-somme	9,5624096	
log.88	= 1,94448267	
compl.log.7	= 9,15490196	
somme ou log.tang.A	= 0,6617942	= log.tang. 77° 42′ 31″,72
log.tang.$\frac{1}{2}$A	= 9,9061115	
demi-somme ci-dessus	9,5624096	
Somme ou log.x	= 9,4685211	= log.0,2941176.

Pour savoir si cette valeur positive approchée de x peut être exprimée par une fraction exacte, dont les deux termes soient des nombres entiers de peu de chiffres; je prends le complément de log.x, et le considérant comme un logarithme négatif (164), je trouve $-$ 0,5314789 $=$ log. $\frac{1}{3,4}$ exactement; et multipliant cette fraction par 5, j'ai $x = \frac{5}{17}$.

Ceux qui voudront calculer cette valeur de x par le moyen de la formule ordinaire (B), auront lieu de reconnoître combien la solution trigonométrique est plus prompte et plus facile.

355. Dans le calcul précédent, si au lieu de log. tang. $\frac{1}{2}$A, on emploie son complément, on aura log. $-x = 9,6562981 =$ log. $-$ 0,4532085. C'est la valeur approchée négative de x, selon la formule (E). Si l'on prend le complément de log. $-x$, on trouve $x = -\frac{1}{2,20649}$, ce qui n'est pas non plus une valeur exacte; de sorte qu'on ne peut, dans ce cas, la réduire en une fraction exacte et composée d'entiers dans ses deux termes. Mais d'ailleurs il suffit d'avoir trouvé la valeur exacte de $+x$: on sait que q est le produit de toutes les racines, et que dans le cas présent les deux valeurs de x doivent avoir des signes contraires (353); donc, en divisant $\frac{1695}{12716}$ par $\frac{5}{17}$, on aura $-\frac{339}{748}$ pour la seconde valeur exacte de x. On peut vérifier le calcul par le moyen de cette autre regle, que la somme des deux racines doit être égale à p.

356. Passons à la solution des équations du *troisieme degré*. On sait qu'après avoir fait évanouir le second terme, on peut représenter toute équation du troisieme degré par cette formule générale :

(G)..... $x^3 + px + q = 0$.

La solution analytique de cette équation est

$$(H)...x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}\right)},$$

Je

Je l'écris sous la forme suivante (14) : $x = \ldots\ldots\ldots$ $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$; et faisant, (206), $\frac{4p^3}{27q^2} = \text{tang.}^2\text{B}$, ou

(K)..... $\text{tang.B} = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$,

il en résulte $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1-\frac{1}{\cos.\text{B}}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1+\frac{1}{\cos.\text{B}}}\right)}$. Soit, pour plus de simplicité, $2\sqrt{\frac{1}{3}p} = \text{R}$, ce qui donne $p = \frac{3}{4}\text{R}^2$; l'équation (K) deviendra $\text{tang.B} = \frac{\text{R}^3}{4q}$; d'où l'on tire $q = \frac{\text{R}^3}{4\,\text{tang.B}}$. En substituant cette valeur de q, on a $x = \sqrt[3]{-\frac{\text{R}^3}{8\,\text{tang.B}} \times \frac{\cos.\text{B}-1}{\cos.\text{B}}} + \sqrt[3]{-\frac{\text{R}^3}{8\,\text{tang.B}} \times \frac{\cos.\text{B}+1}{\cos.\text{B}}} = \frac{1}{2}\text{R}\left(\sqrt[3]{\frac{1-\cos.\text{B}}{\sin.\text{B}}} - \sqrt[3]{\frac{1+\cos.\text{B}}{\sin.\text{B}}}\right) =$ (I. 40e, 41e) $\frac{1}{2}\text{R}\left(\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{B}} - \sqrt[3]{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{B}}\right)$ ou $x = -\text{R} \times \frac{\sqrt[3]{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{B}} - \sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{B}}}{2}$: mais (I. 38e), $\text{cot.}2\text{A} = \frac{\text{cot.A} - \text{tang.A}}{2}$; en comparant les deux dernieres équations, et faisant

(L)..... $\text{tang.A} = \sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{B}}$,

et par conséquent $\text{cot.A} = \sqrt[3]{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{B}}$, on aura $x = -\text{R} \times \text{cot.}2\text{A}$. Donc, en remettant la valeur de R, on a pour équation finale

(M)..... $x = -\text{cot.}2\text{A} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

Ainsi l'on parvient à trouver la valeur de x par le moyen de trois équations très simples: 1°. par l'équation (K) on trouve un arc B; 2°. par l'équation (L) on trouve un arc A; 3°. par l'équation (M) on a la valeur cherchée de x.

Si l'équation à résoudre (G) étoit de cette forme, $x^3 + px - q = 0$, alors dans la solution analytique (H), $-\frac{1}{2}q$ deviendroit positif. En procédant comme ci-dessus, on parviendroit aux mêmes équations (K), (L), (M), avec cette seule différence que le second membre de la derniere auroit le signe positif.

357. Supposons maintenant que l'équation à résoudre (G) soit de cette forme :

$$x^3 - px + q = 0;$$

ce qui rend $\frac{1}{27}p^3$ négatif dans la solution analytique (H). On aura $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}q\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$. Si on fait, (208), $\frac{4p^3}{27q^2} = \text{sin.}^2\text{B}$, ou

(N)..... $\text{sin.B} = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$;

il en résulte $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 - \text{cos.B}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q \times \overline{1 + \text{cos.B}}\right)}$. Mais l'équation (N) donne $q = \frac{\text{R}^3}{4\,\text{sin.B}}$, en faisant toujours $\text{R} = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, et par conséquent $p = \frac{3}{4}\text{R}^2$. Donc $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}\text{R}^3 \times \frac{1 - \text{cos.B}}{\text{sin.B}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{8}\text{R}^3 \times \frac{1 + \text{cos.B}}{\text{sin.B}}} = -\text{R} \times \frac{\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}\text{B}} + \sqrt[3]{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{B}}}{2}$. Mais (I. 9e), $\frac{\text{tang.A} + \text{cot.A}}{2} = \frac{1}{\text{sin.2A}}$. Donc, en adoptant l'équation (L), on aura $x = -\frac{\text{R}}{\text{sin.2A}}$, ou

(O)..... $x = -\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}{\text{sin.2A}}$.

On trouve donc ainsi la valeur de x par le moyen des trois équations (N), (L), (O).

On reconnoîtra que les mêmes équations servent encore, lorsque l'équation à résoudre (G) est de cette forme :

$$x^3 - px - q = 0.$$

Mais le second membre de l'équation (O) devient positif.

Cette solution exige que $\frac{4p^3}{27q^2}$ ne soit pas plus grand que 1 ; autrement on ne pourroit supposer $\frac{4p^3}{27q^2} = \text{sin.}^2\text{B}$, puisqu'un sinus ne peut jamais être plus grand que le rayon.

358. Si donc il arrive que p étant négatif, $4p^3$ soit $> 27q^2$, ou $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, la quantité $\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}$ se présente sous une forme imaginaire, et c'est ce qu'on a nommé le *cas irréductible*,

parcequ'on n'a pu en trouver une solution analytique générale délivrée d'imaginaires, si ce n'est sous la forme de séries infinies. Pour juger de la difficulté, peut-être même de l'impossibilité de cette solution générale, on peut lire la Dissertation de M. le Chevalier Lorgna, savant Géometre, (*Memorie della Società Italiana*, Tom. I. Verona, 1782). On sait cependant que, dans le cas irréductible, l'équation a ses trois racines réelles, quoiqu'elle n'en ait qu'une dans tous les autres cas que nous venons d'examiner et de résoudre.

§ 859. Pour trouver par la Trigonométrie les trois racines dans le cas irréductible, il faut abandonner la solution analytique embarrassée de quantités imaginaires, et, parmi les formules trigonométriques, en chercher une qui soit comparable à l'équation

$$x^3 - px \pm q = 0,$$

qu'il s'agit de résoudre.

Si on prend l'équation (125), $\sin.3A = 3\sin.A - 4\sin.^3A$, qui, rendue homogene (55), devient $R^2 \sin.3A = 3R^2 \sin.A - 4\sin.^3A$; en divisant par 4 et transposant, on aura

(P)..... $\sin.^3A - \frac{3}{4}R^2 \sin.A + \frac{1}{4}R^2 \sin.3A = 0.$

Comparant cette équation terme à terme avec la proposée, dans laquelle je prends d'abord q comme positif; si on fait $x = \sin.A$, on aura 1°. $p = \frac{3}{4}R^2$, ce qui donne $R^2 = \frac{4}{3}p$, et $R = 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$; 2°. $q = \frac{1}{4}R^2 \sin.3A = \frac{1}{3}p \sin.3A$; d'où l'on tire $\sin.3A = \frac{3q}{p}$. Ce sinus est proportionnel au rayon de l'équation, qui est, comme nous venons de le voir, $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$; pour le trouver dans les tables, il faut donc (25) le diviser par ce même rayon, et alors on aura

(Q)..... $\sin.3A = \frac{3q}{p} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}}$.

La valeur de 3A étant connue par cette équation, celle de A le sera aussi, et par conséquent celle de $x = \sin.A$. Mais comme

sin.A se prend dans les tables, où R = 1, il faut ensuite le multiplier par le rayon de l'équation. Donc

(S)..... $x = \text{sin.A} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

360. Si dans l'équation (P) on met 120° + A au lieu de A, il faudra mettre 360° + 3A au lieu de 3A. Mais sin.(360° + 3A) = sin.360° cos.3A + cos.360° sin.3A = sin.3A, (42); l'équation (Q) est donc la même quand, au lieu de $x = \text{sin.A}$, on fait $x = \text{sin.}(120° + \text{A})$. C'est donc une seconde valeur de x qui satisfait à l'équation (P). Mais sin.(120° + A) = sin.(60° — A). On aura donc

(T)..... $x = \text{sin.}(60° - \text{A}) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

De même si dans l'équation (P) on met 240° + A au lieu de A, ce qui donne 720° + 3A au lieu de 3A, on aura aussi sin.(720° + 3A) = sin.(360° + $\overline{360° + 3\text{A}}$) = sin.3A, et l'équation (Q) subsistant toujours, on aura une troisieme valeur de x, qui sera $x = \text{sin.}(240° + \text{A})$. Mais sin.(240° + A) = sin.(180° + $\overline{60° + \text{A}}$) = — sin.(60° + A). Donc

(Z)..... $x = -\text{sin.}(60° + \text{A}) \times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$.

L'équation (Q) suppose évidemment que l'on n'ait pas $4p^3 < 27q^2$. Aussi ces solutions ne sont applicables aux cas résolus (357) que quand $4p^3 = 27q^2$ précisément : alors les formules (S), (T) donnent deux valeurs égales de x, et la formule (Z) une troisieme valeur, tandis que la méthode (357) ne donne qu'une valeur de x, c'est-à-dire la derniere (Z).

Qu'on remarque le grand avantage des solutions trigonométriques pour le cas irréductible. Par le moyen de quatre équations seulement, (Q), (S), (T), (Z), dont le calcul est très court, puisqu'elles renferment toutes un facteur commun, $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ces solutions font connoître les trois valeurs ou exactes ou approchées de x, valeurs que l'analyse ne trouve ordinairement que par des voies laborieuses, et le plus souvent sous la forme de séries infinies.

361. Ces mêmes équations, en changeant seulement le signe du second membre, donnent encore les valeurs cherchées, lorsque q est négatif, de sorte qu'on ait pour l'équation à résoudre, $x^3 - px - q = 0$. En effet, comme alors $-q = \frac{1}{4}R^2 \sin.3A = \frac{1}{3}p \sin.3A$, il s'ensuit que $\sin.3A = -\frac{3q}{p}$; ce qui fait voir qu'au lieu de 3A, on doit prendre $180° + 3A$, (38), et par conséquent $60° + A$ au lieu de A. Donc pour premiere valeur on a $x = \sin.(60° + A)$, c'est-à-dire l'équation (Z) avec le signe positif au second membre. En ajoutant 360° à $180° + 3A$, et prenant le tiers, on a pour seconde valeur $x = -\sin.(180° + A) = -\sin.A$, c'est-à-dire l'équation (S) avec le changement de signe. De même en ajoutant 720° à $180° + 3A$, et prenant le tiers, on a pour troisieme valeur, $x = -\sin.(300° + A) = -\sin.\overline{(360° - \overline{300° + A})} = -\sin.(60° - A)$, c'est-à-dire l'équation (T) avec le changement de signe.

On reconnoîtra facilement qu'en ajoutant plus de deux fois la circonférence du cercle, on n'auroit jamais d'autres valeurs de x que les trois déja trouvées; et que si l'on ajoutoit un arc plus grand ou moindre que la circonférence, on n'auroit plus un sinus égal à sin.3A: ce qui confirme la théorie des équations, suivant laquelle l'équation (P) ne peut avoir que trois racines.

Il y a donc trois sinus qui résolvent l'équation (P), savoir sin.A, $\sin.(60° - A)$, et $-\sin.(60° + A)$. Et de même que nous avons eu ces trois racines, on trouvera facilement celles de chacune des équations des tables (125), et ces racines seront en aussi grand nombre qu'il y aura d'unités dans le facteur de A.

362. Si on fait $A = \frac{1}{3}a$, et qu'on appelle z la corde de l'arc $\frac{2}{3}a$, on a $\frac{1}{2}z = \sin.\frac{1}{3}a = \sin.A$; de sorte qu'en faisant $R = 1$, l'équation (P) donnera

(P')..... $\frac{1}{8}z^3 - \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}\text{cord.}2a = 0$.

À l'article 12 d'un Mémoire de M. d'Alembert, sur les quantités négatives (*Opusc. Math.* T. VIII, pag. 275, 276), article

que je crois n'avoir pas été relu par cet Auteur célebre, puisqu'en peu de lignes il contient plusieurs erreurs, les quantités suivantes sont données comme racines de l'équation $\frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{2}Az = \frac{1}{2}\text{cord.}2a$, laquelle, sous une forme peu différente, est la même que l'équation (P′) : cependant le diviseur de cord.$2a$, dans celle-ci, est altéré dans celle-là ; mais nous le supposerons le même, parce que cette altération est évidemment une erreur.

Racines : cord.$\frac{2}{3}a$, cord.$(60° + \frac{2}{3}a)$, cord.$(120° + \frac{2}{3}a)$, ou
$2\sin.\frac{1}{3}a$, $2\sin.(30° + \frac{1}{3}a)$, $2\sin.(60° + \frac{1}{3}a)$.

Il est facile de démontrer l'inexactitude des deux dernieres racines, en donnant une valeur déterminée à l'arc $\frac{1}{3}a$. Par exemple soit, pour plus de facilité, $\frac{1}{3}a = 30°$; ce qui donne 1°. $z = 2\sin.30° = 1$; 2°. $z = 2\sin.60° = \sqrt{3}$, (43) ; 3°. $z = 2\sin.90° = 2$; en substituant séparément ces trois valeurs de z dans l'équation (P′), qui, multipliée par 8, devient $z^3 - 3z + \text{cord.}2a = 0$, on a 1°. $1 - 3 + 2 = 0$, ce qui est vrai ; 2°. $3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2 = 0$, ce qui n'est pas juste ; 3°. $8 - 6 + 2 = 0$, ce qui ne l'est pas davantage.

Les trois racines exactes de l'équation $z^3 - 3z + \text{cord.}2a = 0$, ou $\text{cord.}^3\frac{2}{3}a - 3\,\text{cord.}\frac{2}{3}a + 2\sin.a = 0$, se trouvent facilement par la méthode que nous avons suivie (360). La premiere racine est, comme nous venons de le voir, cord.$\frac{2}{3}a$. Si au lieu de a on écrit $360° + a$, ce qui n'altere ni la valeur ni le signe de sin.a, la seconde racine sera cord.$(240° + \frac{2}{3}a)$, ou $2\sin.(120° + \frac{1}{3}a)$. Enfin si l'on écrit $720° + a$ au lieu de a, on aura pour troisieme racine, cord.$(480° + \frac{2}{3}a)$, ou $2\sin.(240° + \frac{1}{3}a)$, racine négative (42).

Le but de cette petite digression étoit sur-tout de démontrer, en trouvant une racine négative, que les cordes peuvent avoir le signe négatif, quoiqu'il n'y ait pas deux cordes, dans un même cercle, dont les directions soient absolument opposées. C'est donc, ainsi que le pense l'illustre Auteur que nous venons de

citer, un principe sujet à erreur, que de regarder l'opposition des signes comme la suite de la direction diamétralement opposée des lignes de même espece. En général si on fait $360° = c$, et $a < c$, les sinus positifs seront, d'après les regles et la formule élémentaires (42, 51), sin.$\frac{1}{2}a$, sin.$\frac{1}{2}(2c + a)$, sin.$\frac{1}{2}(4c + a)$, &c.; et les négatifs, sin.$\frac{1}{2}(c + a)$, sin.$\frac{1}{2}(3c + a)$, sin.$\frac{1}{2}(5c + a)$, &c. Donc les cordes positives sont cord.a, cord.$(2c + a)$, cord.$(4c + a)$, &c.; les négatives, cord.$(c + a)$, cord.$(3c + a)$, cord.$(5c + a)$, &c. Ce changement alternatif dans les signes est absolument conforme à la regle de M. de l'Hôpital, (*Analyse des Infiniment-petits*, art. 46); qui est celle que j'ai donnée (16). La corde de l'arc a croît en même temps que cet arc, et avec le signe positif, de 0° jusqu'à 180°, point où elle arrive à son *maximum*. L'arc continuant à croître, la corde diminue progressivement, sans qu'aucune cause ait dû altérer son signe positif, et enfin elle se réduit à zéro, lorsque l'arc parvient à 360°. Si l'arc croît encore dans le même sens, (car la circonférence du cercle rentrant en elle-même, on peut considérer cette courbe comme faisant sur elle-même une infinité de révolutions), cord.$(c + a)$ doit être négative, puisque cette corde a passé par zéro. En raisonnant ainsi, on trouvera que la corde doit changer de signe, chaque fois que l'arc a achevé de décrire en croissant une circonférence entiere.

363. *Exemples de la résolution des équations du troisieme degré, par la Trigonométrie.*

Soit à résoudre l'équation $x^3 + 2x + 33 = 0$. C'est le cas de la formule (G), (356). On aura donc

$$\text{tang.B} = \frac{2}{3 \times 33} \times 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{99} \times \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\text{tang.A} = \sqrt[3]{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{B}}$$

$$x = -\cot.2\text{A} \times \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Voici le calcul de ces équations.

$$\begin{aligned}
\log.8 &= 0,90308999\\
\text{compl.log.3} &= 9,52287875\\
\text{somme} &= 0,42596874\\
\text{demi-somme} &= 0,21298437 = \log.\sqrt{\tfrac{8}{3}}\\
\log.2 &= 0,30103\\
\text{compl.log.99} &= 8,00436481\\
\log.\text{tang.B} &= 8,5183792\\
\text{B} &= 1^{\circ}\,53'\,22'',16\\
\log.\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{B} &= 8,2172311\\
\text{le tiers de log.tang.}\tfrac{1}{2}\text{B, ou log.tang.A} &= 9,4057437\\
\text{A} &= 14^{\circ}\,16'\,49'',49\\
\log.\cot.2\,\text{A} &= 0,2641368\\
\log.\sqrt{\tfrac{8}{3}} &= 0,2129844\\
\text{somme ou log.} -x &= 0,4771212 = \log.-3.
\end{aligned}$$

Proposons-nous maintenant de résoudre l'équation $x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0$, dans laquelle p étant négatif, il faut d'abord reconnoître combien de racines réelles elle doit avoir. Or $4p^3 = 4 \times (\frac{403}{441})^3$, et $27q^2 = 27 \times (\frac{46}{147})^2$; et $\log.4p^3 = 0,485$, $\log.27q^2 = 0,422$. Donc $4p^3 > 27q^2$. C'est donc le cas que l'analyse regarde comme *irréductible*. Nous aurons par conséquent (359), (360),

$$\sin.3\,\text{A} = \frac{3 \times 46}{147} \times \frac{441}{403} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{403}{3 \times 441}}} = \frac{414}{403} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1612}{1323}}}$$

Les trois valeurs de x seront donc

1°. $x = \sin.\text{A}\sqrt{\frac{1612}{1323}}$

2°. $x = \sin.(60 - \text{A})\sqrt{\frac{1612}{1323}}$

3°. $x = -\sin.(60 + \text{A})\sqrt{\frac{1612}{1323}}$

Voici le calcul de ces quatre équations.

log.1612

log.1612	= 3,2073650		
compl.log.1323	= 6,8784402		
somme	0,0858052		
demi-somme	0,0429026	log. constant	
compl. du log. constant	9,9570974		
log.414	= 2,61700034		
compl. log.403	= 7,39469495		
Donc log.sin.3A	= 9,9687927	= log. sin. 68° 32′ 18″, 55	
log.sin.A	= 9,5891206		
log. constant	0,0429026		
1°..... log.x	= 9,6320232	= log. 0,4285714	
log.sin.(60° — A)	= 9,7810061		
log. constant	0,0429026		
2°..... log.x	= 9,8239087	= log. 0,6666666	
log.sin.(60° + A)	= 9,9966060		
log. constant	0,0429026		
3°..... log. — x	= 0,0395086	= log.—1,095238	

On observera en premier lieu que la valeur négative est égale à la somme des deux positives, comme elle doit l'être; ce qui prouve l'exactitude du calcul. Ensuite il est facile de voir que la seconde valeur de x est $\frac{2}{3}$. Pour savoir si les deux autres valeurs peuvent être de même exprimées par des fractions exactes, on aura recours à l'expédient que j'ai suggéré (354), et on aura pour la premiere valeur, compl. log.x = — 0,3679768 = log.$\frac{1}{2,333333}$; et il est aisé de voir qu'en multipliant par 3 la derniere fraction, on a $x = \frac{3}{7}$. En effet log.$\frac{3}{7}$ est 9,6320232, c'est-à-dire précisément le logarithme de la premiere valeur de x. Mais la valeur négative doit être égale à la somme des deux positives, prises avec un signe

contraire ; elle sera donc $-\frac{2}{3}-\frac{5}{7}=-\frac{23}{21}$. On aura donc, pour les trois valeurs de x dans l'équation donnée, $+\frac{2}{3}$, $+\frac{5}{7}$, $-\frac{23}{21}$. En substituant séparément chacune d'elles dans l'équation, on pourra s'assurer de leur justesse.

J'ai rassemblé, pour plus de commodité, dans la table V, à la fin de cet Ouvrage, les solutions de toutes les équations du second et du troisieme degré.

CHAPITRE XIII.

De la Résolution numérique de toutes sortes d'Équations.

364. AVANT d'exposer la solution directe de certaines équations trigonométriques, soit finies soit infinies, qui peuvent se présenter plus fréquemment, je crois devoir donner une méthode générale indirecte, qui m'a paru très commode dans la pratique pour la résolution numérique d'une équation quelconque, et dont j'eus d'abord l'idée en cherchant la solution de l'équation suivante,

(A)... $a \sin.x + b \text{ tang.} x = n$,

par laquelle je voulois trouver l'arc x. Cet arc étant, dans ce cas, représenté par deux différentes lignes trigonométriques, il faudroit commencer par en éliminer une, si l'on vouloit résoudre l'équation directement. En substituant, par exemple, à tang.x sa valeur, (I. 34e), on auroit $a \sin.x + \frac{b \sin.x}{\sqrt{(1-\sin.^2 x)}} = n$, ou, en faisant disparoître, comme il seroit nécessaire, le signe radical, $a^2 \sin.^4 x - 2an \sin.^3 x + (b^2 + n^2 - a^2) \sin.^2 x + 2an \sin.x = n^2$, c'est-à-dire une équation du quatrieme degré ; et l'on sait assez combien la solution d'une pareille équation est laborieuse ; tandis

Simpson Essays, 1740.

qu'avec une ou deux fausses positions, on trouvera très facilement, comme il suit, la valeur cherchée.

En différentiant l'équation (A), on a (II. 37°, 39°), $a \cos.x \times \delta x + \frac{b\delta x}{\cos.^2 x} = \delta n$; d'où l'on tire

$$(B)\ldots\ \delta x = \frac{\delta n}{a \cos.x + \frac{b}{\cos.^2 x}}.$$

Si on calcule l'équation (A) en supposant pour x une valeur quelconque, on aura une valeur fausse de n; puis en appellant δn l'erreur de cette valeur, on aura, par le calcul de l'équation (B), la correction δx qu'il faut faire à la valeur supposée de x, pour avoir sa valeur exacte, ou du moins beaucoup plus approchée. En substituant de nouveau dans l'équation (A) cette nouvelle valeur de x, s'il reste une erreur δn, elle sera beaucoup moindre que la premiere; ensorte que par l'équation (B) on obtiendra une seconde correction beaucoup plus exacte de la valeur de x; et en continuant d'opérer ainsi, on arrivera promptement à cette valeur avec autant de précision qu'il sera possible.

Comme il est rare que l'on n'ait pas d'avance quelque idée de la valeur approchée de l'inconnue, il suffira le plus souvent, pour la trouver, de calculer une fois seulement les deux équations. Au surplus la répétition de ces calculs n'est pas fatigante, attendu les quantités constantes et l'uniformité des opérations. Cette méthode a l'avantage d'être applicable avec une égale facilité aux équations les plus compliquées, soit algébriques soit trigonométriques, et même aux équations transcendantes; et elle se présente si naturellement, que je suis étonné qu'on n'ait pas pensé à en faire usage dans un grand nombre de problêmes, et spécialement dans celui de Kepler (769), qu'aucun autre moyen ne peut résoudre avec plus de promptitude et de simplicité. La seule condition nécessaire pour que cette méthode convienne dans tous les cas, c'est que δn soit notablement plus petit que n; ce qu'on obtiendra en calculant l'équation proposée, avec une seconde supposition pour

la valeur de x, lorsque la premiere aura donné δn trop grande. La raison en est claire ; en différentiant, on néglige les puissances de δx, (133), et par conséquent les résultats seront d'autant plus loin de la vérité, que les différentielles seront plus éloignées d'être infiniment petites.

Démontrons, par quelques exemples, l'utilité de la méthode proposée.

365. Soit à résoudre l'équation

$$8 \sin.x + \text{tang.}x \sqrt{7803} = 55 = n.$$

Je suppose $x = 35°$, et j'ai $8 \sin.35° = 4,58861$

$\text{tang.}35° \sqrt{7803} = 61,85254$

somme ou valeur fausse de n $\quad 66,44115$

Donc $\delta n = 66,44115 - 55 = 11,44115$.

Cette valeur de δn est trop grande pour qu'on puisse espérer, au moyen de l'équation différentielle (B), une valeur très approchée de δx. Mais pour avoir moins d'erreur, j'observe que δn égale à-peu-près un sixieme de la valeur fausse trouvée pour n ; et faisant de même $\delta x = 6°$, c'est-à-dire à-peu-près un sixieme de la valeur supposée de x, j'emploie, dans le calcul de l'équation (B), cos.32° au lieu de cos.35° ; ce qui m'est indiqué par les différences finies du sinus et de la tangente (II. 30e, 32e), dans lesquelles je vois qu'au lieu de cos.x, je dois à la rigueur employer, lorsqu'il s'agit du sinus, cos.$(x - \frac{1}{2}\delta x)$, (nous verrons ci-dessous la raison de la différentielle négative), et lorsqu'il s'agit de la tangente, cos.x cos.$(x - \delta x)$, ce qui revient, à très peu près, à cos.$^2(x - \frac{1}{2}\delta x)$. J'ai donc

$$8 \cos.32° = 6,784$$

$$\frac{\sqrt{7803}}{\cos.^2 32°} = 122,826$$

somme $\quad 129,61$

et divisant δn par cette somme, puis multipliant par R″, (263), je trouve $\delta x = 5° 3' 28''$.

Si dans ce calcul je n'avois pas eu l'attention d'employer cos.32° au lieu de cos.35°, j'aurois trouvé $\delta x = 4° 44' 36''$, et l'on verra bientôt combien cette valeur s'éloigne davantage de la valeur exacte de δx.

J'observe que, dans l'équation (B), δx et δn ont le même signe, et qu'ayant trouvé ci-dessus une valeur trop grande pour n, il en résulte que δn et par conséquent δx sont négatives. En retranchant donc 5° 3′ (la valeur de δx est, dans ce cas-ci, trop grande, et ne peut être assez exacte pour qu'on tienne compte des secondes) de 35°, premiere valeur supposée de x, j'ai, pour valeur très approchée, $x = 29° 57'$. En calculant de nouveau avec cette valeur l'équation proposée, j'ai $8\sin.29° 57' + \text{tang.}29° 57' \sqrt{7803} = 54{,}89122$, seconde valeur presque exacte de n; d'où je tire $\delta n = 0{,}10878 = \frac{n}{550}$ environ. Donc, en supposant $\delta x = \frac{x}{550}$ ou, en nombres ronds, $\frac{30°}{550}$ ou 3′ à-peu-près, j'aurai $\delta x = \frac{0{,}10878}{8\cos.29° 58' \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7803}}{\cos.^2 29° 58' \frac{1}{2}}}$, ou, en effectuant le calcul du dernier membre, et multipliant par R″, $\delta x = 3'$ exactement. Ici δx est positif; donc il faut l'ajouter à la valeur approchée 29° 57′ déja trouvée pour x, et l'on aura $x = 30°$ dans l'équation proposée.

Nous venons de voir par quels artifices on peut abréger le travail dans cette méthode : appliquons-la maintenant à un problême utile.

366. *Trouver la limite commune de la convergence des deux séries* (U), (153), *et* (Z), (156).

Le but de la solution de ce problême est de reconnoître quelle est la plus convergente de ces deux séries pour calculer la tangente d'un arc donné.

Si on veut calculer une tangente par le moyen de la série (Z) des cotangentes, il faut employer 90° — A au lieu de A. Cette substitution faite, si l'on compare deux termes également distants

du premier dans les deux séries, la convergence sera la même lorsque ces deux termes auront des valeurs égales. Cette comparaison ne doit pas être faite entre les premiers termes, la série la plus convergente étant celle dans laquelle les termes diminuent le plus de valeur à mesure qu'ils s'éloignent du premier. Je prends donc le huitieme terme de la série (U), qui est (155), $\frac{929569\,A^{15}}{3^4.5^3.7^2.9.11.13.15}$, et de même le huitieme terme de la série (Z), qui est $\frac{4(90^\circ - A)^{13}}{3^4.5^3.7.9.11.13}$. En les mettant en équation, et multipliant les deux membres par $3^4.5^3.7.9.11.13$, j'ai $\frac{929569}{7\times 5} \times A^{15} = 4(90^\circ - A)^{13}$ ou $\frac{929569}{140} \times A^{15} = (90^\circ - A)^{13}$, équation de laquelle il s'agit de tirer la valeur de A. Soit, pour plus de simplicité, $\frac{929569}{140} = a$. En tirant la racine 13e, j'aurai $\sqrt[13]{a}\,A^{15} = 90^\circ - A$, et par conséquent $a^{\frac{1}{13}} A^{\frac{15}{13}} + A = 90^\circ = n$. Désignons par B une valeur de A supposée à volonté, et soit d'abord $B = 40^\circ$. Je fais le calcul suivant :

log.40	= 1,60205999
(262), compl.log.R°	= 8,24187737
log.B	= 9,84393736
log.B^{15} ou 15 log.B	= 7,6590604
log.a = log.929569	= 5,9682816
log.a = compl.log.140	= 7,8538720
log.aB^{15}	= 1,4812140
$\frac{1}{13}$ log.aB^{15}	= 0,1139395
Pour avoir $\sqrt[13]{aB^{15}}$ en degrés, j'ajoute log.R°	= 1,7581226
somme	1,8720621
Donc $\sqrt[13]{aB^{15}}$	= 74°, 48385
B	= 40°
Somme (que je désignerai par n')	114°, 48385
La véritable valeur de n est	90°
Erreur, ou $\delta n'$, (364)	24°, 48385

Cette erreur est considérable et mériteroit une seconde supposition

avant de faire usage du calcul différentiel. Mais nous nous en dispenserons, et nous obtiendrons une correction presque juste en employant, dans le calcul numérique de l'équation différentielle que nous allons former, une valeur $B - \frac{1}{2}\delta B$ au lieu de B, à l'imitation de ce que nous avons fait (365). En différentiant l'équation calculée, $a^{\frac{1}{3}} B^{\frac{15}{13}} + B = n'$, j'aurai $\delta n' = \frac{15}{13} a^{\frac{1}{3}} B^{\frac{15}{13}-1} \delta B + \delta B = \delta B \left(1 + \frac{15}{13} a^{\frac{1}{3}} B^{\frac{2}{13}}\right)$; d'où je tire $\delta B = \frac{\delta n'}{1 + \frac{15}{13}\sqrt[13]{aB^2}}$, et puisque $\delta n' = \frac{1}{8} n'$ à-peu-près, si je suppose de même $\delta B = \frac{1}{8} B = 8°$, j'aurai $B - \frac{1}{2}\delta B = 36°$ pour la valeur à employer dans l'équation différentielle, dont voici le calcul, dans lequel j'appelle D la quantité $B - \frac{1}{2}\delta B$:

log. 36	= 1,5563025o
compl. log. R°	= 8,24187737
log. D	= 9,79817987
Idem	= 9,79817987
Je tire du calcul précédent log. a	= 3,8221536
log. a D²	= 3,41851334
$\frac{1}{13}$ log. a D²	= 0,26296256
log. 15	= 1,17609126
compl. log. 13	= 8,88605665
somme	0,3251105
Donc $\frac{15}{13}\sqrt[13]{aD^2}$	= 2,11403
compl. log. 3,11403	= 9,5066776
log. $\delta n'$ = log. — 24,48385	= 1,3888797
somme ou log. — δB	= 0,895557

Donc $\delta B = -7,862 = -7° 52'$, et par conséquent je trouve pour la valeur cherchée de A, 32° 8'; ce qui ne diffère que de peu de secondes de la véritable valeur, comme on peut le reconnoître par une seconde opération. Mais dans la solution du problême dont il s'agit, plus d'exactitude seroit inutile, et nous pouvons conclure que pour calculer une tangente, la plus conver-

gente des séries (U) et (Z) est la première quand l'arc est moindre que 32°, et la seconde quand l'arc est de plus de 32°.

Si dans les deux problèmes que nous venons de résoudre, on essaye d'employer les regles ordinaires pour la correction des fausses positions, on reconnoîtra que la méthode que nous proposons est, dans bien des cas, préférable à ces regles : pour le prouver d'autant mieux, nous allons appliquer cette même méthode à divers problèmes relatifs à la quadrature du cercle, qu'Euler a résolus au moyen d'un grand nombre de fausses positions, (*Anal. infinit.* Lib. II, cap. XXII).

367. Dans le premier de ces problèmes, il s'agit de trouver quel est l'arc égal à son cosinus. L'équation à résoudre est donc $A = \cos.A$.

Je suppose d'abord pour A une valeur quelconque, que je nomme P; j'appelle Q la valeur que j'aurai pour A dans le second membre, lorsque j'aurai mis P dans le premier; ce qui me donnera

(C)..... $P = \cos.Q$.

En différentiant, j'ai $\delta P = -\delta Q \sin.Q$. Je fais $\delta P = A \backsim P$; d'où il suit que $\delta Q = A \backsim Q$, et que par conséquent $A = P + \delta P = Q + \delta Q$. Donc

(D)..... $\delta P = Q - P + \delta Q$.

Donc aussi $Q - P + \delta Q = -\delta Q \sin.Q$, ou $Q - P = -\delta Q(1 + \sin.Q) = -\delta Q \times 2\sin.^2(45° + \frac{1}{2}Q)$, (I. 11°). D'où je déduis

(E)..... $\delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q-P)}{\sin.^2(45° + \frac{1}{2}Q)}$.

Les équations (C), (E) nous donneront promptement la valeur cherchée de A.

En effet supposons d'abord, avec Euler, $P = 30°$.

$$\begin{aligned} \log.\ 30 &= 1,477121 \\ (262),\ \text{compl. log. R}° &= \underline{8,241877} \\ \log.\ P = \log.\cos.Q &= 9,718998; \end{aligned}$$

ce

ce qui donne $Q = 58° 26'$: donc $\frac{1}{2}(Q - P) = 14° 13' = 14°, 2$ à-peu-près; et $45° + \frac{1}{2}Q = 74° 13'$. En calculant l'équation (E), on aura par conséquent

$$\begin{aligned} \log. 14,2 &= 1,15229 \\ \text{compl.log.sin.}74° 13' &= 0,01669 \\ \log. -\delta Q &= \underline{0,01669} \\ &= 1,18567 ; \end{aligned}$$

ce qui donne $\delta Q = -15°, 33 = -15° 20'$. Pour avoir cette valeur plus approchée, je corrige l'erreur la plus grave (260) de la formule (E), en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q dans l'expression $\sin.(45° + \frac{1}{2}Q)$, comme l'enseignent les différentielles finies des lignes trigonométriques; et j'ai $Q + \frac{1}{2}\delta Q = 58° 26' - 7° 40' = 50° 46'$, et $45° + \frac{1}{2}(Q + \frac{1}{2}\delta Q) = 70° 23'$. Alors l'équation (E) donne $\delta Q = -\frac{14°,2}{\sin.^2 70° 23'} = -16°$; donc A ou $Q + \delta Q = 58° 26' - 16° = 42° 26'$.

Cette valeur de A ne peut être exacte, parceque l'erreur δQ est trop grande; mais elle est assez approchée pour qu'en faisant encore une autre supposition seulement, on parvienne à la valeur cherchée. Soit donc, pour seconde supposition, et en prenant pour les minutes un nombre qui puisse se réduire exactement en dixiemes de degrés, $P = 42° 24' = 42°, 4$. En calculant l'équation (C), on a

$$\begin{aligned} \log. 42,4 &= 1,62736586 \\ \text{compl.log.R}° &= 8,24187737 \\ \log.\cos.Q &= \underline{9,8692432} \end{aligned}$$

Donc $Q = 42° 16' 0'', 89$, et $\frac{1}{2}(Q - P) = -3' 59'', 555$. Alors l'équation (E) donne $\delta Q = \frac{239'', 555}{\sin.^2 66° 8'} = 286'', 5$; et en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q dans le dénominateur, on aura, avec toute la précision que peuvent donner les logarithmes à sept décimales, $\delta Q = \frac{239'', 555}{\sin.^2 66° 9' 12''} = 286'', 36$. Donc A ou $Q + \delta Q = 42° 16' 0'', 89 + 4' 46'', 36 = 42° 20' 47'', 25$. Euler fait sept suppositions et calcule trois regles de trois pour

arriver à cette valeur. Au lieu de $15''' = 0'', 25$, il trouve $14'''$ par une erreur dans la derniere des proportions qu'il emploie : mais au surplus les logarithmes à sept décimales ne peuvent donner exactement les tierces ; et si je tiens compte des centiemes de secondes, c'est dans la seule vue d'avoir les dixiemes avec précision.

Ce problême est utile pour trouver le sinus qui divise en deux parties égales l'aire du quart de cercle, et pour trouver la corde qui divise en deux parties égales l'aire du demi-cercle, comme on peut le voir dans le troisieme et le quatrieme problême d'Euler.

Dans le second problême qu'il se propose, il s'agit de trouver le secteur que la corde divise en deux également ; dans ce cas on a à résoudre l'équation $A = \sin.2A$. Je fais $P = \sin.2Q$, et j'ai $\delta P = 2\delta Q \cos.2Q = Q - P + \delta Q$, suivant la formule (D). Donc $Q - P = 2\delta Q (\cos.2Q - \frac{1}{2}) = 2\delta Q (\cos.2Q - \cos.60^\circ) = 4\delta Q \sin.(30^\circ - Q) \sin.(30^\circ + Q)$, (II. 23e) ; et par conséquent

$$\delta Q = \frac{\frac{1}{4}(Q - P)}{\sin.(30^\circ - Q) \sin.(30^\circ + Q)}.$$

Faisons maintenant, avec Euler, $P = 50^\circ$; nous aurons $\frac{50}{R^\circ} = \sin.2Q = \sin.60^\circ 46' = \sin.119^\circ 14'$, (19). Cette derniere valeur est celle qu'il convient d'employer, puisqu'elle donne pour Q une valeur plus approchée de celle de P ; cette valeur sera $59^\circ 37' = Q$. Donc $\frac{1}{4}(Q - P) = 2^\circ 24'$ à-peu-près, et (154), $\delta Q = \frac{2^\circ, 4}{-\sin.29^\circ 37' \sin.89^\circ 57'} = -4^\circ, 8$; puis, en employant $Q + \frac{1}{2}\delta Q$ au lieu de Q, ce dont nous n'avertirons plus, $\delta Q = \frac{2^\circ, 4}{-\sin.27^\circ 13' \sin.87^\circ 13'} = -5^\circ, 25$. Par conséquent A ou $Q + \delta Q = 59^\circ 37' - 5^\circ 15' = 54^\circ 22'$.

Soit donc pour seconde hypothese $P = 54^\circ 21' = \frac{54,35}{R^\circ} = \sin.2Q$: alors $Q = 54^\circ 13' 34'', 5$; et par conséquent $\frac{1}{4}(Q - P) = -1' 51'', 375$; ce qui donne $\delta Q = \frac{-111'', 375}{-\sin.24^\circ 14' \sin.84^\circ 14'} =$

273″; et enfin, avec toute la précision qu'on peut desirer, $\delta Q = \frac{-111'',375}{\sin.24°\,15'\,50''\ \sin.84°\,15'\,50''} = 272'',39$. Donc $A = Q + \delta Q = 54°\,13'\,34'',5 + 4'\,32'',4 = 54°\,18'\,6'',9$.

La solution de ce problême a coûté à Euler six hypotheses et deux regles de trois.

Dans le cinquieme problême Euler propose de tirer d'un point de la circonférence deux cordes qui coupent l'aire du cercle en trois parties égales. On a à résoudre l'équation $A = \sin.(60° - A)$. Je fais $P = \sin.(60° - Q)$, et j'ai $\delta P = -\delta Q \cos.(60° - Q) = Q - P + \delta Q$; d'où je tire $Q - P = -\delta Q\left(1 + \cos.\overline{60° - Q}\right) = -2\delta Q \cos.^2(30° - \frac{1}{2}Q)$, (I. 24°); et par conséquent

$$\delta Q = \frac{-\frac{1}{2}(Q - P)}{\cos.^2(30° - \frac{1}{2}Q)}.$$

Faisons actuellement, comme Euler, $P = 20°$. Nous aurons $\frac{20}{R°} = \sin.(60° - Q) = \sin.20°\,26'$; ce qui donne $Q = 39°\,34'$, et $\frac{1}{2}(Q - P) = 9°\,47' = 9°,8$ à-peu-près. Donc $\delta Q = \frac{-9°,8}{\cos.^2 10°\,13'} = -10°,1$; et, plus exactement, $\delta Q = \frac{-9°,8}{\cos.^2 12°\,45'} = -10°,3$. Donc $A = Q + \delta Q = 39°\,34' - 10°\,18' = 29°\,16'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 29°\,15' = \frac{29,25}{R°} = \sin.(60° - Q)$; ce qui donne $Q = 29°\,18'\,8'',17$. Alors $\frac{1}{2}(Q - P) = 1'\,34'',085$; et $\delta Q = \frac{-94'',085}{\cos.^2 15°\,21'} = -101''$; et plus exactement, $\delta Q = \frac{-94'',085}{\cos.^2 15°\,21'\,20''} = -101'',18$. Donc $Q + \delta Q$ ou $A = 29°\,16'\,27''$, comme le trouve Euler au moyen de six suppositions et de deux regles de trois.

L'objet du sixieme problême d'Euler est de trouver un arc qui soit égal à la somme du rayon, du cosinus et du sinus. On a à résoudre l'équation $180° - A = 1 + \cos.A + \sin.A$. A l'unité je substitue la valeur du rayon en degrés, laquelle est 57°,29578, comme on peut le déduire de log.R°, (262); et j'ai 122°,70422 —

$A = \cos.A + \sin.A = \sin.(45° + A)\sqrt{2}$, (II. 7°). Soit, pour abréger, 122°, 70422 = C; nous aurons, toujours par la même méthode, $C - P = \sin.(45° + Q)\sqrt{2}$, et $-\delta P = \delta Q \cos.(45° + Q)\sqrt{2} = P - Q - \delta Q$: d'où l'on tire $P - Q = \delta Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \cos.\overline{45° + Q}\right)\sqrt{2} = \delta Q\left(\cos.45° + \cos.\overline{45° + Q}\right)\sqrt{2} = 2\delta Q \cos.(45° + \frac{1}{2}Q)\cos.\frac{1}{2}Q\sqrt{2}$, (II. 19°). Et par conséquent

$$\delta Q = \frac{\frac{1}{2}(P - Q)}{\cos.\frac{1}{2}Q \cos.(45° + \frac{1}{2}Q)\sqrt{2}}.$$

Soit, avec Euler, P = 40°; alors C — P = 82°, 70422. Mais $\frac{82,70422}{R°\sqrt{2}}$ est > 1, tandis que cette quantité doit être égale à $\sin.(45° + Q)$; donc la valeur supposée pour P est trop petite.

Par la seconde supposition d'Euler, P = 42°; ce qui donne $\frac{80,70422}{R°\sqrt{2}} = \sin.(45° + Q) = \sin.84°\ 52'$, et par conséquent Q = 39° 52′, $\frac{1}{2}(P - Q) = 1°\ 4' = 1°,07$ à très peu près, et $\delta Q = \frac{1°,07}{\cos.19°\ 56'\ \cos.64°\ 58'\sqrt{2}} = 1°,9 = 1°\ 54'$; et, plus exactement, $\delta Q = \frac{1°,07}{\cos.20°\ 24'\ \cos.65°\ 24'\sqrt{2}} = 1°,94 = 1°\ 56'$. Donc $Q + \delta Q$ ou $A = 39°\ 52' + 1°\ 56' = 41°\ 48'$.

Soit donc, pour derniere hypothese, P = 41° 48′ = 41°, 8. Alors C — P = 80°, 90422; et $\frac{80,90422}{R°\sqrt{2}} = \sin.86°\ 49'\ 36'',4$; ce qui donne Q = 41° 49′ 36″, 4, et $\frac{1}{2}(P - Q) = -48'',2$. Donc $\delta Q = \frac{-48'',2}{\cos.20°\ 55'\ \cos.65°\ 55'\sqrt{2}} = -89'',4$. Cette quantité est si petite, qu'il est inutile d'appliquer au dénominateur la correction ordinaire. On a donc $A = Q + \delta Q = 41°\ 48'\ 7'',0$, valeur qu'Euler obtient par quatre suppositions et deux regles de trois.

Dans le septieme problême, Euler cherche un secteur qui soit égal à la moitié du triangle formé par le rayon, par la tangente et par la sécante. L'équation à résoudre est 2A = tang.A. Je fais 2P = tang.Q, et j'ai $2\delta P = \frac{\delta Q}{\cos.^2 Q} = 2(Q - P + \delta Q)$,

et $Q - P = \delta Q \left(\frac{1}{2\cos.^2 Q} - 1\right) = \delta Q \times \frac{1 - 2\cos.^2 Q}{2\cos.^2 Q} = -\delta Q \times \frac{\cos. 2Q}{2\cos.^2 Q}$, (I. 23e). Donc

$$\delta Q = \frac{2(P - Q)\cos.^2 Q}{\cos. 2Q}$$

Actuellement faisons, avec Euler, $P = 60°$: nous aurons $\frac{120}{R°} = \text{tang.} Q$; $Q = 64° 29'$; $2(P - Q) = -8° 58' = -8°,95$ à-peu-près; $\delta Q = -\frac{8°,95 \cos.^2 64° 29'}{\cos. 128° 58'} = 2°,64 = 2°, 38'$; et, plus exactement, $\delta Q = -\frac{8°,95 \cos.^2 65° 48'}{\cos. 131° 36'} = 2°, 265$. Donc A ou $Q + \delta Q = 66° 45'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 66°,75$; et par conséquent $\frac{133,5}{R°} = \text{tang.} Q$. Alors $Q = 66° 46' 18'',72$; $2(P - Q) = -157'',44$; $\delta Q = -\frac{157'',44 \cos.^2 66° 46'}{\cos. 133° 33'} = 35''\frac{1}{2}$, et, scrupuleusement, $\delta Q = -\frac{157'',44 \cos.^2 66° 46' 54''}{\cos. 133° 33' 48''} = 35'',51$. Donc $A = Q + \delta Q = 66° 46' 54'',23$.

Euler parvient à ce résultat au moyen de six suppositions dont le P. Fontana a aussi fait usage récemment (Tom. II *des Mémoires de la Société Italienne*) : ce qui me donne lieu de croire qu'on n'avoit point encore eu l'idée d'abréger la méthode de fausse position, à l'aide du calcul différentiel.

Enfin, dans le huitieme problême, Euler se propose de déterminer un arc qui soit égal à sa corde continuée jusqu'à la rencontre du prolongement du rayon qui passe à 90° de l'origine de cet arc. L'équation à résoudre est $A \sin.\frac{1}{2}A = 1$. Je l'écris ainsi, $A = \text{coséc.}\frac{1}{2}A$, expression qui conduit plus promptement à l'équation différentielle ci-après. Je fais ensuite, comme dans les opérations précédentes, $P = \text{coséc.}\frac{1}{2}Q$, et réduisant à la forme infinitésimale la différentielle finie de la cosécante (712), j'ai $\delta P = -\frac{1}{2}\delta Q \times \frac{\cos.\frac{1}{2}Q}{\sin.^2\frac{1}{2}Q} = Q - P + \delta Q$, et $Q - P = -\delta Q \left(1 + \frac{\cot.\frac{1}{2}Q}{2\sin.\frac{1}{2}Q}\right)$.

Maintenant faisons avec Euler $P = 70°$. On a $\frac{70}{R^\circ} = \text{cosec.}\frac{1}{2}Q$, ou $\frac{R^\circ}{70} = \text{sin.}\frac{1}{2}Q = \text{sin.}54°\,56'$: donc $Q = 109°\,52'$, et $Q - P = 39°\,52' = 39°, 87$ à-peu-près. Mais $\frac{\text{cot.}54°\,56'}{2\,\text{sin.}54°\,56'} = 0,4288$: donc $\delta Q = -\frac{39°,87}{1,4288} = -27°, 9$. Plus exactement, $\frac{\text{cot.}47°\,57'}{2\,\text{sin.}47°\,57'} = 0,60735$, et $\delta Q = -\frac{39°,87}{1,60735} = -24°, 8$. Donc A ou $Q + \delta Q = 85°\,4'$.

Soit donc, pour seconde supposition, $P = 85°\,3' = 85°, 05$. Nous aurons $\frac{R^\circ}{85,05} = \text{sin.}\frac{1}{2}Q = \text{sin.}42°\,21'\,3'', 9$; et par conséquent $Q = 84°\,42'\,7'', 8$; et $Q - P = -20'\,52'', 2 = -1252'', 2$. Mais $\frac{\text{cot.}42°\,21'}{2\,\text{sin.}42°\,21'} = 0,81426$: donc $\delta Q = \frac{1252'', 2}{1,81426} = 690'', 2 = 11'\,30'', 2$. Plus rigoureusement, $\frac{\text{cot.}42°\,23'\,56'', 4}{2\,\text{sin.}42°\,23'\,56'', 4} = 0,812098$; donc $\delta Q = \frac{1252'', 2}{1,812098} = 691'', 02 = 11'\,31'', 02$. Donc $A = Q + \delta Q = 84°\,53'\,38'', 82$. Euler trouve une valeur un peu moins approchée : il y parvient après six suppositions.

Les équations résolues dans cet article sont du genre des équations *transcendantes*, parce qu'elles contiennent l'arc A sous deux formes hétérogenes (129), c'est-à-dire parce que l'arc y est comparé et égalé à des lignes droites, telles que les lignes trigonométriques de cet arc ou de ses multiples.

368. Il est facile de résoudre par notre méthode l'équation de cette forme, $\text{sin.}nA = m\ \text{sin.}A$, que propose M. d'Alembert, (*Opusc. Math.* Tom. V, p. 222), et de laquelle il s'agit de tirer la valeur de l'arc A. Je fais $\text{sin.}nP = m\ \text{sin.}Q$, et j'ai $n\delta P\ \text{cos.}nP = m\delta Q\ \text{cos.}Q$. Substituant la valeur de δP, (367), (D), je trouve $\delta Q = \frac{(Q - P)\ \text{cos.}nP}{\frac{m}{n}\text{cos.}Q - \text{cos.}nP}$. Deux suppositions donneront la valeur de A, pourvu que l'on observe, dans l'une et dans l'autre de ces suppositions, de faire deux calculs pour avoir la valeur de δQ, en employant dans le second de ces calculs $\text{cos.}n(P + \frac{1}{2}\delta P)$

et cos.$(Q + \frac{1}{2}\delta Q)$ au lieu de cos.nP et de cos.Q, conformément à ce que nous avons fait (367).

Au reste ce problême et ceux de l'article précédent peuvent se résoudre directement par les séries infinies. Par exemple, l'équation de M. d'Alembert se transforme en celle-ci, (149), (W), $nA - \frac{1}{6}n^3 A^3 + \frac{1}{120}n^5 A^5 - \&c. = m(A - \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{120}A^5 - \&c.)$. Donc $(n - m)\,A - \frac{1}{6}(n^3 - m)\,A^3 + \frac{1}{120}(n^5 - m)\,A^5 - \&c. = 0$. Divisant par A et transposant, on a

$$n - m = \tfrac{1}{6}(n^3 - m)\,A^2 - \tfrac{1}{120}(n^5 - m)\,A^4 + \&c.$$

Qu'on fasse $A^2 = y$, et cette équation comparée à l'équation (P), (148), en observant qu'ici $n - m$ tient lieu de m dans l'équation (P), donnera une autre équation de la forme (Q), de laquelle on tirera la valeur de y, et par conséquent celle de A.

369. Nous avons donné une méthode indirecte pour résoudre une équation quelconque. Il nous reste à faire voir combien la Trigonométrie donne de facilité pour arriver à de certaines solutions qu'on n'obtient qu'avec peine par la voie de l'analyse.

Soit l'équation générale

(F)..... $a \cos.A + b \sin.A = n$, (*)

de laquelle on veut tirer la valeur de l'arc A. Je fais $n = m \times \cos.(A \frown B)$, et par conséquent $a \cos.A + b \sin.A = m \cos.A \cos.B + m \sin.A \sin.B$: m étant indéterminée, je puis supposer $a = m \cos.B$; substituant cette valeur de a, réduisant et divisant par sin.A, j'ai $b = m \sin.B$. Cette équation et la précédente, $a = m \cos.B$, donnent $m = \frac{a}{\cos.B} = \frac{b}{\sin.B}$, et par conséquent

(G)..... $\text{tang.}B = \frac{b}{a}$.

Et puisque, par la supposition, $\cos.(A \frown B) = \frac{n}{m}$, substituant la premiere valeur de m, j'aurai

(H)..... $\cos.(A \frown B) = \frac{n \cos.B}{a}$.

(*) Soit l'équation $m \sin\varphi \pm \cos\varphi = n$; on cherchera $m = \text{cotang}\,\alpha$, d'où l'on tire $\sin(\varphi \pm \alpha) = n \sin\alpha$.

des équations de la forme (F) se réduit donc à chercher par l'équation (G) un arc B, et par l'équation (H) un arc A ∽ B : la différence de ces deux arcs est l'arc cherché A.

Si quelqu'un des termes du premier membre de l'équation (F) étoit négatif, on donneroit, dans les équations (G), (H), le signe négatif à celui des coëfficients a et b qui, dans l'équation (F), se trouveroit précédé de ce signe; et on observeroit les regles des signes (42).

Cette méthode donne toujours la valeur de A moindre que 90°. Lorsqu'on aura lieu de croire que cette valeur doit être plus grande, on calculera avec la valeur trouvée l'équation (F); et si le calcul ne donne pas pour n sa valeur connue, il s'ensuivra que A est en effet obtus. Alors on changera le signe de a cos.A dans la formule (F), ou le signe de a dans les formules (G), (H): ces formules donneront alors le supplément de la véritable valeur de A.

370. Soit maintenant à résoudre l'équation

$$a \text{ tang.} x + b \text{ cot.} x = n.$$

En multipliant l'équation par $\frac{\text{tang.}x}{a}$, et transposant, on a $\text{tang.}^2 x - \frac{n}{a} \text{ tang.} x = -\frac{b}{a}$, équation facile à résoudre par la méthode (352).

Si dans la proposée les signes étoient différents, on l'amèneroit toujours de même à une équation du second degré, dont on auroit la solution dans la table V.

371. Soit enfin proposée l'équation suivante, finie ou infinie :

(K)... $z = u + a \sin.u + b \sin.2u + c \sin.3u +$ &c.,

dans laquelle on cherche la valeur de u. Cette équation est du genre des *transcendantes* (367). La solution la plus facile, dans les cas particuliers, est celle que j'ai donnée (364). Mais si l'on veut

veut une formule générale infinie, dans laquelle la série soit convertie analytiquement comme il suit,

$$(L)\ldots\ u = z + A\sin.z + B\sin.2z + C\sin.3z + \&c.,$$

les méthodes trigonométriques que nous avons vues jusqu'à présent sont extrêmement laborieuses; ce qui m'a donné lieu de chercher la méthode beaucoup plus simple que je vais exposer.

Si dans la série (K) on substitue les valeurs de $\sin.u$, $\sin.2u$, $\sin.3u$, &c., données par la série (W), (149), on aura, en réunissant les coëfficients de chaque puissance de u,

$$(M)\ldots\ z = (1 + a + 2b + 3c + \&c.)\,u - \tfrac{1}{6}(a + 2^3b + 3^3c + \&c.)\,u^3 + \tfrac{1}{120}(a + 2^5b + 3^5c + \&c.)\,u^5 - \&c.$$

En traitant de même la série (L), elle deviendra

$$(N)\ldots\ u = (1 + A + 2B + 3C + \&c.)\,z - \tfrac{1}{2.3}(A + 2^3B + 3^3C + \&c.)\,z^3 + \tfrac{1}{2.3.4.5}(A + 2^5B + 3^5C + \&c.)\,z^5 - \&c.$$

Pour plus de simplicité exprimons ces deux séries comme il suit:

$$z = mu - nu^3 + pu^5 - qu^7 + ru^9 - \&c.$$
$$u = Mz - Nz^3 + Pz^5 - Qz^7 + Rz^9 - \&c.$$

Substituons ensuite dans la derniere les valeurs de z, z^3, z^5, &c., prises de la précédente; et ordonnant les termes relativement aux puissances de u, (148), nous aurons

$$u = \begin{cases} Mz = Mmu - Mnu^3 + Mpu^5 - Mqu^7 + Mru^9 - \&c. \\ -Nz^3 = -Nm^3 + 3Nm^2n - 3Nm^2p + 3Nm^2q - \&c. \\ \qquad\qquad -3Nmn^2 + 6Nmnp - \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + Nn^3 - \&c. \\ +Pz^5 = Pm^5 - 5Pm^4n + 5Pm^4p - \&c. \\ \qquad\qquad + 10Pm^3n^2 - \&c. \\ -Qz^7 = -Qm^7 + 7Qm^6n - \&c. \\ +Rz^9 = +Rm^9 - \&c. \\ -\&c. \end{cases}$$

D'où nous tirerons par la méthode exposée (148),

$$M = \frac{1}{m}$$

$$N = -\frac{n}{m^4}$$

$$P = \frac{3n^2 - pm}{m^7}$$

$$Q = -\frac{12n^3 - 8mnp + qm^2}{m^{10}}$$

$$R = \frac{55n^4 - 55mn^2p + 10m^2nq + 5m^2p^2 - rm^3}{m^{13}}$$

Ce sont les équations finales du problême, puisqu'en substituant dans ces équations les valeurs de M, N, P, &c., m, n, p, &c., prises dans les séries (N), (M), il ne reste plus qu'à les résoudre par les méthodes ordinaires, pour en tirer les valeurs des indéterminées A, B, C, &c. Nous en allons faire un essai sur le problême de Kepler, en nous bornant à la quatrieme indéterminée D.

372. Au lieu de $M = \frac{1}{m}$, on a par les séries (N), (M), $1 + A + 2B + 3C + 4D = \frac{1}{1 + a + 2b + 3c + 4d}$, ou

(O)... $A + 2B + 3C + 4D = -\frac{a + 2b + 3c + 4d}{1 + a + 2b + 3c + 4d}$.

Au lieu de $N = -\frac{n}{m^4}$, on a $\frac{1}{6}(A + 8B + 27C + 64D) = -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{6(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}$, ou

(P)... $A + 8B + 27C + 64D = -\frac{a + 8b + 27c + 64d}{(1 + a + 2b + 3c + 4d)^4}$.

Or, dans le problême de Kepler, $a = 2e$, $b = \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4$, $c = \frac{1}{3}e^3$, $d = \frac{5}{32}e^4$, (en désignant par e l'excentricité de l'orbite d'une planete). Substituant ces valeurs dans l'équation (O), et réduisant, on a

$$A + 2B + 3C + 4D = -\frac{2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}{1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}.$$

Qu'on effectue la division, en négligeant les puissances de e supérieures à la quatrieme que nous avons prise pour limite, et on aura

(Q)... $A + 2B + 3C + 4D = -2e + \frac{5}{2}e^2 - 3e^3 + \frac{27}{8}e^4$.

Pour simplifier de la même maniere l'équation (P), il faut premièrement élever à la quatrieme puissance la valeur $(1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4)$ de $1 + a + 2b + 3c + 4d$. Dans cette opération on peut négliger même la quatrieme puissance de e, parceque dans la division elle n'influe que sur la cinquieme. Alors on a facilement $(1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3)^4 = 1 + 8e + 30e^2 + 72e^3$. En divisant par le second membre de cette équation la valeur de $a + 8b + 27c + 64d$, qui est $2e + 6e^2 + 9e^3 + 11e^4$, l'équation (P) deviendra

(R)... $A + 8B + 27C + 64D = -2e + 10e^2 - 29e^3 + 65e^4$.

Dans le problême de Kepler, la série (K) a cette propriété, que les coëfficients a, c, &c., correspondants aux multiples impairs de u, contiennent seulement les puissances impaires de e, c'est-à-dire, de l'excentricité, et que les coëfficients b, d, &c., correspondants aux multiples pairs de u, renferment seulement les puissances paires de e. La même loi doit avoir lieu par analogie dans la série (L) composée sur le modele de la série (K), et on en a la preuve par l'équation de la forme (L) déja calculée par plusieurs Mathématiciens, d'après d'autres méthodes. Si donc on admet pour principe que la valeur des indéterminées A, C, doit être exprimée par les puissances impaires de e, et celles de B, D par les puissances paires, on pourra tirer la valeur de ces quatre inconnues des deux seules équations (Q), (R), en les décomposant en quatre autres, comme il suit :

$A + 3C = -2e - 3e^3$; $\quad 2B + 4D = \frac{5}{2}e^2 + \frac{27}{8}e^4$;
$A + 27C = -2e - 29e^3$; $\quad 8B + 64D = 10e^2 + 65e^4$.

C'est par cet artifice que des cinq équations finales seulement (371), j'ai tiré la valeur de 9 indéterminées, en poussant l'approximation de la série (L) jusqu'à sin.$9z$ et à la 9e puissance de l'excentricité, comme on le verra (771).

373. Dans l'analyse trigonométrique on a quelquefois besoin

de développer les valeurs approchées de sin.(n sin.a), sin.(n cos.a), cos.(n sin.a), cos.(n cos.a). En considérant n sin.a comme un arc, on a par la série (W), (149),

$$\sin.(n \sin.a) = n \sin.a - \frac{n^3 \sin.^3 a}{2.3} + \frac{n^5 \sin.^5 a}{2.3.4.5} - \&c.$$

Si l'on veut cette valeur exprimée non par les puissances du sinus de a, mais par les sinus des multiples de a, on substituera les valeurs de $\sin.^3 a$, $\sin.^5 a$, &c., prises dans la table (127), et l'on aura

$$\sin.(n \sin.a) = \left(n - \frac{n^3}{8} + \frac{n^5}{192} - \&c.\right) \sin.a + \left(\frac{n^3}{24} - \frac{n^5}{384} + \&c.\right) \sin.3a + \left(\frac{n^5}{1920} - \&c.\right) \sin.5a + \&c.$$

On développeroit de même les autres sinus et cosinus proposés, en se servant, pour les cosinus, de la série (Y), (154).

Il est facile de voir que l'utilité de ces opérations dépend de la convergence des séries formées comme ci-dessus, et que cette convergence sera d'autant plus grande, que la quantité n sera plus petite.

CHAPITRE XIV.

Définitions, Notions et Propositions préliminaires, particulieres à la Trigonométrie sphérique.

374. LA Trigonométrie *sphérique* enseigne à résoudre les triangles formés par trois arcs de grands cercles sur la surface d'une sphere. Les côtés de ces triangles sont par conséquent des arcs, et s'évaluent comme les angles, en degrés, minutes, &c. Trois parties étant connues dans un *triangle sphérique*, la Trigonométrie sphérique donne les moyens de trouver toutes les autres dans la plupart des cas.

375. Si l'on prend pour centre un point à volonté dans l'univers, tous les points situés à une même distance de ce centre appartiendront à la surface d'une sphere ayant cette distance pour rayon. Il est donc indifférent que le globe sur lequel s'exerce la Trigonométrie sphérique, soit réel ou seulement imaginé, petit ou grand, plein ou vuide intérieurement en totalité ou en partie: les propositions trigonométriques sont générales pour une sphere quelconque; il suffit que dans une même démonstration, dans une même formule, on n'emploie pas en même-temps des spheres de diverses grandeurs, des arcs de rayons différents.

376. On appelle *grands cercles* ceux qui ont pour centre et pour rayon le centre et le rayon de la sphere. Tous les grands cercles sont donc égaux entre eux. Si on conçoit que le demi-cercle AEDB fasse une révolution entiere autour du diametre AB, le point D, que je suppose à égale distance des points A et B, décrira dans cette révolution la circonférence d'un grand cercle, dont le rayon est celui CD de la sphere, et le centre celui C de la sphere. Mais chaque autre point, comme E, de la demi-circonférence AEDB décrira un *petit cercle* ayant pour rayon une ordonnée EF, et pour centre un point F différent du centre C de la sphere. Il est évident 1°. que les petits cercles sont égaux entre eux, lorsqu'ils ont leurs centres à une même distance du centre de la sphere; 2°. que les petits cercles sont d'autant plus petits que leur centre est plus distant de celui de la sphere. Fig. 43

377. Si on divise une sphere en deux parties égales, le plan coupant passera par le centre, et par conséquent la section de la surface de la sphere sera un grand cercle. Mais par chaque point de la surface on peut faire une section qui passe par le centre de la sphere et qui la divise par le milieu: donc le nombre des grands cercles de la sphere est infini.

378. On sait par la Géométrie élémentaire, que trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent la position d'un plan. Si donc le plan coupant passe par le centre de la sphere et par

Fig.43 deux points donnés sur sa surface, la direction du plan coupant, et par conséquent la section de la superficie, seront déterminées. Donc d'un point à un autre sur la surface de la sphere, on peut toujours tracer ou concevoir un arc de grand cercle, et il ne peut y en avoir qu'un seul.

379. Puisque le centre de la sphere est commun à tous les grands cercles, toute ligne d'intersection de leurs plans passera par le centre commun, et sera par conséquent un diametre commun à la sphere et aux cercles coupés. Ainsi AB est le diametre de la sphere, du cercle ADBL et du cercle AGB (duquel la moitié seulement se voit obliquement dans la figure). Mais tout diametre divise la circonférence en deux parties égales ; donc 1°. *les grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales ;* 2°. *les points d'intersection des circonférences,* comme A et B, *sont toujours distants de* 180° *l'un de l'autre.*

380. On peut donc renfermer avec deux arcs seulement une portion de surface de la sphere, pourvu qu'ils soient chacun de 180°. Alors la superficie comprise, comme AEDBKGA, se nomme *fuseau.*

381. On appelle *axe* d'un grand cercle celui des diametres de la sphere, qui est perpendiculaire au plan ou à un diametre quelconque de ce cercle. Si on conçoît que dans la fig. 43 le rayon CD de la sphere soit élevé perpendiculairement au-dessus du plan sur lequel est décrit le grand cercle AEDBL, CD sera le demi-axe de ce cercle. De même AB est l'axe du grand cercle dont la circonférence passeroit par les points D et L, et dont le plan seroit perpendiculaire au cercle ADBL.

382. Les points extrêmes de l'axe, tels que A et B, se nomment les *pôles* du grand cercle dont AB est l'axe. L'arc AD = 90° = BD mesure sur la superficie de la sphere la distance des pôles à la circonférence ; et par conséquent *chaque point de la circonférence est distant de* 90° *de chacun des pôles.* Deux grands cercles ne peuvent donc avoir les mêmes pôles.

383. On peut concevoir une infinité de petits cercles paralleles à chaque grand cercle. Si EF est parallele à CD, le petit cercle qui a pour rayon EF se nomme et est en effet *parallele* au grand cercle décrit par le rayon CD dans la révolution du demi-cercle ADB autour de la droite AB. Or entre les pôles A et B de ce grand cercle, on peut concevoir une infinité d'ordonnées à l'axe AB, paralleles à CD, comme EF. Donc, &c.

Il s'ensuit que toute section de la sphere est un cercle, même lorsqu'elle ne passe pas par le centre, puisqu'on peut toujours imaginer une section parallele qui passe par le centre, (377).

384. Les pôles d'un grand cercle sont aussi ceux de tous ses paralleles, et tous les points de chaque circonférence sont à une même distance de l'un ou de l'autre des pôles. Il est évident, par exemple, que la révolution du rayon FE autour de l'axe AB n'altere en aucun point les distances EA, EB.

D'après ces principes il est aisé de déterminer, avec des compas sphériques, sur la surface d'un globe, les pôles d'un cercle donné, ou de décrire d'un pôle donné un grand ou un petit cercle.

385. Soit DAE un arc de grand cercle décrit d'un rayon CD de la sphere; et soit DBE un arc terminé aux mêmes points D, E, mais décrit d'un rayon plus petit FE. On voit, par l'opération même du compas, que l'arc décrit d'un rayon plus petit a une courbure plus grande. Donc *l'arc du grand cercle est le plus court qu'on puisse mener d'un point à un autre sur une surface sphérique.* Fig. 44

L'arc de grand cercle est la mesure naturelle et unique de toute distance sphérique, parceque c'est une mesure constante. Les petits cercles (376) étant au contraire inégaux, la Trigonométrie n'en fait aucun usage. Aussi quand nous parlerons simplement de cercles ou d'arcs, nous entendrons toujours les grands cercles ou les arcs de grands cercles.

386. Considérons dans la fig. 45 le fuseau AEDBKGA de la fig. 43; et cherchons à évaluer l'angle formé sur la surface de la

Fig.45 sphere par la rencontre de deux arcs, par exemple l'angle DAM.

Il est clair que l'angle DAM est le même que l'angle EAG : la grandeur d'un angle sphérique, de même que la grandeur d'un angle rectiligne, est indépendante de celle des côtés ; puisqu'*un angle sphérique n'est que l'ouverture ou l'inclinaison mutuelle de deux arcs, considérée dans les points immédiatement contigus à celui dans lequel ils se rencontrent.* Mais l'arc infiniment petit se confond avec sa tangente, puisqu'ils ont leur origine au même point, et qu'ils sont l'un et l'autre perpendiculaires au rayon qui aboutit à ce point. Donc un angle sphérique quelconque, EAG, formé par le concours de deux arcs AE, AG, est le même que l'angle formé par le concours des tangentes de ces deux arcs. Or les tangentes des arcs AE, AG, sont respectivement paralleles aux rayons CD, CM, qui sont perpendiculaires à AC, en supposant AD = 90° = AM. Par conséquent l'angle formé par ces tangentes sera égal à DCM. Mais cet angle ayant son sommet au centre de la sphere, il a pour mesure l'arc DM. Donc 1°. *un angle sphérique a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, à 90° de distance de leur intersection.*

387. L'angle DCM est aussi celui qui sert de mesure à l'inclinaison mutuelle des deux plans AEDB, AGKB. Si, pour mesurer cette inclinaison, on prenoit un angle quelconque formé par des lignes non perpendiculaires à la commune section AB, les lignes diversement inclinées donneroient des angles différents, qui par conséquent ne seroient pas propres à fixer une quantité déterminée pour l'inclinaison des deux plans. Et en effet, quand deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, leur angle d'inclinaison est nécessairement droit ; or il est facile de voir qu'il ne seroit pas droit, si on le considéroit formé par des lignes qui ne seroient pas perpendiculaires l'une et l'autre à la commune section. Donc 2°. *un angle sphérique a pour mesure l'inclinaison des plans des deux arcs qui le forment.*

388. En appliquant à l'angle DBM tout ce que nous venons de

de dire (386, 387), on démontrera de même qu'il a aussi pour mesure l'arc DM. Donc 1°. *les circonférences de deux cercles forment deux angles égaux, aux deux points de leur intersection ;* 2°. *ces deux points sont les pôles* (379, 382) *de l'arc qui sert de mesure commune à ces deux angles.*

389. Pour qu'un angle sphérique soit de 90°, il faut donc que ses côtés, prolongés s'il est nécessaire, passent par les pôles l'un de l'autre. En effet l'inclinaison des plans est visiblement égale à celle de leurs axes (381) ; si donc deux plans sont perpendiculaires entre eux, l'axe de l'un sera nécessairement dans le plan de l'autre.

Ainsi, dans la pratique, si l'on veut former un angle droit à l'extrémité D d'un arc DE, on prendra sur DE, prolongé s'il le faut, un arc DA = 90°. Ensuite du point A pour pôle et de l'intervalle AD, on décrira un arc DM ; et on aura ADM = 90°, puisque DE prolongé passe par le pôle A de l'arc DM, et que DM prolongé jusqu'à ce qu'il fût de 90°, se termineroit à un point distant, par la construction, de 90° des points A et D, et qui par conséquent (382, 378) seroit le pôle de l'arc DE.

390. On peut donc, d'un point quelconque de la surface de la sphere, mener un arc perpendiculaire sur un arc donné, prolongé s'il est nécessaire ; puisqu'il suffit pour cela de tracer un arc qui passe par le point donné et par le pôle de l'arc donné. D'où il suit que tous les arcs perpendiculaires à un cercle vont se couper aux pôles de ce cercle ; et réciproquement qu'un arc qui coupe deux ou plusieurs arcs à 90° de distance de leur commune intersection, les coupe tous perpendiculairement. Par exemple ADM = 90° = AMD.

391. L'arc mené du pôle d'un cercle au pôle d'un autre cercle, mesure évidemment l'inclinaison réciproque des axes de ces cercles : mais l'inclinaison des axes est la même que celle des plans de leurs cercles respectifs (381) ; donc *la distance des pôles de deux cercles est égale à l'inclinaison de leurs plans.*

392. Lorsque des petits cercles se trouvent dans un problême, Fig.45 on peut les éliminer de deux manieres. Soit EG un arc de parallele; au lieu de cet arc on peut introduire soit l'arc de grand cercle compris entre les mêmes points E, G, soit l'arc parallele de grand cercle, DM, ou, ce qui revient au même (386), l'angle au pôle, EAG, opposé à l'arc EG de petit cercle qu'on veut éliminer. Pour parvenir à l'une ou à l'autre de ces substitutions, il faut d'abord établir le théorême suivant.

On sait que les circonférences ou leurs parties homologues, c'est-à-dire les arcs d'un même nombre de degrés, sont proportionnelles aux rayons; il s'ensuit qu'un arc de grand cercle est à l'arc homologue d'un petit cercle dont le rayon est, par exemple, Fig.43 EF, comme CE est à EF :: 1 : sin.AE. C'est-à-dire qu'*un arc de grand cercle est à un arc de même nombre de degrés d'un petit cercle, comme le rayon de la sphere est au sinus de la distance du petit cercle à son pôle;* analogie qui donne la longueur d'un arc de petit cercle en parties de grand cercle.

Fig.44 393. Cela posé, 1°. soit DBE un arc de petit cercle, au lieu duquel on veuille employer l'arc DAE de grand cercle (385). Menant la corde commune DE, on aura (247), $\frac{1}{2}DE = CE \times \sin.\frac{1}{2}C = EF \times \sin.\frac{1}{2}F$. Mais EF est égal (392) au rayon de la sphere, multiplié par le sinus de la distance du pôle au petit cercle dont EF est le rayon; substituant dans la derniere équation cette valeur de EF, on en tire la suivante : $\sin.\frac{1}{2}$*arc cherché de grand cercle* $= \sin.\frac{1}{2}$*arc de petit cercle, sous-tendu par la même corde* $\times$ sin. *de la distance de ce petit cercle à son pôle.*

Fig.45 394. 2°. Les rayons FE, FG, de l'arc de parallele EG, étant perpendiculaires (376) sur AB, et par conséquent respectivement paralleles à CD, CM, l'angle EFG que forment ces rayons est égal à l'angle DCM. Il s'ensuit qu'un arc DM de grand cercle est du même nombre de degrés qu'un arc quelconque EG parallele et compris entre les mêmes arcs AD et AM qui se réunissent à leur pôle commun A. On a donc (392), DM : EG :: 1 : sin.AE :

mais DM = DAM, (386); donc *un arc de petit cercle égale l'angle au pôle qui lui est opposé, multiplié par le sinus de la distance de cet arc au pôle.* Au moyen de cette équation, on pourra substituer l'angle au pôle au lieu de l'arc opposé de petit cercle.

395. Si dans l'analogie (394) on écrit (42), sin.90° ou sin.AD, au lieu de 1, on pourra l'exprimer généralement comme il suit : *les arcs homologues parallèles sont entre eux comme les sinus des distances respectives au pôle commun.*

396. *La plus grande distance entre deux cercles* ADB, AMB, (ou la plus grande largeur d'un fuseau quelconque AEDBKGA) *est à* 90° *des points d'intersection de ces deux cercles.* Car la proportion DM : EG :: 1 : sin.AE, (394), fait voir que comme aucun sinus n'est plus grand que le rayon, de même l'arc EG de parallele, quelle que soit sa distance du pôle, ne sera jamais plus grand que DM. Il en seroit de même, et à plus forte raison (385), si EG étoit un arc de grand cercle.

Nous n'en dirons pas plus sur la comparaison des petits et des grands cercles.

397. Si l'on entend bien les principes que nous venons de développer avec quelque étendue, il ne restera aucune difficulté dans la Trigonométrie sphérique ; tout ce qui suit est appuyé sur ces principes.

Puisque l'angle rectiligne que font ensemble les tangentes de deux arcs au point de leur intersection, est égal à l'angle sphérique formé par ces mêmes arcs (386), les propriétés suivantes des angles rectilignes conviennent nécessairement aux angles sphériques.

1°. Un angle sphérique est toujours moindre que de 180°.

2°. Un arc qui tombe sur un autre arc forme deux angles, égaux ensemble à deux droits.

3°. Les angles opposés au sommet que forment deux arcs qui se coupent, sont égaux.

4°. La somme des angles formés par l'intersection de deux arcs est de 360°.

398. Pour enfermer avec trois arcs une portion de surface de la sphere, c'est-à-dire pour former un triangle sphérique, il est
Fig.45 nécessaire que deux arcs, par exemple AN, AK, soient coupés par un troisieme comme NK, avant que les deux premiers se réunissent (380) au point B, à 180° de l'autre point A d'intersection. Ce que nous disons de AN et AK est également vrai de AN et NK, ainsi que de AK et NK. Donc *un côté quelconque de triangle sphérique est nécessairement moindre que de* 180°.

Cette regle et la suivante expriment deux conditions sans lesquelles il n'est pas possible de construire un triangle sphérique avec trois arcs donnés.

399. Puisque l'arc qui passe d'un point à un autre est sur la sphere la mesure la plus courte de la distance de ces deux points (385), *un côté quelconque d'un triangle sphérique est nécessairement moindre que la somme des deux autres côtés.*

400. Donc NK est $<$ (BN $+$ BK). Mais BN $+$ BK $=$ 360° $-$ AN $-$ AK; donc (NK $+$ AN $+$ AK) est $<$ 360°, ou *la somme des trois côtés d'un triangle sphérique est toujours moindre que de* 360°.

401. *La somme des trois angles est toujours moindre que de* 540°, (397, 1°) : nous allons prouver qu'elle surpasse toujours 180°; ce qui forme une différence essentielle entre les triangles sphériques et les rectilignes.

Fig.46 402. Dans un triangle sphérique quelconque ABC, si on prend successivement pour pôle les sommets des trois angles A, B, C, et qu'on décrive à 90° de distance les arcs DE, EF, DF, ces arcs formeront par leur rencontre un triangle comme DFE.

Par cette construction le point E est à 90° des points A et B; donc E est le pôle (382, 378) de l'arc AB. Par la même raison, D est le pôle de AC, et F le pôle de BC.

Du pôle E prolongez AB jusqu'en G, et du pôle D prolongez

AC jusqu'en H; vous aurez par la construction GE = 90° = DH. Donc GE + DH = 180° = GE + DG + GH = DE + GH. Mais GH est la mesure de l'angle A, (386); donc DE est le supplément de A.

On trouvera de même que EF est le supplément de B, et DF de C.

Maintenant si du pôle E on prolonge GA jusqu'en L, GL sera la mesure de l'angle E. Mais GA = 90° = BL, et par conséquent GA + BL, ou GL + AB = 180°. Donc l'angle E est supplément de l'arc AB.

On trouvera de même que D est supplément de AC, et F de BC.

Donc les angles et les côtés du triangle DEF sont les suppléments des côtés et des angles respectivement opposés dans le triangle ABC, et *vice versâ*. On doit faire attention à cette propriété des triangles DEF, ABC, (dont l'un se nomme, relativement à l'autre, *triangle polaire* ou *supplémentaire*), parcequ'elle est d'un grand usage dans la Trigonométrie sphérique. Nous allons dans ce moment déterminer sans peine, par le moyen de cette propriété, quelle est la limite en moins de la somme des trois angles d'un triangle sphérique.

403. Puisque les trois côtés DE, EF, DF sont suppléments des trois angles A, B, C, il en résulte que DE + EF + DF + A + B + C = 540°. Mais (DE + EF + DF) est < 360°, (400). Donc 1°. *la somme des trois angles d'un triangle sphérique surpasse toujours* 180°. Et il en résulte 2°. que, *si le triangle est équilatere, l'angle formé par la rencontre de deux arcs est plus grand que l'angle rectiligne formé par leurs cordes.*

404. Lorsque chacun des côtés AB, AC, BC est moindre que de 90°, chacun des angles du triangle supplémentaire DEF est plus grand que 90°. Et si les angles A, B, C sont tous aigus, chacun des côtés du triangle DEF sera de même plus grand que 90°. Enfin lorsque chacun des côtés AB, AC, BC sera de 90°, le triangle ABC

se confondra avec le triangle supplémentaire. Donc *un triangle sphérique peut avoir ses angles et ses côtés tous égaux à* 90°, *ou tous plus petits ou tous plus grands que* 90°.

405. Donc (403, 401) *la somme des trois angles d'un triangle sphérique peut varier de* 180° *jusqu'à* 540° *exclusivement.* Par conséquent de la connoissance de deux angles on ne peut pas déduire la valeur du troisieme, comme dans la Trigonométrie rectiligne : mais en échange on a cet avantage, que les trois angles étant donnés, on peut trouver la valeur d'un côté quelconque, comme nous le verrons en son lieu.

406. Qu'on observe combien les variations des angles different de celles des côtés. Si les côtés sont infiniment petits, ils ne surpassent leurs cordes respectives que de quantités infiniment petites du troisieme ordre, du cinquieme ordre, &c. (152). Le triangle peut donc alors être considéré comme rectiligne, et par conséquent la somme des angles est de 180°. C'est-là le cas de la moindre grandeur possible tant des côtés que des angles. Supposons maintenant que le triangle infiniment petit croisse jusqu'à ce que chacun des côtés soit de 90°. Alors chacun des angles sera droit (404); ensorte que la somme des angles sera accrue de 90°, tandis que celle des côtés sera augmentée à très peu près trois fois autant : le contraire arrive si l'accroissement des côtés continue, puisque, quel qu'il soit, jamais il ne sera de 90° pour les trois côtés à la fois (400); tandis que celui des angles peut être à très peu près de trois fois 90°, (405).

407. *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsque les trois côtés de l'un sont respectivement égaux aux trois côtés de l'autre.* Car en posant les côtés égaux l'un sur l'autre, il est aisé de se convaincre qu'ils coïncideront dans tous leurs points. D'où il suit que les angles seront respectivement égaux.

408. Si dans deux triangles sphériques les angles sont respectivement égaux, leurs triangles polaires auront les côtés respectivement égaux, comme suppléments d'angles égaux. Donc les deux

triangles polaires auront leurs angles respectivement égaux (407). Par conséquent les suppléments de ces angles, qui sont les côtés des triangles donnés, seront respectivement égaux. Donc (407) *deux triangles sphériques sont égaux, si les trois angles de l'un sont respectivement égaux aux trois angles de l'autre.* C'est encore une différence essentielle entre les triangles sphériques et les triangles rectilignes.

409. *Deux triangles sphériques sont de même égaux* 1°. *lorsqu'ils ont deux côtés et l'angle compris respectivement égaux ;* 2°. *lorsqu'ils ont deux angles et le côté compris respectivement égaux;* 3°. *lorsqu'ils ont deux côtés et les deux angles opposés respectivement égaux.*

Ces trois propositions se démontrent par la superposition, comme dans les triangles rectilignes.

410. *On peut toujours, par trois points donnés sur la surface d'un globe, faire passer un cercle,* lequel sera un grand cercle dans le cas seulement où les trois points donnés seront tous trois dans un même plan passant par le centre de la sphere (378).

En effet soient A, B, C les trois points donnés. Menez les arcs de grand cercle AB, BC; par les points du milieu de chacun de ces arcs, c'est-à-dire par E et par D, élevez les arcs perpendiculaires EP, DP qui se rencontreront en un point quelconque P; et menez les arcs AP, BP, CP. Fig.47

Les deux triangles APE, BPE, rectangles en E, seront égaux (409, 1°.); donc AP = BP. On a de même BP = CP. Donc si, de l'intervalle AP = BP = CP, et du point P pour pôle, on décrit un cercle, il passera par les points A, B, C.

On peut donc toujours circonscrire un cercle à un triangle sphérique quelconque.

411. *Les angles à la base d'un triangle isoscele sont égaux.*

En effet si AB = AC, qu'on prenne à volonté AD = AE, et que l'on mene les arcs BD, CE. Les triangles ABD, ACE sont égaux (409, 1°.). Donc BD = CE. Par conséquent les triangles Fig.48

BCE, BCD sont égaux (407). Donc les angles homologues sont égaux; et par conséquent EBC = DCB, ou ABC = ACB.

Au moyen du triangle supplémentaire, on démontre facilement la proposition inverse; c'est-à-dire que *si un triangle sphérique a deux angles égaux, les deux côtés opposés sont égaux entre eux.*

412. De-là il suit que dans tout triangle sphérique les côtés égaux sont opposés à des angles égaux, et réciproquement; ensorte que *tout triangle sphérique équiangle est aussi équilatere, et réciproquement.*

413. *Dans tout triangle sphérique le plus grand côté est opposé au plus grand angle, et le plus petit côté au plus petit angle.*

Fig.49 Soit BAC > B : menez un arc AD, de sorte que A = B; vous aurez AD = BD, (411). Donc BC = AD + DC. Mais (AD + DC) est > AC, (399); donc BC est > AC. C'est ce que nous avions à démontrer.

414. *Dans tout triangle sphérique l'angle extérieur est plus petit que les deux intérieurs opposés.*

D + ADC = 180°, (397, 2°.). Mais (A + B + D) est > 180°, (403) : donc (A + B + D) est > (D + ADC), ou (A + B) est > ADC; ce qu'il s'agissoit de démontrer.

Fig.45 415. Si A et B sont les pôles d'un arc DM, chacun des arcs AD, AM, BD, BM est de 90°, et par conséquent (407) les triangles ADM, BDM sont égaux, et chacun d'eux est la moitié du fuseau AEDBMGA. Si on imagine un arc qui, partant du point A, vienne partager par le milieu l'arc DM, le demi-fuseau ou le triangle ADM sera divisé en deux triangles égaux (407). Il en sera de même du triangle BDM, si on prolonge jusqu'au point B l'arc supposé. Donc un demi-cercle qui partage également l'arc DM, et qui se termine aux pôles A et B de cet arc, divise en deux fuseaux égaux le fuseau AEDBMGA. Donc les fuseaux sont entre eux comme les arcs DM qui mesurent leur plus grande largeur (396). Si l'arc DM croît jusqu'à 360°, le fuseau AEDBMGA devient évidemment égal à toute la surface de la sphere. Donc la surface

surface de la sphere est à 360° comme un fuseau quelconque est à l'arc DM qui mesure la plus grande largeur de ce fuseau. Mais DM est aussi la mesure (386) de l'angle DAM ou DBM d'un fuseau quelconque AEDBMGA. Donc la surface d'un fuseau quelconque pourra toujours se trouver par l'analogie suivante : 360° *sont à la surface de la sphere comme l'angle d'un fuseau à la surface de ce fuseau.* Cette analogie sera encore utile pour déterminer facilement la surface d'un triangle sphérique quelconque (499).

416. Si A et B sont les pôles du globe terrestre, ensorte que AB soit l'axe autour duquel se fait la rotation diurne de la Terre, le cercle auquel appartient l'arc DM se nomme *l'équateur;* tous les cercles qui passent par les pôles, comme ADB, AMB, se nomment *méridiens* ou *cercles horaires,* et la position géographique d'un lieu se fixe de la maniere suivante. Soit A le pôle arctique, B l'antarctique, le point G la ville de Paris sur le globe terrestre, et ADB le méridien qui passe par l'isle de Fer, lequel a été adopté pour premier méridien par un grand nombre de Géographes. L'arc GM qui mesure la distance du point G à l'équateur, est ce qu'on appelle *la hauteur du pôle* ou la *latitude géographique boréale* de Paris, laquelle est de 48° 50′; et l'arc DM qui mesure la distance du méridien AGMB du lieu G au premier méridien, se nomme la *longitude géographique* de Paris, et elle est de 20°. La latitude des lieux situés, comme le point K, entre l'équateur et le pôle antarctique, se nomme *latitude australe.* Ce sont ces deux données, la longitude et la latitude, qui déterminent la position exacte d'un lieu quelconque sur une carte géographique.

De-là vient que *les distances à la perpendiculaire* (341) réduites en degrés, minutes, &c. (290), s'appellent encore *différences de latitude;* et *les distances à la méridienne* (341), *différences de longitude.* Ces dénominations sont à la vérité impropres et inexactes, et nous donnerons (533) un exemple des corrections convenables pour obvier à ce défaut d'exactitude.

CHAPITRE XV.

Résolution des Triangles sphériques rectangles.

417. Un triangle sphérique peut avoir deux de ses angles et même ses trois angles (406) de 90°.

Or 1°. si chacun des trois angles est droit, chacun des côtés est aussi de 90°, et réciproquement, (404). Dans ce cas on n'a point de solution à chercher; toutes les parties du triangle sont évidemment connues. 2°. Si deux angles sont droits, les côtés opposés sont aussi de 90°, et réciproquement, (389, 390). Mais ces données ne suffisent pas pour faire connoître le troisieme côté et l'angle opposé : on sait seulement (386) qu'alors cet angle et ce côté sont égaux entre eux.

418. Enfin si le triangle sphérique n'a qu'un angle droit, sa résolution dépend de deux théorêmes fondamentaux, dont le second donne ordinairement beaucoup de peine aux Commençants. Je prends la démonstration du premier dans *les Éléments de Mathématiques* de M. l'Abbé Marie, et j'espere avoir réduit celle du second au même degré de clarté et de simplicité.

Fig.50 Soit E le centre de la sphere, et soient sur la surface trois arcs AB, AC, BC, qui forment un triangle rectangle en A. Qu'on prolonge chacun des arcs BA, BC jusqu'à ce qu'on ait BH = 90° = BF. On aura 1°. BEF = 90° = BEH, puisque ces angles sont mesurés par les arcs de 90°, BF, BH; par conséquent FE, HE sont perpendiculaires à BE : 2°. FE = HE = CE = AE = BE, puisque toutes ces lignes sont rayons de la sphere : 3°. FH sera la mesure (386) de l'angle ABC que je nommerai B. Qu'on abaisse les perpendiculaires FG sur EH, CL sur AE, CD sur BE; qu'on mene la ligne DL, à laquelle CL sera perpendiculaire, puisque DL est dans le même plan que AE. Les triangles rectangles CLD, FGE seront semblables et leurs plans paralleles, CD et FE étant

paralleles entre elles, et FG, CL perpendiculaires sur le même plan BAHE ; d'où il suit que DL est aussi parallele à GE, et perpendiculaire à BE.

Cela posé, DC : CL :: FE : FG. Mais DC est le sinus de BC, CL le sinus de AC, FG le sinus de FH ou de B. Donc

$$\text{sin.BC} : \text{sin.AC} :: 1 : \text{sin.B}.$$

En prolongeant CA, CB, du point C jusqu'à 90°, on trouveroit par la même méthode que

$$\text{sin.BC} : \text{sin.AB} :: 1 : \text{sin.C}.$$

Donc, premier théorême ; *dans tout triangle sphérique rectangle le sinus de l'hypothénuse est au sinus d'un côté, comme le rayon est au sinus de l'angle opposé au même côté.*

419. Les triangles rectangles EDL, ELC donnent (211, 210) $\text{EL} = \frac{\text{DL}}{\text{sin.DEL}} = \frac{\text{CL}}{\text{tang.CEL}}$. Mais DL : CL :: GE : FG :: 1 : tang.FEH :: 1 : tang.B. Donc $\frac{1}{\text{sin.DEL}} = \frac{\text{tang.B}}{\text{tang.CEL}}$. Mais DEL = AB et CEL = AC. Donc

$$1 : \text{tang.B} :: \text{sin.AB} : \text{tang.AC}.$$

& par conséquent, second théorême ; *dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est à la tangente d'un angle, comme le sinus du côté adjacent est à la tangente du côté opposé.*

420. Ce théorême fait voir que *dans les triangles sphériques rectangles, un côté quelconque est de la même espece que l'angle opposé ;* puisque tang.B et tang.AC ont un même signe dans l'analogie, et que par conséquent l'une ne peut devenir négative que l'autre ne le devienne aussi.

Les regles ordinaires des signes suffisent pour déterminer l'espece de la chose cherchée dans tous les cas non douteux, et pour dispenser de former des regles particulieres et d'indiquer l'espece dans chaque cas, comme on le fait ordinairement.

421. Pour qu'on puisse connoître d'un coup-d'œil tous les cas douteux ; supposons KN perpendiculaire sur ADB : les triangles

Fig.45 ANK, BNK rectangles en N auront le côté NK commun et KAN = KBN, (388). On voit qu'alors la connoissance des valeurs de NK et de l'angle opposé ne détermine pas auquel des deux triangles ces données appartiennent; de maniere que lorsque les circonstances du problême ne levent pas l'incertitude, on ne peut savoir par la Trigonométrie si l'hypothénuse est moindre que de 90°, comme BK, ou plus grande comme AK, et de même si le côté et l'angle inconnus sont BN et BKN, ou leurs suppléments AN et AKN. Concluons qu'*un angle et le côté opposé étant donnés, l'espece de chacune des autres parties d'un triangle sphérique rectangle est douteuse.*

422. Comme un sinus ne peut jamais être plus grand que le
Fig.50 rayon, on ne peut jamais avoir, dans l'analogie (419), tang.AC > tang.B. Mais AC et B sont toujours de la même espece (420). Donc *dans les triangles sphériques rectangles un angle oblique ne peut jamais être plus petit s'il est aigu, plus grand s'il est obtus, que le côté qui lui est opposé.*

423. La regle (420) fait voir que l'arc perpendiculaire, s'il est moindre que de 90°, est le plus court, et s'il est plus grand que de 90°, le plus long qu'on puisse mener sur la sphere d'un point donné à un cercle. En effet, dans le premier cas il sera opposé à un angle aigu, et par conséquent il sera moindre (413) que tout autre arc mené du point donné au même cercle, lequel arc sera l'hypothénuse du triangle résultant de cette construction. Dans le second cas, il sera opposé à un angle obtus, et dès-lors plus grand qu'une hypothénuse quelconque. Donc *dans un triangle sphérique rectangle tout côté moindre que de 90° est plus petit que l'hypothénuse, et tout côté plus grand que de 90° est plus grand que l'hypothénuse.*

424. Puisque (418), FG : CL :: FE : DC :: sin.BF : sin.BC, il s'ensuit que les distances FG, CL de deux cercles en divers points, mesurées par des lignes perpendiculaires au plan de l'un BH des deux, sont proportionnelles aux sinus des distances

BF, BC entre ces points et le point B de l'intersection des deux cercles, mesurées sur l'autre BF de ces cercles.

425. Si les trois côtés du triangle sont infiniment petits, les arcs se confondront avec leurs sinus et tangentes (152, 153), et le triangle sera rectiligne. En effet, en mettant dans les analogies (418, 419) les côtés au lieu de leurs sinus et tangentes, on a BC : AC :: 1 : sin.B, et 1 : tang.B :: AB : AC, c'est-à-dire précisément les proportions d'un triangle rectiligne ABC rectangle en A, (213; 10e, 1e). C'est ainsi qu'on applique en général les formules des triangles sphériques aux triangles rectilignes. Jusqu'à présent on n'avoit pas cru susceptibles de cette application les formules dans lesquelles entrent les cosinus des côtés. Quelques Auteurs ont encore refusé cet avantage aux formules dans lesquelles entrent les cotangentes des côtés. La Caille (*Élém. Astr. Traité prélim.* art. 218) paroît être de leur avis. D'autres substituent l'infini au cosinus du côté ; ce qui n'est ni utile ni trop intelligible. Pour nous, il nous semble que la difficulté n'est qu'apparente : car cot. du côté $= \frac{1}{\text{tang. du côté}}$, et on peut, au lieu de $\frac{1}{\text{tang. du côté}}$, écrire $\frac{1}{\text{le côté}}$, et l'unité au lieu de cos. du côté (*), valeurs qui résultent de la considération du triangle infiniment-petit (153 et 154). Mais avec cette regle seulement, on ne peut traduire qu'une partie des formules sphériques dans lesquelles entrent des cosinus de côtés; dans le cas où une même formule renfermera plusieurs de ces cosinus, on aura recours aux infiniment-petits du second ordre, et on substituera au cosinus de chaque côté les deux premiers termes de la série (Y), (154), c'est-à-dire la différence entre l'unité et la moitié du quarré du côté respectif. Et quand deux cosinus de côtés se trouveront multipliés l'un par l'autre, on négligera le rectangle

(*) C'est ce qu'a fait M. l'Abbé Boscovich pour les formules différentielles qu'il a données dans un Opuscule que ce célebre Mathématicien m'a envoyé pendant l'impression de cette Trigonométrie, et qui est le quinzieme du Tom. IV de ses Ouvrages imprimés récemment à Bassano.

des deux quarrés de ces mêmes côtés, qui n'est qu'un infiniment-petit du quatrieme ordre. Enfin on fera chaque cosinus de côté égal à l'unité seulement, s'il se trouve multiplié par une ligne trigonométrique quelconque, à moins que cette ligne ne soit le cosinus d'un autre côté.

De toutes les formules sphériques que contient ce Traité, je n'en connois jusqu'ici que deux (en exceptant néanmoins celles auxquelles les triangles rectilignes se refusent par leur nature) qui ne puissent pas se transporter des triangles sphériques aux triangles rectilignes, au moyen des regles que nous venons d'indiquer. Nous donnerons plusieurs exemples de l'application de ces regles; et nous ferons voir (727) quelle utilité résulte de cette généralité des formules sphériques.

En transférant ces formules à la Trigonométrie rectiligne, nous supposons les triangles rectilignes *infiniment petits* : mais elles leur conviendroient de même, de quelque grandeur qu'ils fussent, puisque la grandeur de ces triangles n'altere pas leur nature. On ne peut tirer les formules de la Trigonométrie sphérique de celles de la Trigonométrie rectiligne, parce que jamais un triangle rectiligne ne peut être sphérique, tandis qu'un triangle sphérique ne peut devenir infiniment petit qu'il ne devienne rectiligne.

426. Des deux théorêmes (418, 419) on en déduit quatre autres, comme nous allons le voir.

Fig. 51 Soit le triangle ABC rectangle en A, dont les côtés et l'hypothénuse prolongés jusqu'à 90° seront BE, BF, AD. D étant le pôle de l'arc BF, (389), l'arc décrit du point B comme pôle passera par les points D, E, F, (382), et les angles E, F seront droits (390).

Par cette construction on voit que DE est le complément de EF = B, CE le complément de l'hypothénuse BC, AF = D le complément du côté AB, et CD le complément de l'autre côté AC. Aussi DCE se nomme-t-il *triangle complémentaire* de ABC. C'est en appliquant au triangle DCE rectangle en E les deux théorêmes (418, 419) qu'on en tire les quatre qui suivent.

1°. Le théorême (418) donne sin.CD : sin.CE :: 1 : sin.D. Prenant les compléments dans le triangle donné ABC, l'analogie devient

cos.AC : cos.BC :: 1 : cos.AB.

Et par conséquent *dans tout triangle sphérique rectangle le cosinus d'un côté est au cosinus de l'hypothénuse, comme le rayon au cosinus de l'autre côté.*

427. 2°. Le théorême (418) donne aussi sin.CD : sin.DE :: 1 : sin.C. Donc

cos.AC : cos.B :: 1 : sin.C.

Et par conséquent *dans tout triangle sphérique rectangle le cosinus d'un côté est au cosinus de l'angle opposé, comme le rayon au sinus de l'autre angle.*

428. 3°. Le théorême (419) donne 1 : tang.D :: sin.DE : tang.CE. Donc 1 : cot.AB :: cos.B : cot.BC, ou, pour employer les tangentes,

1 : cos.B :: tang.BC : tang.AB.

Et par conséquent *dans tout triangle sphérique rectangle la tangente de l'hypothénuse est à la tangente d'un côté, comme le rayon au cosinus de l'angle adjacent.*

429. 4°. Le théorême (419) donne aussi 1 : tang.C :: sin.CE : tang.DE. Donc 1 : tang.C :: cos.BC : cot.B, ou

1 : cos.BC :: tang.C : cot.B :: tang.B : cot.C.

Et par conséquent *dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au cosinus de l'hypothénuse, comme la tangente d'un angle est à la cotangente de l'autre.*

430. Deux choses étant données dans un triangle sphérique rectangle; au moyen des six théorêmes démontrés, on trouvera toujours toutes les autres, si ce n'est dans les cas douteux (417, 2°; 421). Les solutions fournies par ces théorêmes sont toutes rassemblées dans la table suivante ainsi que dans la table VI rejettée à la fin de cet Ouvrage.

Table pour la résolution d'un Triangle sphériq ABC *rectangle en* A.

DONNÉES.	CHERCHÉES.		FORMULES.
BC, B	AC	1°	$\sin.AC^* = \sin.BC \sin.B^*$
	AB	2°	$\text{tang.}AB = \text{tang.}BC \cos.B$
	C	3°	$\cot.C = \cos.BC \text{ tang.}B$
BC, C	AB	4°	$\sin.AB^* = \sin.BC \sin.C^*$
	AC	5°	$\text{tang.}AC = \text{tang.}BC \cos.C$
	B	6°	$\cot.B = \cos.BC \text{ tang.}C$
BC, AB	AC	7°	$\cos.AC = \frac{\cos.BC}{\cos.AB}$
	B	8°	$\cos.B = \text{tang.}AB \cot.BC$
	C	9°	$\sin.C^* = \frac{\sin.AB^*}{\sin.BC}$
BC, AC	AB	10°	$\cos.AB = \frac{\cos.BC}{\cos.AC}$
	C	11°	$\cos.C = \text{tang.}AC \cot.BC$
	B	12°	$\sin.B^* = \frac{\sin.AC^*}{\sin.BC}$
AB, C cas douteux.	BC	13°	$\sin.BC = \frac{\sin.AB}{\sin.C}$
	AC	14°	$\sin.AC = \text{tang.}AB \cot.C$
	B	15°	$\sin.B = \frac{\cos.C}{\cos.AB}$
AC, B cas douteux.	BC	16°	$\sin.BC = \frac{\sin.AC}{\sin.B}$
	AB	17°	$\sin.AB = \text{tang.}AC \cot.B$
	C	18°	$\sin.C = \frac{\cos.B}{\cos.AC}$

AB

DONNÉES.	CHERCHÉES.		FORMULES.
AB, B	BC	19°	cot.BC = cos.B cot.AB
	AC	20°	tang.AC = tang.B sin.AB
	C	21°	cos.C = sin.B cos.AB
AC, C	BC	22°	cot.BC = cos.C cot.AC
	AB	23°	tang.AB = tang.C sin.AC
	B	24°	cos.B = sin.C cos.AC
AB, AC	BC	25°	cos.BC = cos.AB cos.AC
	B	26°	cot.B = sin.AB cot.AC
	C	27°	cot.C = cot.AB sin.AC
B, C	BC	28°	cos.BC = cot.B cot.C
	AB	29°	cos.AB = $\frac{\cos.C}{\sin.B}$
	AC	30°	cos.AC = $\frac{\cos.B}{\sin.C}$

Les arcs marqués d'un astérisque sont de même espece (420). L'espece de tous les autres, si ce n'est dans les cas douteux (13°... 18°), est déterminée par le signe (42).

431. Cinq des formules de la table précédente peuvent se calculer par addition ou par soustraction, au moyen des tables des sinus en nombres naturels, en les transformant comme il suit, (II. 16°, 15°, 17°).

1° sin.AC = $\frac{1}{2}$cos.(BC ∽ B) — $\frac{1}{2}$cos.(BC + B)

4° sin.AB = $\frac{1}{2}$cos.(BC ∽ C) — $\frac{1}{2}$cos.(BC + C)

21° cos.C = $\frac{1}{2}$sin.(AB + B) — $\frac{1}{2}$sin.(AB — B)

24° cos.B = $\frac{1}{2}$sin.(AC + C) — $\frac{1}{2}$sin.(AC — C)

25° cos.BC = $\frac{1}{2}$cos.(AB + AC) + $\frac{1}{2}$cos.(AB ∽ AC)

Dans la formule 21°, si B est > AB, $\frac{1}{2}$sin.(AB — B) devient positif en vertu de la regle (154). Il en est de même de $\frac{1}{2}$sin.(AC — C)

quand C est > AC dans la formule 24°. La Caille (*Eléments d'Astronomie, Traité préliminaire*, art. 242) se trompe en prescrivant le signe positif dans tous les cas.

432. Cherchons maintenant les moyens d'avoir avec exactitude les secondes et même les dixiemes de seconde, lorsque les sinus et cosinus des arcs cherchés sont fort grands.

Les cinq formules précédentes (431) suffiront entre de certaines limites, comme nous l'avons dit (193). Mais si les tables en nombres naturels se trouvoient insuffisantes, ou qu'on ne voulût pas s'en servir, alors dans les cinq cas que présentent ces formules, on procéderoit comme il suit. Lorsque, par exemple, étant donnés BC et B, on ne pourra avoir AC exactement par le moyen de la formule 1°, on aura recours à une autre formule qui puisse donner une tangente. Par exemple on cherchera AB par la 2°, et ensuite, ayant AB et B, on aura AC avec toute la précision possible par la 20°.

433. De la 7° on tire 1 : cos.AC :: cos.AB : cos.BC. Donc (10), 1 + cos.AC : 1 — cos.AC :: cos.AB + cos.BC : cos.AB — cos.BC. Et par conséquent (I. 42°), (II. 13°), 1 : tang.$^2\frac{1}{2}$AC :: cot.$\frac{1}{2}$(BC + AB) : tang.$\frac{1}{2}$(BC — AB). On aura donc AC avec la plus grande précision, en transformant la 7° comme il suit :

$$7°\ldots\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(BC - AB)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(BC + AB)}.$$

434. La 8° donne 1 : cos.B :: tang.BC : tang.AB. Et par conséquent 1 + cos.B : 1 — cos.B :: tang.BC + tang.AB : tang.BC — tang.AB. D'où l'on tire (II. 10°)

$$8°\ldots\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.(BC - AB)}{\sin.(BC + AB)}}.$$

435. La 9° donne 1 : sin.C :: sin.BC : sin.AB. Donc 1 +

sin.C : 1 — sin.C :: sin.BC + sin.AB : sin.BC — sin.AB. Et par conséquent (II. 9°, 12°)

$$9^{e}\ldots\ \text{tang.}(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}C) = \pm\sqrt{\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(BC + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(BC - AB)}}.$$

Dans les deux formules qui précédent celle-ci, le signe du radical ne peut être que positif (398), (397, 1°); et dans celle-ci on discernera facilement, par le moyen de la regle (420), quel est le signe qui convient.

En changeant dans les trois dernieres formules C en B et B en C, on aura les transformées qui correspondent aux 10°, 11° et 12°.

436. Par les méthodes employées (435, 434, 433), on aura les formules suivantes, dans lesquelles l'espece de la chose cherchée est douteuse (421).

$$13^{e}\ldots\ \text{tang.}(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}BC) = \pm\sqrt{\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(C + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(C - AB)}}.$$

$$14^{e}\ldots\ \text{tang.}(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}AC) = \pm\sqrt{\frac{\text{sin.}(C + AB)}{\text{sin.}(C - AB)}}.$$

$$15^{e}\ldots\ \text{tang.}(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}B) = \pm\sqrt{\frac{\text{cot}\,\frac{1}{2}(C + AB)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(C - AB)}}.$$

En changeant dans ces trois formules B en C et C en B, on aura les transformées correspondantes aux 16°, 17° et 18°.

Ces formules ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, dans lesquels on ne peut prendre la somme ou la différence d'un côté et d'un angle, puisque ce sont deux quantités hétérogenes. Il en faut dire autant des quatre premieres formules (431).

437. La 28° donne cos.BC : 1 :: cot.B : tang.C :: cot.C : tang.B. Et par conséquent cos.BC + 1 : cos.BC — 1 :: cot.B + tang.C : cot.B — tang.C. Donc aussi (I. 42°), (II. 11°), 1 : — $\text{tang.}^{2}\frac{1}{2}$BC :: cos.(B ∽ C) : cos.(B + C). D'où l'on tire

$$28^{e}\ldots\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}BC = \sqrt{-\frac{\text{cos.}(B + C)}{\text{cos.}(B \backsim C)}}.$$

Observons que $-\frac{\cos.(B+C)}{\cos.(B-C)}$ se trouve toujours être une quantité positive, attendu que cos.(B + C) est toujours une quantité négative, puisque dans tout triangle sphérique rectangle la somme des deux angles obliques est nécessairement plus grande que 90°, (403, 1°).

Et comme dans un triangle réel la tangente de la moitié de l'hypothénuse ne peut jamais avoir une valeur imaginaire, je conclus de la derniere équation, que *dans tout triangle sphérique rectangle la différence entre les deux angles obliques est toujours moindre que de* 90°.

Quant aux formules 29° et 30°, lorsque AB ou AC seront petits, on cherchera d'abord BC par la 28°; ensuite on aura les côtés exactement par le moyen de la 2° ou de la 5°.

438. Les formules construites (431 et suiv.) donnent encore, pour un triangle sphérique rectangle, des solutions différentes de celles de la table (430), comme on le voit dans la table ci-après, où l'on reconnoîtra facilement que les formules 4°, 6°, 10°, 12° sont formées en multipliant ou divisant l'une par l'autre les deux formules (433, 435).

Pour l'usage de la table qui suit, il faut toujours observer les regles des signes (42, 154), et faire attention qu'on ne peut jamais avoir (BC — AB) > 180°, (398); ensorte que quand les formules donneront tang.$\frac{1}{2}$(BC — AB) ou sin.(BC — AB) négatifs, il en faudra conclure que AB est > BC, (154). D'où il résulte que lorsque la quantité (BC — AB) est donnée, il faut connoître en outre lequel des deux arcs est le plus grand, excepté dans la 12° formule, où tang.$\frac{1}{2}$AC ne peut jamais être négative, (398). Enfin dans la 13° et la 14°, il faut savoir, avant de les calculer, lequel des deux angles est le plus grand.

le pour la résolution d'un Triangle sphérique rectangle, dans certains cas.

NÉES.	CHERCHÉES.	FORMULES.
AC), BC.	AB *ou* AC	1° FORMULE... cos.(AB ∽ AC) = 2cos.BC — cos.(AB + AC)
ôtés, hyp.	Les deux côtés.	1° cos.différence des côtés = 2cos.hypothénuse — cos.somme des côtés
AC), BC.	AB *ou* AC.	2° cos.(AB + AC) = 2cos.BC — cos.(AB ∽ AC)
côtés, hyp.	Les deux côtés.	2° cos.somme des côtés = 2cos.hypothénuse — cos.différence des côtés
AB), AC.	BC *ou* AB.	3° tang.$\frac{1}{2}$(BC — AB) = tang.$^2\frac{1}{2}$AC cot.$\frac{1}{2}$(BC + AB)
	C.	4° cot.(45° + $\frac{1}{2}$C) = tang.$\frac{1}{2}$AC cot.$\frac{1}{2}$(BC + AB)
et la som.	L'hyp.et le côté incon.	3° tang.$\frac{1}{2}$diff.hyp.au côté = tang.$^2\frac{1}{2}$côté donné × cot.$\frac{1}{2}$somme donnée
othénuse et e côté.	L'ang.op. au côté inc.	4° cot.(45° + $\frac{1}{2}$angle cherché) = tang.$\frac{1}{2}$ côté donné × cot.$\frac{1}{2}$ som.don.
AB), AC.	BC *ou* AB.	5° tang.$\frac{1}{2}$(BC + AB) = tang.$^2\frac{1}{2}$AC cot.$\frac{1}{2}$(BC — AB)
	C.	6° tang.(45° + $\frac{1}{2}$C) = tang.$\frac{1}{2}$AC cot.$\frac{1}{2}$(BC — AB)
et la diffé-	L'hyp.et le côté incon.	5° tang.$\frac{1}{2}$ som.hypoth. et côté = tang.$^2\frac{1}{2}$ côté donné × cot.$\frac{1}{2}$diff. donnée
e l'hypoth. autre côté.	L'ang.op.au côté.inc.	6° tang.(45° + $\frac{1}{2}$ ang. cherché) = tang.$\frac{1}{2}$ côté don. × cot.$\frac{1}{2}$ diff. donnée
AB), B.	BC *ou* AB.	7° sin.(BC — AB) = tang.$^2\frac{1}{2}$B sin.(BC + AB)
e et la som. djacent et othénuse.	L'hyp.et le même côté.	7° sin. différ. hyp. au côté = tang.$^2\frac{1}{2}$ angle donné × sin.somme donnée
AB), B.	BC *ou* AB.	8° sin.(BC + AB) = cot.$^2\frac{1}{2}$B sin.(BC — AB)
et la diff. djacent et othénuse.	L'hyp.et le même côté.	8° sin.somme hypoth. et côté = cot.$^2\frac{1}{2}$ angle donné × sin.diff.donnée
AB), C.	BC *ou* AB.	9° tang.$\frac{1}{2}$(BC — AB) = cot.^{2}(45° + $\frac{1}{2}$C) tang.$\frac{1}{2}$(BC + AB)
	AC.	10° tang.$\frac{1}{2}$AC = cot.(45° + $\frac{1}{2}$C) tang.$\frac{1}{2}$(BC + AB)
e et la som.	L'hyp.et le même côté.	9° tang.$\frac{1}{2}$ diff.hyp.au côté = cot.^{2}(45° + $\frac{1}{2}$ang.don.) × tang.$\frac{1}{2}$som.don.
opposé et othénuse.	L'autre côté.	10° tang.$\frac{1}{2}$ côté cherché = cot.(45° + $\frac{1}{2}$ang.don.) × tang.$\frac{1}{2}$ som.donnée
AB), C.	BC *ou* AB.	11° tang.$\frac{1}{2}$(BC + AB) = tang.^{2}(45° + $\frac{1}{2}$C) tang.$\frac{1}{2}$(BC — AB)
	AC.	12° tang.$\frac{1}{2}$AC = tang.(45° + $\frac{1}{2}$C) tang.$\frac{1}{2}$(BC — AB)
et la diffé-	L'hyp.et le même côté.	11° tang.$\frac{1}{2}$som. hyp. et côté = tang.^{2}(45° + $\frac{1}{2}$ang.don)× tang.$\frac{1}{2}$ diff.don.
re le côté l'hypoth.	L'autre côté.	12° tang.$\frac{1}{2}$ côté cherché = tang.(45° + $\frac{1}{2}$ ang.don.) × tang.$\frac{1}{2}$ diff.don.
C), BC.	B *ou* C.	13° cos.(B ∽ C) = — cos.(B + C) cot.$^2\frac{1}{2}$BC
e des ang. hénuse.	Les deux angles.	13° cos.diff.des angles = — cos.somme donnée × cot.$^2\frac{1}{2}$ hypothénuse
C), BC.	B *ou* C.	14° cos.(B + C) = — cos.(B ∽ C) tang.$^2\frac{1}{2}$BC
des ang. hénuse.	Les deux angles.	14° cos.somme des angles = — cos.diff.donnée × tang.$^2\frac{1}{2}$ hypothénuse

439. Après avoir achevé la construction des formules pour la résolution d'un triangle sphérique rectangle, il est à propos de dire deux mots de leur translation aux triangles rectilignes; ce sera une premiere preuve de la vérité de ce que nous avons avancé (425). Reprenons les formules de la table (430). Si on fait cos.BC = 1, la 3ᵉ et la 6ᵉ donneront cot.C = tang.B, et cot.B = tang.C; ce qui est précisément la propriété d'un triangle rectiligne ABC rectangle en A. Traduisez de la même maniere les formules 15ᵉ, 18ᵉ, et celles qui en sont déduites. Dans la 8ᵉ, en mettant $\frac{1}{\text{tang.BC}}$ au lieu de cot.BC, et ensuite les côtés au lieu des tangentes, on a la proportion (213, 13ᵉ). Il en est de même des autres formules où se trouvent les cotangentes des côtés. La traduction de la 25ᵉ (à laquelle se réduisent la 7ᵉ et la 10ᵉ) se fait comme il suit : $1 - \frac{1}{2}BC^2 = (1 - \frac{1}{2}AB^2)(1 - \frac{1}{2}AC^2) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2$ en négligeant le produit des deux quarrés; réduisant, transposant et multipliant par 2, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, c'est-à-dire l'équation si connue de l'hypothénuse.

Les trois premieres formules et la 5ᵉ de la table (438) donnent de même l'équation de l'hypothénuse. La 13ᵉ et la 14ᵉ ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, parcequ'il répugne à la nature de ces triangles que l'hypothénuse puisse être déterminée par les angles et *vice versâ*. Toutes les autres formules de cette table se réduisent aux formules correspondantes (217, 218).

Résolution des Triangles sphériques rectilateres.

440. J'appelle *rectilatere* le triangle qui a un côté de 90°. Ce triangle doit se ranger dans la classe des triangles rectangles, parceque son supplémentaire est rectangle, et que c'est celui-ci qu'on résout et auquel se réduisent les données.

Fig.48 EXEMPLE. Soit A le pôle arctique, BC l'équateur, B la ville de Quito, D celle de Paris. Connoissant AB = 90°, AD = 41° 10′, (416), et la différence BC = A = 80° 15′ de longitude entre les

deux villes, il s'agit de déterminer la plus courte distance entre elles, c'est-à-dire l'arc BD.

Puisque AB = 90°, il faut réduire les données au triangle supplémentaire. Mais sans recourir à une autre figure, je me servirai pour cet effet du même triangle ABD, en prenant, comme il suit, les parties opposées aux choses connues. Je suppose que D est le supplément de AB, et dès-lors j'écris D = 90°; de même je prends B pour supplément de AD, et j'écris B = 138° 50′; BD pour supplément de A, et j'écris BD = 99° 45′: l'angle A devient ainsi la chose cherchée, comme supplément de BD. Or dans le triangle ABD rectangle en D, on connoît le côté BD et l'angle adjacent B; et l'autre angle A étant l'inconnue cherchée, c'est le cas de la formule 12ᵉ de la table VI, qui donne cos.A = cos.BD sin.B = — cos.99° 45′ × sin.138° 50′ = — sin.9° 45′ × cos.48° 50′.

$$\begin{aligned} \log.\cos.48^\circ\,50' &= 9,818392 \\ \log.\sin.9^\circ\,45' &= \underline{9,228784} \\ \log.\cos.A &= 9,047176 \end{aligned}$$

Donc A = 96° 24′, et son supplément 83° 36′ est la distance cherchée BD qui correspond à 5016 milles géographiques, à 60 milles par degré.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant un angle commun.

441. Des triangles sphériques BAC, BED, rectangles en A et en E, et ayant un angle commun B, on déduit les proportions suivantes entre les lignes trigonométriques de leurs parties homologues. Fig.52

Puisque (418), sin.BC : sin.AC :: 1 : sin.B, et que par la même raison sin.BD : sin.DE :: 1 : sin.B, il en résulte que sin.BC : sin.BD :: sin.AC : sin.DE; et par conséquent

les sinus des hypothénuses sont proportionnels aux sinus des côtés respectivement opposés à l'angle commun.

442. Puisque (419), 1 : tang.B :: sin.AB : tang.AC :: sin.BE : tang.DE,

les sinus des côtés adjacents à l'angle commun, sont comme les tangentes des côtés opposés à cet angle.

443. On a (427), cos.AC : cos.B :: 1 : sin.C, et
cos.DE : cos.B :: 1 : sin.D. Donc

les sinus des angles non communs sont en raison inverse des cosinus des côtés opposés à l'angle commun.

444. Le même théorême (427) donne 1 : sin.B :: cos.AB : cos.C :: cos.BE : cos.D. Donc

les cosinus des angles non communs sont comme les cosinus des côtés opposés.

445. Par le théorême (428), 1 : cos.B :: tang.BC : tang.AB :: tang.BD : tang.BE. Donc

les tangentes des hypothénuses sont proportionnelles aux tangentes des côtés adjacents à l'angle commun.

446. On a (429), 1 : tang.B :: cos.BC : cot.C :: cos.BD : cot.D. Donc

les cosinus des hypothénuses sont en raison inverse des tangentes des angles non communs.

On reconnoîtra l'utilité des proportions précédentes dans la résolution des problêmes.

Si on transfere ces proportions aux triangles rectilignes (425), on aura les proportions qui conviennent à deux triangles rectangles semblables, et les trois analogies (443, 444, 446) donneront C = D, comme cela doit être.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant un côté commun.

Fig. 53 et 54. 447. Soient les triangles ABD, ACD rectangles en D, et qui ont un côté commun AD. On aura (418), sin.AD = sin.AB × sin.B

sin.B = sin.AC sin.C. Donc sin.AB : sin.AC :: sin.C : sin.B. Et par conséquent

les sinus des hypothénuses sont en raison inverse des sinus des angles respectivement opposés au côté commun.

448. Comme ABC peut représenter tout triangle sphérique obliquangle, la proportion peut s'énoncer encore comme il suit :

Dans tout triangle sphérique les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

449. Par le théorême (419), 1 : sin.AD :: tang.BAD : tang.BD :: tang.CAD : tang.CD. Donc

les tangentes des angles adjacents au côté commun sont comme les tangentes des côtés opposés.

450. Par le même théorême tang.AD = sin.BD tang.B = sin.CD tang.C. D'où il suit que sin.BD : sin.CD :: tang.C : tang.B. Et par conséquent

les sinus des côtés non communs sont en raison inverse des tangentes des angles adjacents.

451. Par le théorême (426), 1 : cos.AD :: cos.BD : cos.AB :: cos.CD : cos.AC. Donc

les cosinus des hypothénuses sont proportionnels aux cosinus des côtés non communs.

452. Par le théorême (427), 1 : cos.AD :: sin.BAD : cos.B :: sin.CAD : cos.C. Donc

les sinus des angles adjacents au côté commun sont proportionnels aux cosinus des angles opposés.

453. Par le théorême (428), tang.AD = cos.BAD tang.AB = cos.CAD tang.AC. Il s'ensuit que cos.BAD : cos.CAD :: tang.AC : tang.AB. Et par conséquent

les cosinus des angles adjacents au côté commun sont en raison inverse des tangentes des hypothénuses.

Des six proportions (448 et suiv.) dépend la solution des triangles obliquangles.

Résolution de deux Triangles sphériques rectangles ayant l'hypothénuse commune.

Fig.55 454. Soient les triangles ABC, DBC, rectangles en A et en D, et ayant l'hypothénuse commune BC.

Le théorême (418) donne sin.BC : 1 :: sin.AB : sin.ACB :: sin.BD : sin.BCD :: sin.AC : sin.ABC :: sin.CD : sin.CBD.Donc

les sinus de deux côtés quelconques sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

455. Le théorême (426) donne cos.BC = cos.AB cos.AC = cos.CD cos.BD. Donc

le rectangle des cosinus des côtés d'un triangle est égal au rectangle des cosinus des côtés de l'autre triangle.

456. Par le théorême (428), 1 : tang.BC :: cos.ABC : tang.AB :: cos.ACB : tang.AC :: cos.BCD : tang.CD :: cos.CBD : tang.BD. Donc

les tangentes de deux côtés quelconques sont proportionnelles aux cosinus des angles adjacents.

457. Par le théorême (429), 1 : cos.BC :: tang.ACB tang.ABC : 1 :: tang.BCD tang.CBD : 1. Et par conséquent

le rectangle des tangentes des angles d'un triangle est égal au rectangle des tangentes des angles de l'autre.

Dans les cas auxquels les analogies précédentes (441 et suiv.) seront applicables ; si, au lieu de connoître les parties mêmes des triangles, on en connoissoit les sommes ou les différences, il seroit facile de rapporter à ces données les mêmes analogies par les méthodes que nous avons employées tant de fois dans le cours de cet Ouvrage, et dont nous ferons encore usage dans le Chapitre suivant, pour construire les analogies de Neper.

CHAPITRE XVI.

Résolution des Triangles sphériques obliquangles.

458. POUR résoudre un triangle sphérique obliquangle, on le divise en deux rectangles au moyen d'un arc perpendiculaire qui devient un côté commun à chacun d'eux. Les solutions se trouvent ensuite facilement par les analogies (447 à 453).

Mais la perpendiculaire peut tomber ou en dedans ou en dehors du triangle; ce qui donne des résultats très différents. Par exemple, dans le triangle ABC, où l'on ne peut avoir la valeur de BC que médiatement, c'est-à-dire en déterminant celle des deux segments BD, CD, il est clair qu'il faut prendre leur somme, si la perpendiculaire tombe en dedans comme dans la fig. 53, et au contraire leur différence, si elle tombe en dehors comme dans la fig. 54. Fig. 53 et 54.

459. Il paroît dès-lors, au premier aspect, que pour résoudre un triangle sphérique obliquangle, il est nécessaire de savoir si la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors. Il est arrivé de-là que plusieurs Auteurs célebres voulant aider le Calculateur par des regles particulieres pour chaque cas, ont rendu l'exécution difficile en multipliant les préceptes, ou même ont prescrit des regles peu exactes; tandis que la plupart se sont tirés d'embarras, en laissant au Calculateur le soin pénible de chercher dans chaque cas la situation de la perpendiculaire. Il me semble que les inconvénients disparoissent, si l'on adopte le système suivant, aussi simple que général.

Les formules doivent se construire dans l'hypothese que la perpendiculaire tombe en dedans, et que les angles et les côtés soient moindres chacun que de 90°. En les construisant ainsi, je dis qu'il ne sera nullement nécessaire, dans l'usage des formules, de faire attention à la position de la perpendiculaire, et qu'*en observant*

seulement les regles des signes (42, 154), *on aura toujours* (dans les cas qui ne seront pas douteux de leur nature) *la juste valeur des choses cherchées.*

La vérité de cette règle se reconnoîtra par l'usage : la proposition suivante sera utile pour la vérifier.

460. *Si les angles sur la base sont de même espece entre eux, la perpendiculaire tombe en dedans du triangle ; elle tombe en dehors, s'ils sont d'espece différente.*

Fig.53 En effet, 1°. si la perpendiculaire AD tombe en dedans du triangle, son espece est la même (420) que celle des angles sur la base (242); B et C, lesquels par conséquent sont de même espece entre eux.

2°. Si la perpendiculaire tombe en dehors, le prolongement de la base peut se faire ou se considérer soit d'un côté soit de l'autre.

Fig.56 Soit DAE un demi-cercle perpendiculaire au demi-cercle DCBE, (379). La perpendiculaire menée de l'angle A d'un triangle ABC sur la base BC prolongée, sera à volonté ou AD ou AE. Si on considere AD, le triangle ABC se convertit en deux triangles rectangles ADC, ADB, dans lesquels la perpendiculaire AD étant de la même espece (420) que les angles B et ACD, il s'ensuit (397, 2°.) que les angles B et C sur la base du triangle donné, sont d'espece différente entre eux. Si on considere AE, cette perpendiculaire sera de même espece que les angles C et ABE; d'où il résulte encore que B et C sont entre eux d'espece différente.

Passons maintenant à la résolution des douze cas que présentent les triangles sphériques obliquangles, en prenant les données trois à trois.

461. *Connoissant les trois côtés, déterminer un des angles.*

Fig.53 Solution I. Dans un triangle quelconque ABC, soit B l'angle cherché, et de l'un des deux autres soit abaissée une perpendiculaire comme AD. On aura (451), cos.AB : cos.AC :: cos.BD : cos.CD :: cos.BD : cos.(BC — BD) :: cos.BD : cos.BC cos.BD + sin.BC sin.BD :: (9) 1 : cos.BC + sin.BC tang.BD :: 1 :

cos.BC + sin.BC cos.B tang.AB, (VI. 2°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\cos.B = \frac{\cos.AC - \cos.BC \cos.AB}{\sin.BC \sin.AB}.$$

Si par les regles (425) on tranfere cette formule aux triangles rectilignes, on aura l'expression (III. 70°).

462. Si l'angle cherché étoit A ; en abaissant la perpendiculaire ou de l'angle B ou de l'angle C, on trouveroit par la même méthode

$$\cos.A = \frac{\cos.BC - \cos.AB \cos.AC}{\sin.AB \sin.AC}.$$

Mais on a cette formule par la précédente, en y changeant B en A, et A en B.

On trouvera de même, de l'une ou de l'autre maniere, la valeur analytique de cos.C.

Il est inutile d'avertir qu'on peut traiter ainsi toutes les formules qui suivent.

463. SOLUTION II. On a (461), $1 - \cos.B = \ldots$ $\frac{\sin.BC \sin.AB + \cos.BC \cos.AB - \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB} = \frac{\cos.(BC \smile AB) - \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB} =$ $\frac{2 \sin.\frac{1}{2}(AC - \overline{BC \smile AB}) \times \sin.\frac{1}{2}(AC + \overline{BC \smile AB})}{\sin.BC \sin.AB}$, (II. 23°). Donc, soit qu'on suppose BC > AB ou AB > BC, on aura toujours, (I. 7°), $2 \sin.^2 \frac{1}{2}B = \frac{2 \sin.\frac{1}{2}(AC + AB - BC) \sin.\frac{1}{2}(AC + BC - AB)}{\sin.BC \sin.AB}$; et par conséquent

$$\sin.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(AC + AB - BC) \sin.\frac{1}{2}(AC + BC - AB)}{\sin.BC \sin.AB}}.$$

Dans les formules qui donnent la valeur de la moitié de l'arc cherché, l'espece de l'arc n'est jamais incertaine ; sa valeur est toujours moindre que de 90°, (397, 1°.), (398).

Cette formule (ainsi que les formules que donneront les secondes solutions dans les problêmes suivants) est celle dont on fait ordinairement usage dans le calcul numérique.

Fig.53 464. SOLUTION III. On a, (461), $1 + \cos.B = \ldots$
$\frac{\sin.BC \sin.AB - \cos BC \cos.AB + \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB} = (II.\ 3^e)\ \frac{\cos.AC - \cos.(BC + AB)}{\sin.BC \sin.AB} =$
$\frac{2\sin.\frac{1}{2}(BC + AB - AC) \times \sin.\frac{1}{2}(BC + AB + AC)}{\sin.BC \sin.AB}$, (II. 23e). Donc (I.24e),

$$\cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(BC + AB + AC)\ \sin.\frac{1}{2}(BC + AB - AC)}{\sin.BC \sin.AB}}.$$

Par les raisons déduites (233), cette formule est moins en usage que la précédente, quoique le calcul en soit un peu plus court.

465. SOLUTION IV. Puisque (451), cos.AB : cos.AC :: cos.BD : cos.CD, on a aussi cos.AB + cos.AC : cos.AB ∽ cos.AC :: cos.BD + cos.CD : cos.BD ∽ cos.CD. Par conséquent (II. 13e), $\cot.\frac{1}{2}(AB + AC) : \tan.\frac{1}{2}(AB \backsim AC) :: \cot.\frac{1}{2}(BD + CD) : \tan.\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$. En mettant les tangentes au lieu des cotangentes, et BC au lieu de BD + CD, on a

$$\tan.\tfrac{1}{2}(BD \backsim CD) = \tan.\tfrac{1}{2}(AB + AC)\ \tan.\tfrac{1}{2}(AB \backsim AC)\ \cot.\tfrac{1}{2}BC.$$

Cette formule est due à Neper; mais il y est parvenu par des voies plus laborieuses; il en est de même des formules que nous donnerons pour les dernieres dans les problêmes qui suivent, desquelles il est aussi l'Auteur.

De celle que nous venons de trouver on tire la valeur des segments de la base ou côté BC divisé par la perpendiculaire. Si cette perpendiculaire tombe en dehors du triangle, la formule donne à la vérité la valeur de $\frac{1}{2}(BD + CD)$, et non celle de $\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$; mais alors aussi $BC = (BD \backsim CD)$, et non BD + CD; il est donc inutile de s'arrêter à cette considération, puisqu'en adoptant l'expression $\tan.\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$ pour la valeur donnée par la formule dans tous les cas, on a toujours

$$\text{grand segment} = \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}(BD \backsim CD), \text{ et}$$
$$\text{petit segment} = \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}(BD \backsim CD),$$

Si (AB + AC) est > 180°, $\tan.\frac{1}{2}(BD \backsim CD)$ étant négative,

on prendra le supplément de l'arc $\frac{1}{2}$(BD ∽ CD) donné par les tables, et on emploiera ce supplément dans ces deux équations.

Dans tous les cas, on trouvera pour le grand segment celui qui est adjacent au plus grand des deux côtés, et pour le petit segment celui qui est adjacent au plus petit de ces côtés, comme on peut le conclure facilement d'après l'analogie (451).

Connoissant les segments de la base, on prendra celui qui est adjacent à l'angle cherché, comme BD dans le cas présent, et on aura (VI. 5°)

$$\text{cos.B} = \text{tang.BD cot.AB.}$$

Si c'est le petit segment qu'on emploie dans cette équation, on fera sa tangente négative (154) toutes les fois que l'équation précédente donnera le petit segment négatif. La justesse de cette regle est évidente dans l'application, puisque quand la perpendiculaire tombe en dehors, comme dans la fig. 54, la derniere équation, si on ne changeoit pas le signe de tang.BD, donneroit la valeur de ABD, tandis que l'angle cherché est ABC. Or la quantité que nous appellons (BD ∽ CD) ne peut être plus grande que BC, si ce n'est quand la perpendiculaire tombe en dehors.

Cette solution n'est pas la plus courte ; mais elle s'applique à deux problêmes, puisqu'elle fait aussi connoître les segments de la base.

466. *Les trois angles étant donnés, déterminer un des côtés.*

Solution I. Soit AB le côté cherché ; de l'une A de ses extrémités abaissez la perpendiculaire AD. Vous aurez (452), cos.B : cos.C :: sin.BAD : sin.CAD :: sin.BAD : sin.(BAC — BAD). En procédant comme nous avons fait (461), et mettant cos.AB tang.B au lieu de cot.BAD, (VI. 3°), vous trouverez

$$\text{cos.AB} = \frac{\text{cos.C} + \text{cos.A cos.B}}{\text{sin.A sin.B}}.$$

Si on écrit 1 au lieu de cos.AB, (425), on aura la formule (III. 94°) des triangles rectilignes.

Si les trois angles sont aigus, le signe de cos.AB est positif. Mais AB peut représenter généralement chacun des côtés d'un triangle sphérique. Donc *dans tout triangle sphérique, si tous les angles sont aigus, chacun des côtés est moindre que de* 90°. Je ne m'arrêterai point à ces conséquences, lorsqu'elles ne meneront pas à quelque application utile ; elles se tirent des formules analytiques à la premiere inspection, quoiqu'elles coûtassent de longues démonstrations à la Géométrie des Anciens. On peut voir un grand nombre de propositions de ce genre dans les Ouvrages intitulés (*Menelaï sphericorum* et *Regiomontani de Triangulis*).

467. SOLUTION II. (466), $1 - \cos.AB = \frac{\sin.A \sin.B - \cos.A \cos.B - \cos.C}{\sin.A \sin.B}$

$= \frac{-\cos.(A+B) - \cos.C}{\sin.A \sin.B} = -\frac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C) \times \cos.\frac{1}{2}(\overline{A+B} \smile C)}{\sin.A \sin.B}$

(II. 19°). Donc (I. 7°)

$$\sin.\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(\overline{A+B} \smile C)}{\sin.A \sin.B}}.$$

Le signe — devient positif dans tous les cas, parceque $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)$ est toujours négatif (405, 42), et qu'il seroit aisé de prouver que l'autre cosinus est toujours positif.

Cette formule est une de celles qui par leur nature ne peuvent se transférer aux triangles rectilignes, dans lesquels un côté ne peut être déterminé par la seule connoissance des angles.

468. SOLUTION III. (466), $1 + \cos.AB = \frac{\cos C + \cos.A \cos.B + \sin.A \sin.B}{\sin.A \sin.B}$

$= \frac{\cos.C + \cos.(A \smile B)}{\sin.A \sin.B} = \frac{2\cos.\frac{1}{2}(C + \overline{A \smile B})\cos.\frac{1}{2}(C \smile \overline{A \smile B})}{\sin.A \sin.B}$, (II. 19°).

Donc (I. 24°)

$$\cos.\tfrac{1}{2}AB = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(C + \overline{A \smile B})\cos.\frac{1}{2}(C \smile \overline{A \smile B})}{\sin.A \sin.B}}.$$

469. SOLUTION IV. En opérant sur la proportion (452), cos.B : cos.C :: sin.BAD : sin.CAD, comme nous avons fait (465), on aura (II. 13°, 12°), $\cot.\frac{1}{2}(B + C) : \tang.\frac{1}{2}(C \smile B) ::$

tang.

tang.$\frac{1}{2}$(BAD + CAD) : tang.$\frac{1}{2}$(BAD ∽ CAD), ou, en écrivant A au lieu de sa valeur BAD + CAD,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD}) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{A}\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{C} \backsim \text{B})\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{C} + \text{B}).$$

Par cette formule on a la valeur des segments de *l'angle vertical* (242). Et en adoptant l'expression du premier membre pour tous les cas, comme nous avons fait (465), on aura toujours

$$\text{grand segment} = \tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD});$$
$$\text{petit segment} = \tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD}).$$

Puisque le plus grand de deux arcs correspond à un plus petit cosinus et à un plus grand sinus (en formant toujours les regles (459) comme pour des arcs moindres que de 90°), on peut conclure de la proportion (452) que le moindre des deux angles sur la base et le grand segment de l'angle vertical se trouveront toujours adjacents à un même côté, et que par conséquent le plus grand des deux angles et le petit segment seront adjacents à l'autre côté ; en supposant toujours que dans le calcul de la formule donnée ci-dessus, on ait égard au signe de tang.$\frac{1}{2}$(C + B). Ainsi en prenant le segment adjacent au côté cherché, on aura (VI. 15°)

$$\text{cos.AB} = \text{cot.B cot.BAD.}$$

Et quand on aura le petit segment négatif et < 90°, sa cotangente s'emploiera dans cette formule avec le signe négatif (154).

470. *Connoissant deux côtés et l'angle compris, déterminer un des deux autres angles.*

Solution I. Appellons BC, AC, et C les choses connues, B l'angle cherché ; et du troisieme, A, abaissons la perpendiculaire AD. Nous aurons (450), tang.B : tang.C :: sin.CD : sin.BD :: sin.CD : sin.(BC — CD) :: 1 : sin.BC cot.CD — cos.BC :: 1 : sin.BC × $\frac{\text{cot.AC}}{\text{cos.C}}$ — cos.BC, (VI. 2°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\text{tang.B} = \frac{\text{sin.C}}{\text{sin.BC cot.AC} - \text{cos.BC cos.C}}.$$

Fig.53 Cette formule, qui renferme la cotangente d'un côté et le cosinus d'un autre, se transfere aux triangles rectilignes par les regles données (425), et se réduit à la formule (III. 78°). Il en est de même de la formule ci-après, qui se réduit à la 77°.

471. Si les données étoient AB, AC et BAC; en changeant dans cette formule C en A et A en C, ou bien en abaissant la perpendiculaire sur le côté AB, et procédant comme nous venons de le faire, on trouveroit une autre valeur de tang.B, et cette valeur seroit

$$\text{tang.B} = \frac{\text{sin.A}}{\text{sin.AB cot.AC} - \text{cos.AB cos.A}}.$$

472. SOLUTION II. Soient toujours BC, AC et C les choses connues, B la cherchée, et AD la perpendiculaire. On aura

1°. $\text{tang.CD} = \text{cos.C tang.AC}$, (VI. 2°);

2°. $\text{BD} = \text{BC} - \text{CD}$;

3°. $\text{tang.B} = \frac{\text{tang.C sin.CD}}{\text{sin.BD}}$, (450).

Le segment CD de la base qui se trouve par la premiere équation, se nomme *premier* segment; l'autre, BD, que donne la seconde, se nomme *second* segment. Si l'on a celui-ci négatif, c'est-à-dire si l'on a CD > BC, sin.BD dans la troisieme formule s'emploiera avec le signe négatif (164).

On a établi, comme une regle, qu'il faut prendre la somme de BC et de CD pour avoir BD lorsque l'angle donné C est obtus: mais 1°. si l'angle cherché B est aussi obtus, la perpendiculaire tombe en dedans du triangle, (460), et l'on voit, par la fig. 53, qu'alors cette regle n'est pas juste: 2°. elle n'aura jamais lieu si on a égard aux signes (459) dans le calcul des équations ci-dessus.

473. SOLUTION III. Soient les choses connues AB, AC, BAC, et par conséquent B ou C la chose cherchée. En abaissant de l'angle connu A la perpendiculaire AD, on aura (453), tang.AB : tang.AC :: cos.CAD : cos.BAD; et par conséquent (II. 10°, 13°), sin.(AB + AC) : sin.(AB ∽ AC) :: cot.½(CAD + BAD) :

tang $\frac{1}{2}$(BAD $\backsim$ CAD). En mettant BAC ou A au lieu de CAD + BAD, on a

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{sin.}(\text{AB} \backsim \text{AC})}{\text{sin.}(\text{AB} + \text{AC})}.$$

De cette formule on déduit la valeur des segments de l'angle donné A; car en se servant d'une même expression (465) pour tous les cas, on a toujours

$$\text{grand segment} = \tfrac{1}{2}\text{A} + \tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD});$$
$$\text{petit segment} = \tfrac{1}{2}\text{A} - \tfrac{1}{2}(\text{BAD} \backsim \text{CAD}).$$

L'analogie (453) fait voir que le grand segment est adjacent au grand côté, le petit segment au petit côté; en supposant toujours qu'on ait égard dans la formule précédente au signe de sin.(AB + AC). On a donc (VI. 3°)

$$\text{cot.B} = \text{tang.BAD cos.AB, et}$$
$$\text{cot.C} = \text{tang.CAD cos.AC.}$$

Dans ces formules la tangente du petit segment s'emploiera comme négative, quand on aura ce segment négatif et $< 90°$.

474. Solution IV. Les conditions restant les mêmes, prenez l'analogie (447), sin.AB : sin.AC :: sin.C : sin.B; et vous aurez en premier lieu (II. 12°) la suivante, qui est utile en bien des cas:

(P)... tang.$\frac{1}{2}$(AB + AC) : tang.$\frac{1}{2}$(AB $\backsim$ AC) :: tang.$\frac{1}{2}$(C + B) : tang.$\frac{1}{2}$(C $\backsim$ B).

Substituez la valeur de tang.$\frac{1}{2}$(C + B) donnée par la premiere équation (469), et vous aurez tang.$\frac{1}{2}$(AB + AC) : tang.$\frac{1}{2}$(AB $\backsim$ AC) :: cot.$\frac{1}{2}$A tang.$\frac{1}{2}$(BAD $\backsim$ CAD) : tang.$^2\frac{1}{2}$(C $\backsim$ B). Multipliez terme à terme cette analogie par la seconde (473) exprimée comme il suit, (I. 6°), 2 sin.$\frac{1}{2}$(AB + AC) cos.$\frac{1}{2}$(AB + AC) : 2 sin.$\frac{1}{2}$(AB $\backsim$ AC) cos.$\frac{1}{2}$(AB $\backsim$ AC) :: cot.$\frac{1}{2}$A : tang.$\frac{1}{2}$(BAD $\backsim$ CAD); et divisant le 1er rapport par 2, et le 2e par tang.$\frac{1}{2}$(BAD $\backsim$ CAD), vous aurez sin.$^2\frac{1}{2}$(AB + AC) : sin.$^2\frac{1}{2}$(AB $\backsim$ AC) :: cot.$^2\frac{1}{2}$A : tang.$^2\frac{1}{2}$(C $\backsim$ B); et enfin, en extrayant les racines,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{C} \backsim \text{B}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{AB} \backsim \text{AC})}{\text{sin.}\frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC})}.$$

Fig.53 Cette équation fait connoître la demi-différence des angles inconnus. Pour avoir leur valeur absolue, il faut trouver encore celle de leur demi-somme. Pour cela, qu'on substitue dans cette même équation la valeur de tang.$\frac{1}{2}$(C ∽ B) donnée par l'analogie (P); et réduisant, on aura

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{C} + \text{B}) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A} \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{AB} \backsim \text{AC})}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\text{AB} + \text{AC})}.$$

475. Les deux dernieres formules, trouvées par Neper, méritent qu'on fasse remarquer leur utilité. 1°. Pour les calculer, on n'a que sept logarithmes à chercher, et elles font connoître deux angles à la fois; ce qui est très avantageux en certains cas (755, &c.): avec un égal nombre de logarithmes, la seconde et la troisieme solution (la premiere seroit plus laborieuse à calculer) ne donnent qu'un seul angle. 2°. L'une ou l'autre de ces formules est la plus courte qu'on puisse employer pour *trouver un angle, connoissant les deux autres et les deux côtés qui leur sont opposés;* comme il est facile de le voir, en supposant inconnu l'angle A. 3°. De la seconde je déduis la propriété suivante des triangles sphériques, propriété d'autant plus remarquable, qu'elle est très utile pour diminuer le nombre des cas douteux.

Puisque tang.$\frac{1}{2}$(C + B) et cos.$\frac{1}{2}$(AB + AC) ont le même signe dans la formule, et que les deux autres quantités ne peuvent jamais être négatives (397, 1°.), (398); il s'ensuit que *dans tout triangle sphérique la demi-somme de deux côtés est de la même espece que la demi-somme des deux angles opposés.*

476. *Connoissant deux côtés et l'angle compris, déterminer le troisieme côté.*

SOLUTION I. Soient AB, BC, B les données, AC le côté cherché. De la formule (461) on tire

$$\text{cos.AC} = \text{cos.BC cos.AB} + \text{sin.BC sin.AB cos.B}.$$

477. SOLUTION II. Supposons une perpendiculaire AD abaissée sur l'un des côtés donnés; et nous aurons

1°. tang.BD = tang.AB cos.B, (VI. 2°);

2°. CD = BC ∽ BD;

3°. $\cos.AC = \cos.AB \times \frac{\cos.CD}{\cos.BD}$, (451).

J'ai employé ∽ au lieu de — dans la 2e équation, parceque quand elle donneroit CD négatif, cos.CD ne changeroit pas de signe pour cela, (154).

478. Solution III. Si le côté cherché est petit, on ne pourra l'avoir avec exactitude par le moyen du cosinus. Dans ce cas, au lieu des solutions précédentes, on emploiera celle qui suit.

Puisque (463), $2\sin.^2\frac{1}{2}B = \frac{\cos.(BC \backsim AB) - \cos.AC}{\sin.BC \sin.AB}$, on aura (I.22e), $2\sin.^2\frac{1}{2}B \sin.BC \sin.AB = 2\sin.^2\frac{1}{2}AC - 2\sin.^2\frac{1}{2}(BC \backsim AB)$. Et par conséquent

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \sqrt{(\sin.^2\tfrac{1}{2}\overline{BC \backsim AB} + \sin.BC \sin.AB \sin.^2\tfrac{1}{2}B)},$$

ou, ce qui est plus commode pour le calcul,

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \sin.\tfrac{1}{2}(BC \backsim AB)\sqrt{\left(1 + \frac{\sin.BC \sin.AB \sin.^2\frac{1}{2}B}{\sin.^2\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}\right)}.$$

On pourra calculer cette formule avec les tables trigonométriques en logarithmes, si on la divise (207) en deux équations, comme il suit :

$$\text{tang.}a = \frac{\sin.\frac{1}{2}B}{\sin.\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}\sqrt{\sin.BC \sin.AB};$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}AC = \frac{\sin.\frac{1}{2}(BC \backsim AB)}{\cos.a}.$$

479. Il n'y a point de formule analogue à celles de Neper, pour résoudre immédiatement ce problême. Si l'on veut se servir de ses formules, après avoir trouvé, au moyen des solutions (473) ou (474), un des angles inconnus, on emploiera la solution (492) pour trouver le côté cherché.

480. *Connoissant deux angles et le côté compris, déterminer un des deux autres côtés.*

Solution I. Soient A, C, AC les choses connues, AB la

Fig.53 cherchée, et soit abaissée sur le troisieme côté une perpendiculaire AD. On aura (453), tang.AB : tang.AC :: cos.CAD : cos.BAD :: cos.CAD : cos.(BAC — CAD) :: 1 : cos.BAC + sin.BAC × tang.CAD :: 1 : cos.A + sin.A × $\frac{\text{cot.C}}{\text{cos.AC}}$, (VI. 3°). Du premier et du dernier rapport on tire

$$\text{tang.AB} = \frac{\text{sin.AC}}{\text{sin.A cot.C} + \text{cos.A cos.AC}}.$$

481. Si les données étoient B, C, BC; en procédant de la même maniere, ou bien en changeant dans la formule précédente A en B et B en A, on trouveroit une autre valeur de tang.AB, qui seroit

$$\text{tang.AB} = \frac{\text{sin.BC}}{\text{sin.B cot.C} + \text{cos.B cos.BC}}.$$

Cette formule et la précédente se changent (425) en celles des triangles rectilignes (III. 4°, 3°).

482. SOLUTION II. Les conditions (480) restant toujours les mêmes, on a

1°. cot.CAD = tang.C cos.AC, (VI. 3°);

2°. BAD = A ∽ CAD, (477);

3°. tang.AB = tang.AC × $\frac{\text{cos.CAD}}{\text{cos.BAD}}$, (453).

483. SOLUTION III. Soient B, C, BC les données, et AD la perpendiculaire sur le côté donné. On aura (450), tang.B : tang.C :: sin.CD : sin.BD. Et par conséquent (II. 10°, 12°), sin.(B + C) : sin.(B ∽ C) :: tang.$\frac{1}{2}$(CD + BD) : tang.$\frac{1}{2}$(CD ∽ BD), ou

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{CD} \backsim \text{BD}) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{BC} \times \frac{\text{sin.(B} \backsim \text{C)}}{\text{sin.(B + C)}}.$$

Dans un Ouvrage assez répandu, et qui d'ailleurs est très digne de l'être, cette formule est ainsi changée pour le cas où la perpendiculaire tombe en dehors du triangle : cot.$\frac{1}{2}$(BD + CD) = cot.$\frac{1}{2}$BC × $\frac{\text{sin.(B — C)}}{\text{sin.(B + C)}}$. Un exemple en nombres suffiroit pour reconnoître l'erreur de cette formule.

Mais au surplus pour démontrer la justesse de la formule que nous venons de donner, même dans le cas où la perpendiculaire tombe en dehors, qu'on se rappelle qu'alors les angles sur le côté connu doivent être d'especes différentes (460). Soit donc celui qu'on voudra, par exemple C, l'angle obtus; la proportion (450) sera en pareil cas tang.B : — tang.C :: sin.CD : sin.BD. Et par conséquent tang.B + (— tang.C) : tang.B — (— tang.C) :: sin.CD + sin.BD : sin.CD — sin.BD :: tang.B — tang.C : tang.B + tang.C. Si l'on transforme la derniere analogie d'après les formules (II. 12°, 10°), elle deviendra tang.$\frac{1}{2}$(CD + BD) : tang.$\frac{1}{2}$(CD — BD) :: sin.(B — C) : sin.(B + C). De plus, lorsque la perpendiculaire tombe en dehors, on a BC = CD — BD, fig. 54; substituant cette valeur, on a tang.$\frac{1}{2}$(CD + BD) = tang.$\frac{1}{2}$BC $\times \frac{\sin.(B - C)}{\sin.(B + C)}$. Or la formule que nous venons de donner est précisément la même que cette équation, si ce n'est que nous employons le signe $\backsim$ au lieu du signe +, et on en a vu le motif (465).

On a donc, dans tous les cas, pour les segments du côté connu,

$$\text{grand segment} = \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}(CD \backsim BD);$$
$$\text{petit segment} = \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}(CD \backsim BD).$$

Dans la proportion (450) on voit que le plus grand angle est adjacent au petit segment, et le plus petit angle au grand segment. Prenant donc le segment adjacent au côté cherché, on aura (VI. 10°)

$$\text{cot.AB} = \text{cot.BD} \cdot \text{cos.B}, \text{ et}$$
$$\text{cot.AC} = \text{cot.CD} \cdot \text{cos.C}.$$

Dans ces formules on emploiera négativement (154) la cotangente du petit segment, quand on aura ce segment négatif et $< 90°$.

484. Solution IV. Procédant comme on a fait (474), qu'on substitue dans l'analogie (P) la valeur de tang.$\frac{1}{2}$(AB + AC) prise de la 1e équation (465), et on trouvera tang.$\frac{1}{2}$(BD $\backsim$ CD) $\times$

Fig.53 $\text{tang.}\frac{1}{2}BC : \text{tang.}^2\frac{1}{2}(AB \smile AC) :: \text{tang.}\frac{1}{2}(C+B) : \text{tang.}\frac{1}{2}(C \smile B)$.

Mais $\text{tang.}\frac{1}{2}(CD \smile BD) = \text{tang.}\frac{1}{2}BC \times \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(B \smile C)\ \text{cos.}\frac{1}{2}(B \smile C)}{\text{sin.}\frac{1}{2}(B+C)\ \text{cos.}\frac{1}{2}(B+C)}$ (483). En mettant cette valeur dans l'analogie précédente, et extrayant les racines, on aura

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(AB \smile AC) = \text{tang.}\frac{1}{2}BC \times \frac{\text{sin.}\frac{1}{2}(C \smile B)}{\text{sin.}\frac{1}{2}(C+B)}.$$

En substituant dans cette équation la valeur de $\text{tang.}\frac{1}{2}(AB \smile AC)$ tirée de l'analogie (P), on aura encore

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(AB+AC) = \text{tang.}\frac{1}{2}BC \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(C \smile B)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(C+B)}.$$

Ces deux formules sont remarquables en ce qu'elles ont l'avantage de faire trouver à la fois les deux côtés inconnus. Chacune d'elles est d'ailleurs la plus courte qu'on puisse employer pour *trouver un côté, connoissant les deux autres et les deux angles qui leur sont opposés;* comme il est aisé de s'en convaincre en supposant BC inconnu.

485. *Connoissant deux angles et le côté compris, trouver le troisieme angle.*

SOLUTION I. Soient A, B, AB les données. De la formule (466) on tire

$$\text{cos.}C = \text{cos.}AB\ \text{sin.}A\ \text{sin.}B - \text{cos.}A\ \text{cos.}B.$$

486. SOLUTION II. En abaissant de l'un A des angles donnés une perpendiculaire AD, on aura

1°. $\text{cot.}BAD = \text{cos.}AB\ \text{tang.}B$, (VI. 3°);

2°. $CAD = A - BAD$;

3°. $\text{cos.}C = \text{cos.}B \times \frac{\text{sin.}CAD}{\text{sin.}BAD}$, (452).

Si la 2e équation donne CAD négatif, on prendra négativement sin.CAD dans la 3e, (154).

En donnant cette solution, et celle que nous avons rapportée (482), La Caille (*Éléments d'Astron. Traité prélimin.*) prescrit de prendre, *selon la position de la perpendiculaire,* la somme ou la différence

différence de l'angle vertical et de son premier segment donné par la 1e équation, pour avoir le second segment : or on ne doit jamais prendre la *somme*, soit que la perpendiculaire tombe en dedans ou en dehors du triangle ; puisque les regles données par lui relativement à l'espece du premier segment, supposent la perpendiculaire du côté opposé à l'angle donné employé dans la premiere équation, et non du côté opposé au supplément de cet angle. Je dis *données par lui ;* car c'est évidemment par erreur qu'on lit dans sa table pour la résolution des triangles rectangles, n°. 118, que *l'angle cherché est* $< 90°$ *si l'hypothénuse est* $< 90°$: il est clair qu'on doit lire, *si l'hypothénuse et l'angle donné sont de même espece.* C'est ainsi que cette regle est corrigée par M. l'Abbé Marie, et qu'elle devient conforme aux regles analogues de la table de La Caille, et sur-tout à celle du n°. 121, dont le cas est le même qu'au n°. 118, les lettres seules étant différentes.

487. SOLUTION III. Si l'angle cherché est petit, on ne pourra l'avoir avec précision par les deux solutions précédentes. Mais puisque (467), $2\sin.^2\frac{1}{2}AB \sin.A \sin.B = -\cos.(A+B) - \cos.C = 1 - 2\cos.^2\frac{1}{2}(A+B) - 1 + 2\sin.^2\frac{1}{2}C$, (I. 23°, 22°), il s'ensuit que

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{(\cos.^2\tfrac{1}{2}\overline{A+B} + \sin.A \sin.B \sin.^2\tfrac{1}{2}AB)};$$

ou, ce qui est plus commode pour le calcul,

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\sqrt{\left(1 + \frac{\sin.A \sin.B \sin.^2\frac{1}{2}AB}{\cos.^2\frac{1}{2}(A+B)}\right)};$$

ou enfin, pour n'avoir à employer que les seules tables trigonométriques en logarithmes (207),

$$\text{tang.}a = \frac{\sin.\frac{1}{2}AB}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}\sqrt{\sin.A \sin.B}\,;\text{ et}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.a}.$$

Il n'y a point de formule analogue à celles de Neper pour résoudre immédiatement ce problême ; mais si on veut faire usage de ses

Fig.53 formules, après avoir trouvé par les solutions (483 ou 484) un des côtés inconnus, on aura recours à la suivante pour avoir le troisieme angle.

488. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.* (On n'a qu'une solution de ce problême, et de chacun des cinq qui le suivent).

Soient AB, AC, B les données : C sera l'angle cherché, et on aura (447),

$$\sin.C = \frac{\sin.AB \sin.B}{\sin.AC}.$$

Dans ce problême l'espece de l'angle C est douteuse; on démontre, de la même maniere que pour les cas douteux dans la Trigonométrie rectiligne (225), que cet angle a deux valeurs, ainsi que toutes les parties inconnues du triangle. Pour les triangles sphériques, l'incertitude est détruite, dans la plupart des cas, par la regle (475) qui peut s'énoncer ainsi : *Selon que la somme des côtés donnés est plus grande ou moindre ou de même valeur que* 180°, *la somme des angles opposés est aussi ou plus grande, ou moindre, ou de même valeur que* 180°.

Si au lieu de connoître un angle, on connoissoit la somme ou la différence des angles opposés aux côtés donnés, la valeur de chacun des angles se trouveroit par l'analogie (P), (474).

489. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle compris par ces deux côtés.*

Soient AB, AC, B les données; A sera l'angle cherché. En abaissant de cet angle la perpendiculaire AD, on aura

$$1°.\ \cot.BAD = \cos.AB \tang.B, \text{ (VI. 3°)};$$
$$2°.\ \cos.CAD = \cos.BAD \times \frac{\tang.AB}{\tang.AC}, \text{ (453)};$$
$$3°.\ BAD \pm CAD = A.$$

Le signe + a lieu quand la perpendiculaire tombe en dedans; le signe — quand elle tombe en dehors. Et par conséquent (460)

on prendra la somme des segments de l'angle cherché, lorsque les deux autres angles seront de même espece entre eux; la différence, lorsque ces deux angles seront d'espece différente entre eux. D'où l'on voit que le cas de ce problême est douteux toutes les fois que le cas du problême précédent l'est aussi.

Cependant l'espece de l'angle C restant inconnue, souvent encore on pourra connoître l'espece de l'angle A au moyen de la regle suivante que je tire de l'excellente *Trigonométrie sphérique* de M. l'Abbé Boscovich : *si la somme des segments est* $> 180°$, *prenez la différence ; si la différence est négative, prenez la somme.*

La Caille prescrit de prendre la somme des segments, lorsque *les côtés donnés* sont de même espece entre eux. L'autorité d'un tel homme, dont l'exactitude égaloit l'habileté, a engagé M. l'Abbé Marie et d'autres Auteurs respectables à adopter cette regle sans examen. Il est donc à propos de démontrer qu'elle est inexacte, ne fût-ce que pour accoutumer les Commençants à lire avec précaution les Auteurs même les plus justement célebres.

Soit un triangle ACD, rectangle en D, formé par trois arcs moindres chacun que de 90°; dès-lors (420) les angles obliques seront tous deux aigus. De l'un A de ces angles, menez en dedans du triangle un arc AB, qui divise en un point quelconque le côté opposé CD. Vous aurez $BD < CD$, et par conséquent $BD < 90°$. Mais (451), cos.BD : cos.CD :: cos.AB : cos.AC. Donc AC étant $< 90°$ par la supposition, il résulte de cette proportion que AB est $< 90°$, et que par conséquent AB, AC sont de même espece. Mais AD étant, par l'hypothese, perpendiculaire à CD, les segments de l'angle A dans le triangle obliquangle ABC, sont CAD, BAD ; et il est visible que $BAC = CAD - BAD$. Donc de ce que deux côtés sont de même espece, il ne s'ensuit pas que l'angle qu'ils comprennent soit composé de la somme de ses segments ; et la regle de La Caille manque de justesse. Fig.54

Fig.53 490. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, déterminer le troisieme côté.*

Soient AB, AC, B les données; abaissons, sur le côté cherché BC, la perpendiculaire AD : nous aurons

$$1°.\ \text{tang.BD} = \text{tang.AB}\ \text{cos.B},\ \text{(VI. 2°)};$$
$$2°.\ \text{cos.CD} = \text{cos.BD} \times \frac{\text{cos.AC}}{\text{cos AB}},\ \text{(451)};$$
$$3°.\ \text{BD} \pm \text{CD} = \text{BC}.$$

On prendra ou la somme ou la différence des segments de la base, suivant les regles que nous avons données (489) pour les segments de l'angle vertical.

On a encore prescrit, dans ce cas, de prendre la somme, quand *les deux côtés donnés* sont de même espece ; d'où il suivroit que quand deux côtés sont de même espece, la perpendiculaire sur le troisieme côté tombe *toujours* en dedans du triangle ; et nous venons de démontrer le contraire (489).

491. Si le sinus ou cosinus trouvé dans l'un des trois précédents problêmes, étoit d'une telle grandeur qu'on ne pût avoir l'arc avec la précision desirée, on auroit recours à un autre de ces trois problêmes; et alors connoissant quatre parties du triangle, on varieroit les données, pour trouver la partie cherchée par le moyen de quelqu'un des problêmes qui précédent les trois derniers. Cette remarque doit aussi s'appliquer aux trois suivants.

492. *Connoissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté opposé à l'autre angle connu.*

Soient B, C, AC les données : AB sera le côté cherché; et l'on aura (447)

$$\text{sin.AB} = \text{sin.AC} \times \frac{\text{sin.C}}{\text{sin.B}}.$$

Selon que la somme des angles donnés est ou plus grande, ou moindre, ou de même valeur que 180°, *la somme des côtés opposés est aussi ou plus grande, ou moindre, ou de même valeur que* 180°, (475).

Si cette regle ou les notions qu'on aura d'ailleurs ne suffisent

pas pour qu'on puisse discerner l'espece du côté cherché dans ce problême, il sera impossible de déterminer la valeur des autres parties du triangle par les solutions des deux problêmes qui suivent. Regiomontanus qui a bien connu l'ambiguité des problêmes (488 à 490), a donné celui-ci et les deux suivants, comme déterminés dans tous les cas (*de Triangulis, Lib.* 4. *prop.* 29 et 32). Il est donc à propos de démontrer qu'ils ne le sont pas.

Pour cet effet, soient donnés le côté NK et les angles NAK et ANK, en supposant KN oblique sur AN; toutes les fois qu'un arc KL = KN pourra tomber de l'angle inconnu K sur le côté opposé, il est clair que ces problêmes seront douteux, et qu'on ne pourra discerner par la Trigonométrie si les données appartiennent au triangle ANK, ou bien au triangle BLK, puisque A = B, (388), que KN = KL par la supposition, et que ANK = BLK, (411). Fig.45

Si au lieu de connoître un côté, on connoissoit la somme ou la différence des côtés opposés aux angles donnés, la valeur de chacun des côtés se trouveroit par l'analogie (P), (474).

493. *Connoissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté compris entre leurs sommets.*

Soient les données B, C, AC; abaissons la perpendiculaire AD sur le côté cherché BC; et nous aurons Fig.53

$$1^{\circ}.\ \text{tang.CD} = \text{tang.AC}\ \cos.\text{C},\ (\text{VI. } 2^{e});$$
$$2^{\circ}.\ \sin.\text{BD} = \sin.\text{CD} \times \frac{\text{tang.C}}{\text{tang.B}},\ (450);$$
$$3^{\circ}.\ \text{CD} \pm \text{BD} = \text{BC}.$$

L'espece de BD est toujours douteuse, lorsque dans le problême précédent celle de AB est douteuse. Mais si l'on connoît l'espece de AB, on détermine celle de BD par l'analogie (451), cos.AC : cos.CD :: cos.AB : cos.BD, qui fournit la regle suivante : *Selon que les côtés opposés aux angles donnés sont, entre eux, de même ou de différente espece, les segments du côté cherché sont, entre eux, de même ou de différente espece.*

Dans la troisieme équation, on prendra toujours la somme,

Fig.53 quand les angles donnés seront de même espece ; la différence dans le cas contraire. Cette seule regle suffira souvent, en éprouvant la plus grande des deux valeurs du second segment BD, comme le prescrit M. l'Abbé Boscovich ; si, dans le cas de la somme, on a BC $>$ 180°, ou si, dans le cas de la différence, on a BC négatif, le second segment est toujours moindre que de 90°.

494. *Connoissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le troisieme angle.*

Soient les données B, C, AC; A est l'angle cherché, et l'on a

1°. cot.CAD $=$ cos.AC tang.C, (VI. 3°);

2°. sin.BAD $=$ sin.CAD $\times \frac{\text{cos.B}}{\text{cos.C}}$, (452);

3°. CAD $\pm$ BAD $=$ A.

Pourvu que l'on connoisse l'espece de AB, (492), on déterminera celle de BAD par l'analogie (453), tang.AB : tang.AC :: cos.CAD : cos.BAD. Du reste toutes les regles du problême précédent, relatives aux segments de la base, s'appliquent de même aux segments de l'angle vertical.

495. J'ai réuni dans la table VII toutes les solutions *analytiques*, ainsi appellées, parce qu'elles contiennent dans une seule équation la valeur complette d'une ligne trigonométrique appartenant à quelqu'une des parties d'un triangle sphérique ; laquelle valeur peut se substituer par conséquent dans les opérations analytiques, et conduire ainsi à des résultats très utiles. Les formules 5°, 7°, 9°, 12°, 15°, 16°, 23°, 28°, 29°, 35°, 36° sont démontrées aux articles 488, 462, 461, 485, 470, 471, 492, 476, 466, 480, 481. De ces formules sont tirées toutes les autres de la table, par de simples changements de lettres (462).

La table III est beaucoup plus étendue : on auroit pu de même augmenter la table VII, en y insérant jusqu'à dix valeurs de chaque ligne trigonométrique ; mais ces valeurs sont, pour la plupart, trop compliquées. Il sera facile, au surplus, de les former au besoin. Par exemple, outre les deux valeurs de sin.A que donne la

table VII, quatre autres se trouvent en prenant dans cette même table les deux valeurs de cos.A et les substituant dans la formule (I. 3e), et les deux valeurs de tang.A, et les substituant dans la formule (I. 5e). Les quatre autres valeurs de sin.A demandent un peu plus de travail, parce qu'il faut les tirer des solutions trigonométriques des cas douteux (489 à 494). Nous nous contenterons de rechercher l'une de ces valeurs.

Connoissant deux angles B, C, *et un côté opposé* AC, *on demande l'expression analytique du sinus du troisieme angle* A. C'est le cas de la solution (494), dans laquelle commençant par la troisieme équation, et supposant de même espece (459) les angles donnés, nous aurons sin.A = sin.(CAD + BAD) = sin.CAD cos.BAD + cos.CAD sin.BAD. Éliminons BAD par le moyen de la deuxieme équation (494), en observant que cos.BAD $= \sqrt{(1 - \sin.^2 BAD)}$; nous aurons sin.A = sin.CAD $\times \sqrt{\left(1 - \sin.^2 CAD \times \frac{\cos.^2 B}{\cos.^2 C}\right)}$ + cos.CAD sin.CAD $\times \frac{\cos.B}{\cos.C}$. Il reste à éliminer CAD par le moyen de la premiere équation (494), en observant d'ailleurs que sin.CAD $= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot.^2 CAD)}}$, (I. 4e), et que cos.CAD $= \frac{\cot.CAD}{\sqrt{(1 + \cot.^2 CAD)}}$, (I. 20e), équations dans lesquelles on mettra, au lieu de cot.CAD, sa valeur prise (494), et qui donnent, après cette substitution, une valeur de sin.CAD, et une valeur de cos.CAD, qu'on substituera l'une et l'autre dans l'équation précédente. On aura alors sin.A $= \frac{1}{\sqrt{(1 + \tang.^2 C \cos.^2 AC)}} \times \sqrt{\left(1 - \frac{\cos.^2 B}{\cos.^2 C + \sin.^2 C \cos.^2 AC}\right)} + \frac{\cos.B}{\cos.C} \times \frac{\tang.C \cos.AC}{\sqrt{(1 + \tang.^2 C \cos.^2 AC)}} \times \frac{1}{\sqrt{(1 + \tang.^2 C \cos.^2 AC)}}$, expression cherchée qu'il ne s'agit plus que de simplifier. Écrivons par-tout $\frac{\sin.^2 C}{\cos.^2 C}$ au lieu de $\tang.^2 C$, $1 - \sin.^2 AC$ au lieu de $\cos.^2 AC$, puis 1 au lieu de $\cos.^2 C + \sin.^2 C$, et $\sin.^2 B$ au lieu de $1 - \cos.^2 B$, et nous aurons enfin

$$\sin.A = \frac{\cos.C \sqrt{(\sin.^2 B - \sin.^2 C \sin.^2 AC)} + \sin.C \cos.B \cos.AC}{1 - \sin.^2 C \sin.^2 AC}.$$

En changeant C en B et B en C, on a aussitôt l'expression de sin.A pour le cas où les données sont B, C, AB.

En traitant de même la solution (489), on trouvera les deux dernieres valeurs de sin.A.

Si on veut transférer aux triangles rectilignes la formule que nous venons de trouver, il faut faire alors $\sin.^2 AC = 0$; car on a $\sin.^2 AC = 1 - \cos.^2 AC = 1 - 1$, (425). Il en est de même de $\sin.^2 \frac{1}{2}AB$, et de $\sin.\frac{1}{2}AB$ dans les formules (487) : et en général si dans une formule sphérique il ne se trouve qu'un seul des côtés, il faut faire son sinus $= 0$, ainsi que sa tangente; ce qui est conforme (I. 3e, 33e) à la regle (425) de faire le cosinus $= 1$.

496. La table VIII renferme les solutions *trigonométriques*, que je nomme ainsi, parce que ce sont les plus usitées dans le calcul numérique, et que ce sont celles que donnent tous les Auteurs de Trigonométrie. Cette table est disposée de maniere à dispenser le Calculateur d'application et d'étude dans quelque cas que ce soit; même de faire une figure, et de savoir la situation de la perpendiculaire. Il suffit qu'on se rappelle que le cosinus, la tangente et la cotangente de l'arc $> 90°$ et $< 180°$, sont négatifs. J'ai exposé (459) la regle fondamentale d'après laquelle sont construites toutes mes solutions. Si on a la curiosité de savoir de quel côté tombe la perpendiculaire, elle est en dehors du triangle toutes les fois que l'on a ou la base moindre que son 1er segment, ou l'angle vertical moindre que son 1er segment.

497. J'ai rassemblé dans la table IX les solutions de Neper, pour lesquelles le Calculateur n'aura de même besoin d'attention que relativement aux signes (42). On observera que dans le cas où l'on trouve le plus grand segment $> 180°$, la valeur qu'on obtient pour les segments, en se conformant aux regles des signes, est alors relative non à la perpendiculaire qui tombe en dedans du triangle, mais au supplément de cette perpendiculaire, c'est-à-dire à celui des deux arcs perpendiculaires, qui dans ce cas est le seul tombant en dehors.

L'arc

L'arc *a* représente la somme des segments quand la perpendiculaire (son supplément dans le cas ci-dessus) tombe en dehors, leur différence quand elle tombe en dedans.

Du Triangle isoscele.

498. Si le triangle est isoscele, on le divise en deux triangles égaux (409, 3°.) et rectangles, par le moyen d'un arc perpendiculaire à la base, et par conséquent cet arc partage en deux parties égales et la base et l'angle vertical. Alors on a, par la table VI, les analogies suivantes qui résolvent tous les cas.

1°. Le sinus d'un *côté* est au sinus de la demi-*base* comme le rayon au sinus du demi-*angle vertical.*

2°. La tangente d'un *côté* est à la tangente de la demi-*base*, comme le rayon au cosinus d'*un angle sur la base.*

3°. Le cosinus d'un *côté* est à la cotangente du demi-*angle vertical,* comme le rayon à la tangente d'*un angle sur la base.*

4°. Le cosinus de la demi-*base* est au cosinus du demi-*angle vertical,* comme le rayon au sinus d'*un angle sur la base.*

De la mesure de la surface du Triangle sphérique.

499. Pour trouver la surface d'un triangle sphérique quelconque ABC, prolongez un de ses côtés, par exemple BC, en décrivant le cercle entier BCEFB, qui représentera la moitié d'une sphere (377). Prolongez aussi, tant d'une part que de l'autre, les deux côtés AB, AC, jusqu'à ce que vous ayez (379), BAE = 180° = ABD = CAF = ACD. Il est évident par cette construction, en vertu de laquelle on a aussi CBF = 180° = BFE, que le triangle AEF, placé sur l'hémisphere antérieur, est égal (407) au triangle BCD décrit sur l'hémisphere opposé. Appellons *m* la surface de chacun de ces deux triangles, *x* la surface cherchée du triangle ABC, *n* et *p* les surfaces des triangles CAE, BAF. On sait d'ailleurs que la surface de la sphere est égale à la circonférence d'un grand cercle, multipliée par le diametre. Mettant donc $2R \times 360°$ Fig.57

au lieu de la *surface de la sphere* dans la proportion (415), nous aurons le fuseau ABDCA, ou $x + m$, $= 2A \times R$; le fuseau BAECB, ou $x + n$, $= 2B \times R$; et le fuseau CBFAC, ou $x + p$, $= 2C \times R$; de sorte qu'en additionnant les trois équations, on a $3x + m + n + p = (A + B + C) \times 2R$. Mais il est clair, par la figure, que la moitié de la surface de la sphere, ou $2R \times 180°$, $= x + m + n + p$. Donc $2x + 2R \times 180° = (A + B + C)\ 2R$; et par conséquent

$$x = (A + B + C - 180°) \times R.$$

Donc la *surface d'un triangle sphérique se trouve en retranchant* 180° *de la somme des trois angles, et multipliant le reste par le rayon de la sphere.*

Cette solution, extrêmement simple, est tirée de Wallis.

Il faut observer, pour le calcul de cette équation, que les deux facteurs du second membre doivent être des quantités de même espece. Soit $(A + B + C - 180°) = D$; si on veut en degrés ou minutes, &c. la surface cherchée, on emploiera D en degrés ou minutes, et, pour le rayon, R° ou R′, &c. (262). Si l'on veut la surface en pouces ou pieds, &c., on prendra R en pouces ou pieds, &c., et on réduira D en pouces ou pieds par la proportion R° ou R′ : D° ou D′ :: R en pouces ou pieds : D en pouces ou pieds.

Exemples du calcul des Triangles obliquangles.

500. EXEMPLE I. Connoissant la longitude et la latitude géographique (416) de deux lieux, comme Pétersbourg et la Conception, ville du Chili, on demande l'arc de la Terre intercepté entre ces deux villes, ou, ce qui revient au même, leur distance.

Longitude de Pétersbourg comptée du méridien de Paris et à l'orient . . . . . 27° 59′ 30″

Longitude de la Conception, occident de Paris, 75 0 0

Différence de longitude entre Pétersbourg et la Conception 102 59 30

Latitude septentrionale de Pétersbourg . . . 59° 56′ 0″
Latitude méridionale de la Conception 36 42 53
Soit donc (416), A le pôle, et l'angle A = 102 59 30 Fig.48
B la Conception, et . . . . . AB = 126 42 53
D Pétersbourg, et . . . . . AD = 30 4 0

On cherche BD; et c'est le cas de la solution (VIII. 8°). Je nomme AB la *base* et AD le *côté donné*, et j'ai

log. — cos.A = 9,351814	log. cos.AD = 9,937238
log. tang. AD = 9,762606	comp.log.— cos.I seg.= 0,003647
log.— tang.I seg.= 9,114420	log. cos.II segment = 9,842787
Donc I segm.= 172°35′ 6″	log. — cos.BD = 9,783672
Base = 126 42 53	Donc BD = 127°25′18″
Diff. ou II seg.= 45 52 13	

La distance cherchée est donc, à très peu près, de 7645 milles géographiques, de 60 au degré.

Pour faire d'autant plus promptement ce calcul, il est à propos de chercher et d'écrire immédiatement l'un après l'autre le log. de tang.AD, et celui de cos.AD; ainsi que le complément de log. cos.I segm., immédiatement après avoir trouvé la valeur de ce segment.

Exemple II. Résolvons le même problême, en prenant AD pour la *base*, AB pour le *côté donné*.

log. — cos.A = 9,351814	log. — cos.AB = 9,776578
log. — tang.AB = 0,127391	compl.log.cos.I segm.= 0,018886
log. tang.I segm.= 9,479205	log.cos.II segment = 9,988208
I segment = 16° 46′30″	log. — cos.BD = 9,783672
Base = 30 4 0	Et c'est ce que nous venons de
Diff. ou II seg. = 13 17 30	trouver tout-à-l'heure.

On voit quelle est l'exactitude et la facilité de nos regles, qu'on

pourra comparer avec celles que donne La Caille pour le même cas (*Éléments d'Astronomie, Traité prélimiminaire*, art. VI, problême X).

EXEMPLE III. Retournons le problême. *Connoissant la distance et les latitudes géographiques de deux lieux, trouver la différence de leurs longitudes.*

Ce problême est d'un grand usage dans la navigation. Car lorsqu'un Pilote connoît les longitude et latitude du lieu d'où il est parti; qu'il a tenu compte (216) de la route parcourue, et qu'il a observé la latitude (ou la hauteur du pôle) pour le point du globe où il se trouve; il ne lui reste plus, pour connoître exactement la situation de ce point, qu'à déterminer, au moyen de ces données, le chemin qu'il a fait en longitude: et c'est l'objet du problême que nous allons résoudre.

Fig. 48. Soit donc BD la route déjà faite, AB le complément de la latitude du lieu de départ B, AD le complément de celle du point D, où se trouve le vaisseau. Connoissant ces trois côtés du triangle ABD, on cherche l'angle au pôle, A, qui est la différence entre la longitude connue du méridien AB, et la longitude cherchée du méridien AD.

J'emploie pour résoudre ce cas, la premiere formule (VIII. 11°): j'appelle a le côté BD opposé à l'angle cherché, b et c les deux autres, à volonté; et je suppose

a	=	37°	24′	46″
b	=	41	9	0
c	=	71	30	0
somme		150	3	46
demi-somme ou s	=	75	1	53
$s - b$	=	33	52	53
$s - c$	=	3	31	53

Après ces préparations indiquées par la formule, je trouve

$$\begin{aligned}
\text{log.sin.}(s-b) &= 9,746226\\
\text{log.sin.}(s-c) &= 8,789548\\
\text{compl.log.sin.}\,b &= 0,181753\\
\text{compl.log.sin.}\,c &= 0,023043\\
\text{somme} \quad & \overline{8,740570}\\
\text{demi-somme ou log.sin.}\tfrac{1}{2}\text{A} &= 9,370285
\end{aligned}$$

Ce log. répond à sin. 13° 34′ 0″; donc A = 27° 8′.

Pour s'exercer, on pourra chercher le même angle par la seconde formule (VIII. 11°).

Exemple IV. Ayant les mêmes données, cherchons le même angle par la solution (IX. 7°).

Soit donc BD = 37° 24′ 46″, AD = 41° 9′, AB = 71° 30′. Je nomme *base* le côté AD, simplement *côtés* les deux autres; j'ai $\frac{1}{2}$AD = 20° 34′ 30″; $\frac{1}{2}$(AB + BD) = 54° 27′ 23″; $\frac{1}{2}$(AB — BD) = 17° 2′ 37″. Donc

$$\begin{aligned}
\text{log. tang. demi-somme des côtés} &= 0,146033\\
\text{log. tang. demi-différence des côtés} &= 9,486520\\
\text{log.cot.}\tfrac{1}{2}\text{base} &= 0,425532\\
\text{log.tang.}\tfrac{1}{2}a &= \overline{0,058085}
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2}a$ = 48° 49′ 12″$\frac{1}{2}$. Dans le calcul de la derniere équation (IX. 7°) je dois employer le segment et le côté adjacents à l'angle cherché : or AD étant la base, le seul côté adjacent à l'angle cherché est AB; et comme AB est plus grand que l'autre côté BD, je dois, d'après la regle de la table, relativement à ce cas, employer avec AB le grand segment. C'est donc ce segment que je cherche, et j'ai : grand segment = 20° 34′ 30″ + 48° 49′ 12″$\frac{1}{2}$ = 69° 23′ 42″$\frac{1}{2}$. J'ai ensuite

$$\begin{aligned}
\text{log. tang. } 69° 23′ 42″\tfrac{1}{2} &= 0,424844\\
\text{log.cot. } 71° 30′ &= 9,524520\\
\text{log.cos.A} &= 9,949364
\end{aligned}$$

Donc A = 27° 8′ 0″, comme nous l'avons trouvé dans l'exemple III.

Fig.48 EXEMPLE V. Ayant les mêmes données, cherchons l'angle D. Puisqu'il est, ainsi que A, dans l'exemple précédent, adjacent à AD, que nous avions pris et prenons encore pour la base, le calcul déjà fait de la 1e équation (IX. 7e) sera le même dans cet exemple-ci. Le côté adjacent à l'angle cherché sera BD $<$ AB; donc dans la 4e équation (IX. 7e) il faut employer le petit segment. On a donc: petit segm. $= 20° 34' 30'' - 48° 49' 12''\frac{1}{2} = -28° 14' 42''\frac{1}{2}$. Et la tangente de cet arc négatif sera négative, (154).

$$\begin{aligned} \log. - \text{tang.}\, 28° 14' 42''\tfrac{1}{2} &= 9,730144 \\ \log.\text{cot.}\, 37\ 24\ 46 &= 0,116389 \\ \log. - \cos.D &= 9,846533 \end{aligned}$$

Et par conséquent D $= 134° 36' 47'', 3$.

501. Un Auteur très connu, employant les mêmes valeurs pour AB, AD et A, calcule cet angle D au moyen de la formule (VII. 17e), (dans laquelle je suppose D au lieu de C), et le donne de 45° 23' 14", c'est-à-dire aigu. Il n'a pas fait attention que cos.AD cos.A est $>$ sin.AD cot.AB, et que la quantité négative étant la plus grande dans le dénominateur, tang.D est nécessairement aussi une quantité négative. Cette méprise ne mériteroit pas d'être relevée, si le même Auteur n'annonçoit pas, avant de donner le calcul du problême, que l'angle cherché doit être aigu; et s'il n'ajoutoit pas que c'est par cette raison qu'il prend cos.AD cos.A avec un signe négatif. Quelque triangle ABD que l'on considere, jamais la regle suivante ne sera en défaut : *Le signe de* cos.AD cos.A *ne dépend nullement de l'espece de l'angle* D, *mais seulement de celles de* AD *et de* A; *et il sera toujours négatif, quand* AD *et* A *seront de même espece.* Si cet Auteur, très justement estimé, a pu se tromper ainsi relativement aux signes, cela prouve assez, du moins à mon avis, que l'espece d'analyse algébrique très compliquée dont il a fait usage pour construire les formules de la table VII, expose plus à des erreurs que l'analyse trigonométrique que j'ai adoptée dans cet Ouvrage, employée sui-

vant les regles que j'ai données (459). On peut comparer ces deux méthodes relativement à la formule (VII. 17°) : pour la construire par le moyen de l'analyse algébrique en question, il faut considérer treize lignes dans l'intérieur de la sphere, et les distribuer dans quatre analogies : il est aisé de juger combien dès-lors la figure et le calcul doivent être compliqués ; et l'on peut voir combien l'une et l'autre sont simples dans la méthode que j'ai suivie (470). Aussi ai-je omis presque entierement dans ce Traité la considération des lignes intérieures de la sphere, qui ne m'a paru fournir que des solutions pénibles, du moins pour les problêmes que j'ai rencontrés.

L'exemple suivant démontrera encore que dans le triangle dont il s'agit, Exemp. IV et V, l'angle D est réellement obtus, ainsi que nous l'avons trouvé en faisant usage des regles de la table IX.

502. Exemple VI. Connoissant AB = 71° 30′, AD = 41° 9′, A = 27° 8′, cherchons à la fois les deux autres angles du triangle ABD, au moyen des formules très expéditives de Neper (IX. 2°).

$\frac{1}{2}$A = 13° 34′, $\frac{1}{2}$(AB + AD) = 56° 19′ 30″, $\frac{1}{2}$(AB — AD) = 15° 10′ 30″. J'observe de plus, qu'en vertu de la regle (413), D doit être > B ; et je fais le calcul comme il suit :

log.cot.$\frac{1}{2}$A =	0,617425		0,617425
log.sin.$\frac{1}{2}$(AB — AD) =	9,417917	log.cos.	9,984586
compl.log.sin.$\frac{1}{2}$(AB+AD) =	0,079774 . .	compl.log.cos.	0,256113
log.tang.$\frac{1}{2}$(D — B) =	0,115116 :	log.tang.$\frac{1}{2}$(D+B) =	0,858124

Donc $\frac{1}{2}$(D + B) = 82° 6′ 25″, 4
$\frac{1}{2}$(D — B) = 52 30 22 ,0
Donc D = 134 36 47 ,4
et B = 29 36 3 ,4 ;

résultat qui prouve la précision des regles employées dans l'exemple V. S'il y a un dixieme de seconde de différence entre les calculs des exemples V et VI, c'est que nous avons pris les logarithmes avec six décimales seulement ; avec une seule décimale de plus, les deux calculs donneroient absolument la même valeur pour l'angle D.

CHAPITRE XVII.

Résolution des Triangles sphériques par la Regle et le Compas.

503. L'INVENTION des logarithmes a rendu la résolution des triangles si précise et si prompte, que les Géometres ne tiennent plus aucun compte, pour ainsi dire, des opérations graphiques, sujettes à des erreurs de plusieurs minutes, quelque attention, quelque soin qu'on y apporte. Cependant comme cette espece de solutions peut être utile dans certains cas qui n'exigent pas une exactitude rigoureuse, ou pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec le calcul, je ne laisserai pas de les indiquer en peu de mots, et sans faire usage de la méthode des projections, pour mettre ces solutions à la portée d'un plus grand nombre de Lecteurs.

Soient donnés les trois côtés d'un triangle sphérique ABC; par exemple AB de $71°\frac{1}{2}$, AC de $41°\frac{1}{4}$, et BC de $37°\frac{1}{2}$. On demande la valeur de l'angle C.

Fig.58 Décrivez un cercle entier *nac*M, le plus grand qu'il sera possible; puis, au moyen d'un rapporteur, ou de l'échelle des cordes d'un compas de proportion, ou par tel autre moyen que vous voudrez, coupez, sur la circonférence du cercle décrit, et d'un point *c* pris à volonté sur cette circonférence, les arcs *cb*, *ca* respectivement égaux aux côtés donnés BC, AC qui comprennent l'angle cherché. Marquez de même, du côté opposé, un arc *c*M égal à l'un quelconque des côtés *cb*, *ca*, par exemple à *cb*, et menez la corde M*b*. Alors de l'extrémité *a* de l'autre *ca* de ces mêmes côtés, marquez les arcs *an*, *a*N égaux chacun au troisieme côté donné AB; menez la corde *n*N qui coupera (398, 399) l'autre corde *b*M en un point comme P. Enfin prenez la moitié MD de cette derniere, du point D décrivez le demi-cercle MR*b*, élevez jusqu'à sa rencontre la perpendiculaire PR, et menez le rayon RD: l'angle

l'angle *b*DR sera égal à l'angle cherché C. Cet angle *b*DR se mesure ensuite ou avec le rapporteur ou avec l'échelle des cordes, en ayant égard à la valeur du rayon DR, ou de telle autre maniere qu'on voudra.

Actuellement si on veut avoir l'angle A opposé au côté BC = *bc*, il suffit de prendre la moitié de N*n*, et de couper l'autre corde M*b* en décrivant un arc d'un rayon égal à cette moitié, et du point R pour centre. En supposant que E soit le point de la section, l'on menera la ligne RE, et l'on aura DER égal à l'angle cherché A.

Si l'on vouloit l'angle B, il faudroit changer la construction, et faire, pour déterminer cet angle, toutes les opérations que nous avons faites pour trouver l'angle C.

Nous verrons bientôt que la construction de la figure 58 suffit pour résoudre tous les cas non douteux des triangles sphériques. Il est donc à propos d'expliquer les principes de cette construction.

504. Si l'on conçoit que le demi-segment *c*D*b* fasse une révolution autour de la droite D*c*, la base de la calotte sphérique engendrée par cette révolution, sera un cercle ayant M*b* pour diametre, *c* pour pôle, et D pour centre. La demi-circonférence de ce cercle sera donc MR*b* et appartiendra à la surface de la sphere. De plus on peut toujours concevoir un grand cercle M*an* perpendiculaire au plan du demi-cercle MR*b*, et dont M*b* soit une corde. Enfin supposons un petit cercle décrit (384) sur la surface de la sphere, du pôle *a* et de l'intervalle de l'arc *an* = *a*N ; N*n* sera évidemment le diametre de ce cercle. Or les diametres M*b*, N*n* se coupant en un point P, il faut que les circonférences auxquelles ils appartiennent respectivement, se coupent en un point R; le point P ne pouvant être commun aux diametres, que l'ordonnée PR ne soit commune aux circonférences. Si donc *an* est la distance du point R au point *a* sur la surface de la sphere, et *cb* la distance du point *c* au point R, que l'on conçoive un triangle *ac*R sur la surface de la sphere, et on reconnoîtra que par la construction il est égal au triangle donné ABC. L'angle cherché C est l'angle *ac*R, qui est

Fig.58 du même nombre de degrés (394) que l'arc de parallele bR. Mais bR = D : donc D = C, comme il falloit le démontrer.

Considérons maintenant que dans le triangle rectiligne RDE, ER : DR :: sin.D : sin.DER, (49). Mais par construction ER = $\frac{1}{2}$Nn = sin.an (18) = sin.AB ; de même DR = $\frac{1}{2}$Mb = sin.cb = sin.BC. De plus nous venons de voir que D = C. Donc l'analogie devient sin.AB : sin.BC :: sin.C : sin.DER ; et par conséquent (VII. 1°), DER = A ; comme nous l'avons avancé (503).

505. Nous avons vu (503) comment, connoissant les trois côtés, on trouve un angle. *Si les données étoient les trois angles,* on auroit par la même construction la valeur d'un côté, en faisant usage du triangle supplémentaire, c'est-à-dire en employant le supplément à 180°, de chacun des angles donnés. Pour cet effet on nommera BC l'angle A, AC l'angle B, et AB l'angle C, (440). Alors si le côté cherché est, par exemple, BC, on cherchera, au lieu de ce côté, l'angle A, dont le supplément sera la valeur du côté cherché BC.

506. *Si deux côtés et l'angle compris étoient donnés*, on trouveroit le troisieme côté et l'un quelconque des deux autres angles, de la maniere suivante :

Sur la circonférence *nac*M on prendroit deux arcs cb, ca, égaux aux côtés donnés : nommant cb le côté opposé à l'angle cherché, on tireroit (503) la corde Mb, et de l'extrémité a de l'autre côté ca, le rayon am, m étant le centre du cercle *nac*M. Sur Mb on décriroit le demi-cercle MRb, dont on prendroit, du côté des arcs cb, ca, un arc bR égal à l'angle donné. Enfin abaissant du point R la perpendiculaire RP, menant le rayon DR, et faisant passer par le point P une corde Nn perpendiculaire à am, on auroit aN ou an pour la mesure du côté inconnu dans le triangle proposé.

Prenant ensuite la ligne RE égale à la moitié de Nn, (503), on auroit DER égal à l'angle cherché.

Toutes ces opérations sont évidemment fondées sur la construction (503).

507. *Si les données sont deux angles et le côté compris*, on aura le troisieme angle et l'un quelconque des deux autres côtés, en prenant les suppléments des angles et du côté donnés, moyen déjà employé (505), et en résolvant le triangle de la maniere indiquée (506). Le supplément du côté qu'on trouvera sera l'angle cherché; le supplément de l'angle qu'on trouvera sera le côté cherché.

508. Je ne parlerai pas de la maniere de résoudre le triangle, lorsque les données sont deux côtés et un angle opposé, ou deux angles et un côté opposé : 1°. parceque ce sont les cas douteux; 2°. parceque, dans la pratique, ces cas se rencontrent moins fréquemment; 3°. parce que leur solution graphique est beaucoup plus laborieuse que les précédentes, et que, pour ces cas, je ne crois pas que ce genre de solution puisse jamais être préféré au calcul numérique qui, pour la solution quelconque d'un triangle sphérique, n'exige jamais plus de cinq minutes de temps, si l'on ne tient compte que des degrés et minutes de degrés, et qui atteint toujours à une précision bien supérieure à celle qu'on peut obtenir avec la regle et le compas.

CHAPITRE XVIII.

Comparaison des Triangles sphériques aux Triangles rectilignes.

509. 1°. Nous comparerons le triangle sphérique au triangle rectiligne formé par les cordes des arcs ou côtés du premier; comparaison qui peut-être n'a pas encore été faite, mais qui me paroît

n'être pas déplacée dans un Traité sur les deux Trigonométries rectiligne et sphérique.

2°. Il est très usité et très commode de résoudre comme rectilignes les petits triangles sphériques rectangles; or nous déterminerons pour tous les cas les limites auxquelles cette méthode peut s'étendre, au moyen d'une correction facile; ce qui nous donnera lieu de comparer entre elles les formules des Trigonométries rectiligne et sphérique.

3°. En nous occupant de cette recherche, nous avons trouvé que, dans le cas où l'un des côtés de l'angle droit est un arc de petit cercle, ainsi qu'il arrive le plus souvent en Astronomie, l'erreur sur l'angle droit, à laquelle je crois qu'on n'a pas fait attention jusqu'ici, peut influer sensiblement sur les résultats. Nous indiquerons les moyens d'éviter cette erreur.

510. La différence de l'arc à sa corde peut se déterminer d'une maniere aussi approchée qu'on le voudra par le moyen de la derniere équation (152). Si les arcs sont petits, ces différences sont, à très peu près, proportionnelles aux cubes des arcs, ainsi qu'on le trouve en se bornant au premier terme du second membre de cette équation. Pour l'arc de 1°, la différence est 0″, 04569, et son logarithme est 8,6598; auquel ajoutant le triple du log. d'un arc quelconque (pourvu qu'il n'excede pas 8°) exprimé en degrés et décimales de degrés, on aura le logarithme de la différence exacte de cet arc à sa corde en secondes et dixiemes de seconde. On peut encore multiplier par R°, ou par R′, ou par R″, (262), le double du sinus de la moitié d'un arc quelconque (18); on aura la valeur de la corde en degrés, ou en minutes, ou en secondes: et cette valeur, comparée à celle de l'arc, donnera la différence cherchée.

511. Pour déterminer la différence des angles sphériques aux angles rectilignes, proposons-nous de résoudre le problême suivant:

Dans un triangle sphérique quelconque, connoissant deux côtés et l'angle compris, trouver l'angle rectiligne correspondant. (J'en-

tends par *angle correspondant*, l'angle formé par les cordes des deux côtés donnés).

Soit ABC un triangle sphérique, et *abc* le triangle formé par les cordes des trois arcs. Le triangle sphérique donne (VII. 26°), cos.BC = cos.A sin.AB sin.AC + cos.AB cos.AC, ou (I. 22°), $1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2}BC = \cos.A \sin.AB \sin.AC + (1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2}AB)(1 - 2\sin.^2 \frac{1}{2}AC)$. Donc $2\sin.^2 \frac{1}{2}AB + 2\sin.^2 \frac{1}{2}AC - 2\sin.^2 \frac{1}{2}BC = \cos.A \sin.AB \sin.AC + 4\sin.^2 \frac{1}{2}AB \sin.^2 \frac{1}{2}AC$. Le triangle *abc* donne (III. 25°), $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \times ac \cos.a$. Mais $bc = 2\sin.\frac{1}{2}BC$, (18). En transformant ainsi les autres cordes, l'équation devient $4\sin.^2 \frac{1}{2}BC = 4\sin.^2 \frac{1}{2}AB + 4\sin^2 \frac{1}{2}AC - 8\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AC \cos.a$, ou $2\sin.^2 \frac{1}{2}AB + 2\sin.^2 \frac{1}{2}AC - 2\sin.^2 \frac{1}{2}BC = 4\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AC \cos.a$. Substituant la valeur du premier membre, trouvée ci-dessus, j'aurai $\cos.A \sin.AB \sin.AC + 4\sin.^2 \frac{1}{2}AB \sin.^2 \frac{1}{2}AC = 4\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AC \cos.a$. En divisant par $4\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AC$, et observant que $\sin.AB \sin.AC = 4\sin.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AC \cos.\frac{1}{2}AC$, (I. 6°), je trouve une formule très simple pour la solution générale du problême proposé, et j'ai Fig. 59

$$(A)\ldots \cos.a = \cos.A \cos.\tfrac{1}{2}AB \cos.\tfrac{1}{2}AC + \sin.\tfrac{1}{2}AB \sin.\tfrac{1}{2}AC.$$

De cette formule il est aisé de conclure 1°. que l'angle sphérique droit ou obtus, est toujours plus grand que l'angle rectiligne correspondant; 2°. que l'angle sphérique aigu est moindre que l'angle rectiligne correspondant, lorsqu'on a $\cos.A > \frac{\sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AC}{1 - \cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}AC}$.

512. De la formule (A) on passe aisément à la solution du problême inverse.

Dans un triangle rectiligne abc, *connoissant deux côtés et l'angle compris, trouver l'angle des deux arcs* AB, AC, *dont les deux côtés donnés seroient les cordes.*

La formule (I. 18°) donne $\cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}AC = \sqrt{(1 - \sin.^2 \frac{1}{2}AB)(1 - \sin.^2 \frac{1}{2}AC)}$: on a d'ailleurs $\sin.\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}ab$, et $\sin.\frac{1}{2}AC$

Fig. 59 $= \frac{1}{2}ac$. Substituons ces valeurs dans l'équation (A), et nous aurons

(B)... $\cos.A = \frac{\cos.a - \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}ac}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}ab)(1 + \frac{1}{2}ab)(1 - \frac{1}{2}ac)(1 + \frac{1}{2}ac)}}$.

Pour calculer cette formule, il faut que les valeurs des côtés ab, ac soient telles qu'ils puissent être cordes d'un cercle ayant l'unité pour rayon. C'est ce qu'on obtiendra facilement en divisant les valeurs des côtés, données en pieds ou toises ou autres mesures, par une puissance de 10, telle qu'aucun côté n'excede 2, valeur de la plus grande corde, quand on suppose $R = 1$.

513. Si $AB = AC$, et que par conséquent $ab = ac$, les formules (A), (B) se réduisent aux suivantes (C), (D). En effet, dans ce cas, $\cos.a = \cos.A \cos.^2\frac{1}{2}AB + \sin.^2\frac{1}{2}AB$, et par conséquent (I. 22e, 3e), $1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}a = (1 - 2\sin.^2\frac{1}{2}A)\cos.^2\frac{1}{2}AB + 1 - \cos.^2\frac{1}{2}AB$; équation de laquelle on tire

(C)... $\sin.\frac{1}{2}a = \sin.\frac{1}{2}A \cos.\frac{1}{2}AB$.

Mais $\cos.\frac{1}{2}AB = \sqrt{(1 - \sin.^2\frac{1}{2}AB)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4}ab^2)}$. Donc

(D)... $\sin.\frac{1}{2}A = \frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}ab)(1 + \frac{1}{2}ab)}}$.

La formule (C) fait voir que l'angle vertical d'un triangle sphérique isoscele est toujours plus grand que l'angle rectiligne correspondant.

514. Enfin si $A = 90°$, les formules (A), (B) donnent

(E)... $\cos.a = \sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}ab \times \frac{1}{2}ac$.

Toutes les formules que nous venons de donner sont générales et rigoureuses, quelle que soit la grandeur du triangle. Mais si un triangle sphérique rectangle est petit, on pourra mettre les arcs au lieu des sinus dans la formule (E); et comme $\cos.a = \sin.(90° - a) = 90° - a$, le petit excès de l'angle droit sphérique sur l'angle rectiligne correspondant, sera donné en secondes par la formule suivante, qui suppose les arcs AB, AC pris en secondes:

(F)... $90° - a = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}AC}{R''}$.

Quand la somme des côtés seroit de 10°, l'erreur qu'occasionneroit cette formule ne seroit pas d'une seconde.

Si l'hypothénuse n'excede pas 1° 30′, on peut mettre BC sin.C au lieu de AB, et BC cos.C au lieu de AC, (213, 11°, 12°); ce qui donne $AB \times AC = BC^2 \sin.C \cos.C = \frac{1}{2} BC^2 \sin.2(90° - B) = \frac{1}{2} BC^2 \sin.2B$; de sorte que la différence cherchée se trouve aussi par la formule suivante :

$$(G)\ldots\ 90° - a = \frac{(\frac{1}{2}BC)^2 \sin.2C}{2R''} = \frac{(\frac{1}{2}BC)^2 \sin.2B}{2R''}.$$

Si BC = 1° 30′, et que B = C = 45° à-peu-près, on trouve $90° - a = 17'', 7$.

515. En supposant encore que l'hypothénuse n'excede pas 1° 30′, considérons les angles obliques B, C.

La formule (A) appliquée à l'angle B, par exemple, donne $\cos.b = \cos.B \cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC + \sin.\frac{1}{2}AB \sin.\frac{1}{2}BC$. Mais $\cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC = (1 - 2\sin.^2\frac{1}{4}AB)(1 - 2\sin.^2\frac{1}{4}BC) = 1 - 2\sin.^2\frac{1}{4}AB - 2\sin.^2\frac{1}{4}BC$, en négligeant la quantité $4\sin.^2\frac{1}{4}AB \sin.^2\frac{1}{4}BC$, qui dans notre hypothese est absolument insensible. Substituant la derniere valeur de $\cos.\frac{1}{2}AB \cos.\frac{1}{2}BC$, et mettant les arcs au lieu des sinus, on a $\cos.b = \cos.B - \frac{1}{8}\cos.B\,(AB^2 + BC^2) + \frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}BC$. Dans le dernier terme on peut mettre, sans erreur sensible, BC cos.B au lieu de AB : donc $\cos.b - \cos.B = \frac{1}{8}\cos.B\,(BC^2 - AB^2) = \frac{1}{8}AC^2 \cos.B$. De plus (II. 23°), $\cos.b - \cos.B = 2\sin.\frac{1}{2}(B - b) \sin.\frac{1}{2}(B + b) = (B - b) \sin.B$, attendu l'extrême petitesse de $B - b$. Donc on aura, pour la différence de l'angle sphérique oblique à l'angle rectiligne correspondant,

$$(H)\ldots\ B - b = \frac{(\frac{1}{2}AC)^2 \cot.B}{2R''}.$$

Et comme $AC \cot.B = AB$, (213, 5°), on aura aussi

$$(K)\ldots\ B - b = \frac{\frac{1}{2}AB \times \frac{1}{2}AC}{2R''}.$$

516. La même méthode donneroit pour $C - c$ la même valeur (K) que pour $B - b$, valeur qui est visiblement la moitié de celle

donnée par la formule (F). Donc 1°. quelque différents en grandeur que soient les angles obliques d'un petit triangle sphérique rectangle, ils excedent chacun d'une même quantité l'angle rectiligne qui correspond à chacun d'eux respectivement; 2°. la somme des deux excès est égale à l'excès de l'angle droit sur l'angle rectiligne correspondant. D'où l'on doit conclure que l'une, à volonté, des formules (F), (G), (H), (K) suffit seule pour déterminer la différence de chacun des trois angles d'un petit triangle sphérique rectangle à l'angle rectiligne qui correspond respectivement à chacun d'eux.

517. Les formules que nous avons données jusqu'à présent font connoître la différence d'un angle sphérique à l'angle rectiligne correspondant, différence constante dans un triangle donné. Mais quand on résout un triangle sphérique par les formules de la Trigonométrie rectiligne, l'erreur que l'on commet alors sur les angles est d'une autre espece, et ne me paroît pas devoir être appellée *la différence* de l'angle sphérique à l'angle rectiligne, puisque dans un même triangle l'erreur varie pour un même angle, selon qu'on emploie pour le déterminer telles ou telles autres parties du triangle. M. de la Lande (*Mémoires Acad.* 1763) a déterminé l'erreur sur les angles obliques d'un petit triangle sphérique rectangle trouvés par le moyen des deux côtés et par les formules de la Trigonométrie rectiligne : nous suivrons les traces de ce célebre Astronome pour rechercher les erreurs qui se commettent dans tous les cas, lorsqu'on se sert des formules de la Trigonòmétrie rectiligne pour résoudre les petits triangles sphériques rectangles. Cette recherche, la seconde de celles que nous avons pour but (509) dans ce Chapitre, nous donnera un nouveau moyen très commode pour obtenir les petits arcs avec une précision très grande, et fort supérieure à celle qu'on peut espérer par les formules ordinaires, en se servant des tables de logarithmes à sept décimales.

518. *Dans un triangle sphérique* ABC *rectangle en* A, *connoissant l'hypothénuse* BC, que je suppose ne pas excéder 4°, *et*

un

un angle, par exemple B, *trouver l'erreur* e *que l'on commet en cherchant par la Trigonométrie rectiligne le côté opposé* AC.

La Trigonométrie sphérique donne sin.AC = sin.BC sin.B. Donc (149), (W), AC $-\frac{1}{6}$AC^3 = sin.B (BC $-\frac{1}{6}$BC^3). Les quantités du 5e ordre, et à plus forte raison celles des ordres supérieurs, sont négligées dans cette transformation, parce que la 5e puissance d'un arc de 4°, divisée par 120, ne vaut pas 0″, 01. On a donc AC = BC sin.B $-\frac{1}{6}$(BC^3 sin.B $-$ AC^3). Par la Trigonométrie rectiligne on a AC = BC sin.B : cette formule donne donc le côté AC trop grand de la quantité $\frac{1}{6}$(BC^3 sin.B $-$ AC^3). Mais, toujours en négligeant les quantités du 5e ordre, l'avant-derniere équation élevée au cube, donne AC^3 = BC^3 sin.^{3}B. Donc e = $-\frac{1}{6}$BC^3 sin.B (1 $-$ sin.^{2}B) : et pour avoir cette erreur en secondes, (nous supposons toujours les côtés pris en secondes),

$$e = -\text{ BC sin.B} \times \frac{\text{BC}^2 \cos.^2\text{B}}{6\,\text{R}''\text{R}''}.$$

Si BC = 4°, et que B = 55° 16′, ce qui est le cas de la plus grande valeur (141) de sin.B cos.^{2}B, on trouve e = $-$ 4″, 50.

On observera (et cette réflexion s'applique de même à tous les problêmes qui suivent) combien il seroit facile ou de former une table de cette erreur, ou de trouver l'erreur dans chaque cas particulier. Car en calculant BC sin.B on a déjà eu occasion de prendre le log. de BC; de plus on sait ordinairement les logarithmes de 6 et de R″, attendu l'usage fréquent qu'on en fait dans le calcul; et il suffit de les employer avec quatre décimales, de même que celui de cos.B. Peut-être en coûteroit-il moins de travail que de chercher par les parties proportionnelles les logarithmes de sin.BC et de sin.AC, en résolvant le triangle comme sphérique; et peut-être cette derniere méthode ne donneroit-elle jamais les centiemes de seconde aussi exactement qu'on les auroit par les logarithmes des nombres, à sept décimales, dans le calcul de l'équation AC = BC sin.B.

519. Les données étant les mêmes que dans le problême précédent, *trouver le côté adjacent* AB.

Puisque (430, 2°), tang.AB = cos.B tang.BC, on aura (153), (U), $AB + \frac{1}{3}AB^3 = \cos.B\,(BC + \frac{1}{3}BC^3)$; et par conséquent $AB = BC\cos.B + \frac{1}{3}(BC^3\cos.B - AB^3)$. Donc $e = \frac{1}{3}BC^3(1 - \cos.^2B)\cos.B$, ou

$$e = BC\cos.B \times \frac{BC^2\sin.^2B}{3R''R''}.$$

Cette erreur est en sens contraire de la précédente. La table de l'erreur de AC, (518), donneroit aussi celle de AB, en adoptant pour argument (90° — B) au lieu de B, et prenant le double de l'erreur donnée par la table.

520. Les données étant toujours les mêmes, *trouver l'angle* C.

Puisque (230, 3°), cot.C = cos.BC tang.B = tang.B $(1 - \frac{1}{3}BC^2)$, (154), (Y), si on fait $C = 90° - B + e$, on aura cot.C = tang.(B — e) : et par conséquent tang.B — tang.(B — e) $= \frac{1}{3}BC^2$ tang.B $= \frac{\sin.e}{\cos.B\,\cos.(B-e)}$, (II. 24°). Mettant cos.B au lieu de cos.(B — e), et e au lieu de sin.e, on aura

$$e = (\tfrac{1}{2}BC)^2 \times \frac{\sin.2B}{R''}.$$

Cette formule est très commode, puisqu'elle suffit seule pour faire connoître la valeur de C. Il est vrai qu'elle n'est pas propre à donner les centiemes de secondes, lorsque BC est $> 1° 30'$: mais on aura bien rarement un dixieme de seconde d'erreur lorsque BC sera $< 3°$.

521. *Connoissant l'hypothénuse* BC $< 3°$, *et un côté*, par exemple AB, *trouver l'angle opposé* C.

On a (230, 9°), $\sin.C = \frac{\sin.AB}{\sin.BC} = \frac{AB - \frac{1}{6}AB^3}{BC - \frac{1}{6}BC^3} = \frac{AB}{BC} \times \frac{1 - \frac{1}{6}AB^2}{1 - \frac{1}{6}BC^2}$. Nommant C — e la valeur que donne la Trigonométrie rectiligne pour l'angle cherché, on aura sin.C — sin.(C — e) $= \frac{AB}{BC}\left(\frac{1 - \frac{1}{6}AB^2}{1 - \frac{1}{6}BC^2} - 1\right) = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC^2 - AB^2}{6 - BC^2} = 2\sin.\frac{1}{2}e\cos.(C - \frac{1}{2}e)$, (II. 22°); et, en négligeant les quantités insensibles, e =

$\frac{AB(BC^2 - AB^2)}{6BC \times \cos.C} = \frac{1}{6}AB \times AC$, (213; 14°, 12°). Pour former une table, on auroit donc

$$e = \frac{AB}{6R''} \times \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}.$$

Mais la formule suivante

$$e = \frac{AB \times BC \cos.C}{6R''}$$

seroit plus commode pour corriger l'angle C, après l'avoir déterminé par la formule $\sin.C = \frac{AB}{BC}$.

Cette erreur est trois fois plus petite que celle que nous avons trouvée (520) pour le même angle C, l'hypothénuse et l'autre angle étant donnés. Il est facile de comparer les deux valeurs de e, en mettant dans la derniere formule BC cos.B au lieu de AB, et sin.B au lieu de cos.C. Je suis donc fondé dans ce que j'ai avancé (517).

522. Les données étant les mêmes, *trouver l'angle adjacent* B.

La Trigonométrie sphérique donne cos.B = cot.BC tang.AB; et la rectiligne, $\cos.(B - e) = \frac{AB}{BC}$. Donc $\cos.(B - e) - \cos.B = \frac{AB}{BC} - \frac{AB + \frac{1}{3}AB^3}{BC + \frac{1}{3}BC^3} = \frac{AB}{BC}\left(1 - \frac{3 + AB^2}{3 + BC^2}\right) = \frac{AB}{BC} \times \frac{BC^2 - AB^2}{3 + BC^2} = e \times \sin.B$, (II. 23°). Et par conséquent $e = \frac{AB}{BC \times \sin.B} \times \frac{AC^2}{3 + BC^2} = \frac{1}{3}AB \times AC$, (213, 10°), en négligeant dans le dénominateur le terme BC^2, qui, en effectuant la division, ne donneroit que des quantités d'ordres supérieurs au troisieme. L'erreur, dans ce cas, est donc le double de celle produite (521) dans la détermination de l'angle C; d'où il suit que les mêmes formules serviront pour l'un et l'autre angle. Cependant pour avoir, dans le problême présent, la valeur de e avec le plus grand degré d'exactitude qu'on puisse attendre des tables dans la valeur de $(B - e)$ au moyen de la formule $\cos.(B - e) = \frac{AB}{BC}$, il faut que l'hypothénuse n'excede pas deux degrés.

523. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté* AC.

Puisque cos.BC = cos.AB cos.AC, on aura, en négligeant les quantités du 6e ordre, $1 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{24}BC^4 = (1 - \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{24}AB^4)(1 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AC^4) = 1 - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{24}AB^4 + \frac{1}{24}AC^4 + \frac{1}{4}AB^2 \times AC^2$. Réduisant, multipliant par 2, et transposant, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 + \frac{1}{12}BC^4 - \frac{1}{12}AB^4 - \frac{1}{12}AC^4 - \frac{1}{2}AB^2 \times AC^2$. Mais, toujours en négligeant les quantités du 6e ordre, cette équation élevée au quarré, donne $BC^4 = AB^4 + 2AB^2 \times AC^2 + AC^4$. Donc, en substituant cette valeur de BC^4 dans l'équation qui vient de nous donner celle de BC^2, on aura $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2$, ou $\sqrt{(BC^2 - AB^2)} = AC\sqrt{(1 - \frac{1}{3}AB^2)}$. En développant ce dernier binôme, et négligeant les quantités du 5e ordre, on a $AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)} + \frac{1}{6}AB^2 \times AC$. Et par conséquent

$$e = \frac{AB^3}{6R''R''} \times \sqrt{(BC - AB)(BC + AB)}.$$

Cette formule donne les centiemes de secondes, quand l'hypothénuse n'excede pas 4°.

Comme ce problême est d'un usage fréquent, nous croyons devoir observer que quand on a calculé la valeur de AC par la formule (213, 14e), il ne reste plus, pour avoir la correction de cette valeur, qu'à la multiplier par $\frac{AB^2}{6R''R''}$.

524. *Connoissant un côté et l'angle opposé*, par exemple AC et B, *trouver l'autre angle* C.

Puisque $\sin.C = \frac{\cos.B}{\cos.AC}$, si on fait $C = 90° - B + e$, on aura $\cos.(B - e) = \frac{\cos.B}{\cos.AC} = \cos.B \times (1 - \frac{1}{2}AC^2)^{-1} = \cos.B + \frac{1}{2}AC^2 \cos.B$, en négligeant les quantités du 4e ordre. Et par conséquent $\cos.(B - e) - \cos.B = \frac{1}{2}AC^2 \cos.B = e \sin.B$, (II. 23e). Donc

$$e = \frac{AC^2 \times \cot.B}{2R''}.$$

Cette formule donne les centiemes de secondes, quand la somme

des côtés, ou (AC + AC cot.B), n'excede pas 2° 40′. Si on vouloit former une table de cette précision, même pour les cas où on auroit (AC + AC cot.B) = 8°, il faudroit se servir de la formule $e = \frac{AC^2 \cot.B}{2R''}\left(1 + \frac{5\,AC^2}{12\,R''\,R''}\right) + \frac{e^2 \cot.B}{2R''}$, en employant dans le dernier terme la valeur de e tirée du premier terme seulement.

525. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté* AB.

Puisque sin.AB = cot.B tang.AC, on aura $AB - \frac{1}{6}AB^3 = \cot.B\,(AC + \frac{1}{3}AC^3)$: donc $AB = AC \times \cot.B + \frac{1}{3}AC^3 \cot.B + \frac{1}{6}AB^3$. Et par conséquent $e = \frac{1}{3}AC^3 \cot.B + \frac{1}{6}AC^3 \cot.^3B$, ou

$$e = AC \times \cot.B \times \frac{AC^2}{3R''\,R''}\,(1 + \tfrac{1}{2}\cot.^2B).$$

Cette formule et la suivante donnent les centiemes de seconde, lorsqu'on a (AC + AC cot.B) < 8°.

526. Les données étant les mêmes, *trouver l'hypothénuse* BC.

La seconde équation (518) donne $BC = \frac{AC}{\sin.B} + \frac{1}{6}\left(BC^3 - \frac{AC^3}{\sin.B}\right)$. Et par conséquent $e = \frac{1}{6}\left(BC^3 - \frac{AC^3}{\sin.B}\right) = \frac{AC^3}{6\sin.B}\left(\frac{1}{\sin.^2B} - 1\right)$, ou

$$e = \frac{AC}{\sin.B} \times \frac{AC^2 \cot.^2B}{6R''\,R''}.$$

527. *Connoissant un côté et l'angle adjacent*, par exemple AB et B, *trouver l'angle opposé* C.

Cos.C = sin.B cos.AB = sin.B $(1 - \frac{1}{2}AB^2)$. Soit C = 90° − B + e ; on aura sin.B − sin.(B − e) = $\frac{1}{2}AB^2$ sin.B = $e \times$ cos.B, (II. 22ᵉ). Donc

$$e = \frac{AB^2 \tan.B}{2R''}.$$

Cette formule donne les centiemes de seconde, quand on a (AB + AB tang.B) < 2° 40′; limite qui s'étendra jusqu'à 8° par la formule suivante, $e = \frac{AB^2 \tan.B}{2R''}\left(1 - \frac{AB^2}{12\,R''R''}\right) - \frac{e^2 \tan.B}{2R''}$, dans laquelle la valeur de e, tirée du premier terme, s'emploiera pour le dernier.

528. Les données étant les mêmes, *trouver l'autre côté* AC.

La seconde équation (525) donne $AC = AB \text{ tang.}B - \frac{1}{6}AB^3 \times \text{tang.}B - \frac{1}{3}AC^3$. Donc $e = -\frac{1}{6}AB^3 \text{ tang.}B - \frac{1}{3}AB^3 \text{ tang.}^3B$, ou

$$e = -AB \text{ tang.}B \times \frac{AB^2}{6R''R''}(1 + 2 \text{ tang.}^2B).$$

Cette formule donne les centiemes de seconde, quand on a $(AB + AB \text{ tang.}B) < 8^\circ$.

529. Les données étant les mêmes, *trouver l'hypothénuse* BC.

La 3e équation (519) donne $BC = \frac{AB}{\cos.B} - \frac{1}{3}\left(BC^3 - \frac{AB^3}{\cos.B}\right)$. Donc $e = -\frac{1}{3}\left(\frac{AB^3}{\cos.^3B} - \frac{AB^3}{\cos.B}\right) = -\frac{AB^3}{3\cos.B}\left(\frac{1}{\cos.^2B} - 1\right)$, ou

$$e = -\frac{AB}{\cos.B} \times \frac{AB^2 \text{ tang.}^2B}{3R''R''}.$$

La limite est la même que (528).

530. *Connoissant deux côtés*, AB, AC, dont la somme n'excede pas 4°, *trouver un des angles*, par exemple B.

La Trigonométrie sphérique donne $\text{tang.}B = \frac{\text{tang.}AC}{\sin.AB}$; et la rectiligne, $\text{tang.}(B - e) = \frac{AC}{AB}$. Donc $\text{tang.}B - \text{tang.}(B - e) = \frac{AC}{AB}\left(\frac{1 + \frac{1}{3}AC^2}{1 - \frac{1}{6}AB^2} - 1\right) = \frac{AC}{AB} \times \frac{2AC^2 + AB^2}{6 - AB^2} = \frac{e}{\cos.^2B}$, (II.24e). Négligeant dans le dénominateur le terme AB^2, qui ne donneroit, dans la division, que des quantités d'ordres supérieurs au troisieme, et mettant $\frac{AB^2}{BC^2}$ au lieu de $\cos.^2B$, et BC^2 au lieu de $AC^2 + AB^2$, on aura $e = \frac{1}{6}AB \times AC \times \frac{BC^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{1}{6}AB \times AC\left(1 + \frac{AC^2}{BC^2}\right)$, ou

$$e = \frac{AB \times AC}{6R''}(1 + \sin.^2B).$$

531. *Connoissant deux côtés*, AB, AC, dont la somme n'excede pas 8°, *trouver l'hypothénuse* BC.

Nous avons eu (523), $BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2$. Donc $BC = \sqrt{\left(\overline{AB^2 + AC^2} - \frac{1}{3}AB^2 \times AC^2\right)}$; et, en développant le second membre par le binôme de Newton et négligeant les

quantités du 5e ordre, $BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2)} - \frac{AB^2 \times AC^2}{6\sqrt{(AB^2 + AC^2)}}$; et par conséquent

$$e = -\frac{'AB^2 \times AC^2}{6R''R''\sqrt{(AB^2 + AC^2)}}.$$

Comme ce problême se présente très fréquemment, je donne ici le logarithme constant $8,59300 = \log. \frac{1}{6R''R''}$.

Pour donner un exemple de l'utilité de notre formule, soient $AB = 4° 1' 13''$, $AC = 3° 55' 17''$; on trouvera, en se servant des logarithmes à sept décimales, $\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = 5° 36' 57'',75$. Donc $\log. - e = 8,59300 + 2\log.AB + 2\log.AC - \log.\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = 0,90787$; et par conséquent $e = -8'',09$, et l'hypothénuse cherchée $BC = 5° 36' 49'',66$, valeur approchée à moins d'un centieme de seconde. La formule ordinaire, $\cos.BC = \cos.AB \cos.AC$, ne donne pas même les secondes exactement, quand BC est $< 4°$, et l'erreur qu'elle produit est d'autant plus grave que BC est plus au-dessous de 4°.

L'expression $\sqrt{(AB^2 + AC^2)}$ se calcule ordinairement par le moyen d'un angle; on a, par exemple, $\text{tang.}B = \frac{AC}{AB}$, puis BC ou $\sqrt{(AB^2 + AC^2)} = \frac{AB}{\cos. B}$. On observera que, dans cette derniere équation, il faut employer l'angle B tel qu'il a été donné par la précédente, sans faire usage de la correction (530). La méthode (200) peut trouver ici son application.

532. *Connoissant les deux angles,* il faut toujours chercher en premier lieu l'hypothénuse par la formule (437); de-là, avec l'hypothénuse et un angle, on pourra trouver les côtés par les formules (518, 519).

533. Les méthodes que nous venons de donner peuvent aussi résoudre un triangle dont un seul côté seroit petit. Soit P le pôle arctique, A l'Observatoire royal de Paris, M la ville de Marseille, ou un point de cette ville, qui ait servi de signal dans les opérations; et soit ME un arc de grand cercle perpendiculaire sur AE. Je suppose que par une chaîne de triangles et par les méthodes (341), Fig. 60

on ait déterminé la distance ME de Marseille au méridien de Paris, de 126210 toises, et la distance AE à la perpendiculaire, de 314131 toises. Nous avons dit (416) que ME se nomme aussi *la différence de longitude* et AE la *différence de latitude* entre les deux points A et M, dont il s'agit : dénominations inexactes et impropres, puisque la différence de longitude est réellement l'angle P, et la différence de latitude l'arc AL, en supposant PL = PM. Mais connoissant ME, AE, on en déduit facilement la valeur de P et celle de AL, pourvu qu'on connoisse la distance de l'un des deux lieux au pôle. En effet soit AP = 41° 9′ 46″; si on réduit AE en degrés et parties de degrés par la proportion (290), on trouve AE = 5° 30′ 4″, 5; et par conséquent PE = 46° 39′ 50″, 5. Dans le triangle PEM rectangle en E, on a (VI. 14°), cot.P = sin.PE cot.ME, ou tang.P = $\frac{\text{tang.ME}}{\text{sin.PE}}$. Donc P + $\frac{1}{3}$P³ = $\frac{\text{ME} + \frac{1}{3}\text{ME}^3}{\text{sin.PE}}$, et P = $\frac{\text{ME}}{\text{sin.PE}}$ (1 + $\frac{1}{3}$ME²) − $\frac{1}{3}$P³. En mettant $\frac{\text{ME}^3}{\text{sin.}^3\text{PE}}$ au lieu de P³, (ce qui suppose qu'on néglige les puissances supérieures à la quatrieme), on a P = $\frac{\text{ME}}{\text{sin.PE}}$ $\left(1 + \frac{1}{3}\text{ME}^2 \times \overline{1 - \frac{1}{\text{sin.}^2\text{PE}}}\right)$, et par conséquent P = $\frac{\text{ME}}{\text{sin.PE}}$ × (1 − $\frac{1}{3}$ME² × cot.²PE). Voici le calcul de cette formule.

log.ME = 126210 toises	=	5,1010938
compl.log.(R = 3271686 tois.)	=	3,4852284
log.(ME en parties de R = 1)	=	8,5863222
log.R″	=	5,3144251
compl.log.sin.PE	=	0,1382613
log. $\frac{\text{ME}}{\text{sin.PE}}$	=	4,0390086 = log.10939″, 78
compl.log.3	=	9,5229
log.ME, comme ci-dessus,	=	8,5863
idem	=	8,5863
log.cot.PE	=	9,9747
idem	=	9,9747
log. − $\frac{\text{ME}^3 \text{ cot.}^2\text{PE}}{3\text{sin.PE}}$	=	0,6839 = log. − 4″, 83

Donc P = 10934″, 95 = 3° 2′ 14″, 95.

Pour

Pour avoir AL ou PM — PA, l'équation ordinaire cos.PM = cos.PE cos.ME me paroît la plus commode.

534. Examinons maintenant le cas qui se rencontre très souvent, où l'un des arcs qui forment l'angle droit est un arc de parallele et par conséquent de petit cercle. Comme, dans les petits triangles, cet arc ne differe pas sensiblement de sa corde pour la longueur, on a coutume de résoudre le triangle en le considérant sans scrupule comme rectiligne rectangle. Mais la vérité est que l'erreur sur l'angle droit peut être très sensible, et qu'elle peut produire sur les parties cherchées du triangle des altérations qu'il me semble qu'on n'a pas encore observées, et qui cependant sont plus considérables que celles dont nous avons parlé jusqu'à présent. C'est ce que nous allons établir, et c'est la troisieme des recherches que nous nous sommes proposées (509).

Dans le petit triangle sphérique BAC, ayant pour l'un de ses côtés un arc ADC de parallele, soit de 90° l'angle BAD; soit P le pôle de l'arc de parallele CDA, et Ca l'arc de grand cercle compris entre les mêmes points. Si on résout le triangle comme rectiligne, c'est dans le fait employer l'arc Ca plutôt que l'arc CDA, puisque le premier est celui qui approche le plus de la ligne droite ou de sa corde (385). Mais l'angle a est d'autant plus au-dessus ou au-dessous de 90°, que la distance au pôle ou l'arc aP est plus au-dessus ou au-dessous de 90°. En effet le triangle isoscele CPa donne (498, 2°), cos.a = tang.$\frac{1}{2}a$C cot.aP. Faisant, comme à notre ordinaire, $e = 90° - a$, on a Fig.61

$$e = \tfrac{1}{2}a\text{C} \times \text{cot.}a\text{P};$$

formule qui donne l'erreur sur l'angle que l'on considere comme droit.

535. Supposant AP $<$ 90°, on aura $a <$ 90°; et il est facile de reconnoître que si on résout le triangle BAC comme rectiligne rectangle, il en résultera diverses erreurs, selon la diversité des données.

Par exemple, soient donnés les côtés AB et ADC en parties de grand cercle (392).

Observons d'abord que dans les petits triangles il est rare que la différence de longueur entre ADC et aC puisse mériter attention. En effet ADC $=$ P $\times$ sin.AP, (394), et sin.$\frac{1}{2}a$C $=$ sin.$\frac{1}{2}$P sin.AP, (498, 1°); égalant les deux valeurs de sin.AP tirées de ces deux équations, on déduit de la nouvelle équation qui en résulte, cette analogie,

$$\text{P} : \text{sin.}\tfrac{1}{2}\text{P} :: \text{ADC} : \text{sin.}\tfrac{1}{2}a\text{C},$$

par le moyen de laquelle on pourra réduire le côté ADC au côté aC. Mais on trouvera leurs différences insensibles dans les cas ordinaires, dans lesquels P n'excede pas 1° 30′.

Prenant donc indifféremment aC au lieu de ADC, soit BaC (fig. 62) le même triangle que celui de la fig. 61 formé par trois
Fig.62 arcs de grand cercle, et soit désigné par a l'angle BaC. Puisque a est $<$ 90°, qu'on éleve du point a l'arc perpendiculaire aM $=$ aB, et qu'on mene l'arc CM. Le triangle CaM est celui qu'on résoudra effectivement, si avec les données aC, aB, on résout BaC comme rectangle. Par conséquent on trouvera l'hypothénuse CM $>$ CB, l'angle MCa $<$ BCa, et CMa différera aussi de CBa. Les erreurs ne seroient plus les mêmes si les données étoient, par exemple, Ba, BC, puisqu'en abaissant l'arc perpendiculaire BN, sensiblement égal à Ba, le triangle qu'on résoudroit en pareil cas seroit BCN.

536. Pour remédier facilement à toutes les erreurs de cette espece, j'observe d'abord que l'on peut sans scrupule supposer NBa $=$ BaM $=$ 90° $-$ a $=$ e. Cela posé, par le moyen de la formule (534), je forme la table suivante des valeurs de e en minutes et dixiemes de minutes, en supposant aC $=$ 1′, et faisant
Fig.61 d'abord la distance au pôle ou AP $=$ 10°, à cause de la variation trop irréguliere des valeurs de e pour de plus petites distances au pôle. Dans le cas de ces moindres distances, il faudroit calculer exprès la formule e $=\frac{1}{2}a$C $\times$ cot.aP, (534).

DIST. au PÔLE.	VALEURS de *e*.	DIST. au PÔLE.	VALEURS de *e*.	DIST. au PÔLE.	VALEURS de *e*.	DIST. au PÔLE.	VALEURS de *e*.
10°	2′, 836	30°	0′, 866	50°	0′, 420	70°	0′, 182
11	2 , 572	31	0 , 832	51	0 , 405	71	0 , 172
12	2 , 352	32	0 , 800	52	0 , 391	72	0 , 162
13	2 , 166	33	0 , 770	53	0 , 377	73	0 , 153
14	2 , 005	34	0 , 741	54	0 , 363	74	0 , 143
15	1 , 866	35	0 , 714	55	0 , 350	75	0 , 134
16	1 , 744	36	0 , 688	56	0 , 337	76	0 , 125
17	1 , 635	37	0 , 664	57	0 , 325	77	0 , 115
18	1 , 539	38	0 , 640	58	0 , 312	78	0 , 106
19	1 , 452	39	0 , 617	59	0 , 300	79	0 , 097
20	1 , 374	40	0 , 596	60	0 , 289	80	0 , 088
21	1 , 303	41	0 , 575	61	0 , 277	81	0 , 079
22	1 , 238	42	0 , 555	62	0 , 266	82	0 , 070
23	1 , 178	43	0 , 536	63	0 , 255	83	0 , 061
24	1 , 123	44	0 , 518	64	0 , 244	84	0 , 052
25	1 , 072	45	0 , 500	65	0 , 233	85	0 , 044
26	1 , 025	46	0 , 483	66	0 , 223	86	0 , 035
27	0 , 981	47	0 , 466	67	0 , 212	87	0 , 026
28	0 , 940	48	0 , 450	68	0 , 202	88	0 , 017
29	0 , 902	49	0 , 435	69	0 , 192	89	0 , 009
30	0 , 866	50	0 , 420	70	0 , 182	90	0 , 000

Pour donner un exemple de l'usage de cette table, je suppose qu'étant donné un arc de parallele de 60′, tel que ADC, situé à 30° de distance du pôle P, on demande de quelle quantité l'angle PAD de 90° excede l'angle *a* formé par le même arc PA ou P*a* avec l'arc de grand cercle *a*C, correspondant à l'arc ADC. L'équation de la table, à 30° de distance du pôle, est 0′, 866; multipliez cette valeur par 60, vous aurez $e = 51', 96 = 51' 57'', 6$. C'est à-peu-près la valeur de NB*a*, dans le cas proposé. Pour connoître le petit angle NB*a*, il suffit donc de multiplier l'équation de la table par l'arc *a*C pris en minutes. Fig. 62

537. Connoissant l'angle NB*a*, on a immédiatement les autres

CHAPITRE XIX.

Des Analogies différentielles des Triangles sphériques.

540. Je donnerai les analogies différentielles des triangles sphériques sous trois formes : la premiere, rigoureuse et que je crois nouvelle, pour les différences finies, de quelque grandeur qu'elles soient, rapportées aux parties d'un triangle ABC; la seconde pour les différences infiniment petites, comme on les donne ordinairement, mais en augmentant de beaucoup le nombre des analogies publiées jusqu'à présent, et en appliquant le signe négatif à l'une des deux variations que l'on considere, quand elle se fait dans un sens opposé relativement à l'autre; la troisieme, pour les mêmes analogies infinitésimales, mais exprimées avec les dénominations des parties du triangle, et sans égard aux signes, qu'on pourra prendre dans les analogies de la forme précédente. De chacune des proportions fondamentales, je déduirai par des substitutions autant d'autres analogies qu'on peut en obtenir sans introduire dans le second rapport plus de trois parties du triangle, ou plus de deux quand le triangle est rectangle. Ces substitutions peuvent rarement avoir lieu dans les analogies finies ou de la premiere forme. Je supprimerai aussi les analogies de la troisieme forme, quand elles seront compliquées, et longues et difficiles à énoncer. Je donne toutes les analogies sans interruption, me réservant de les démontrer ensuite. De cette maniere elles forment une table, à laquelle on pourra recourir aisément.

ABLE DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES
DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Quantités constantes AB, A; ou *un côté et un angle adjacent.*

RAPPORTS DES VARIATIONS
DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT,
ET DE L'ANGLE ADJACENT AU CÔTÉ CONSTANT.

1. Sin. δAC : sin. δB :: sin. (BC + δBC) : sin. C :: sin. BC : sin. (C — δC).

$$\delta AC : \delta B :: \sin.BC : \sin.C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant
Est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

2. sin. δAC : sin. δB :: sin. BC sin. (BC + δBC) : sin. AB sin. A, (VII. 6°).

$$\delta AC : \delta B :: \sin.^2 BC : \sin.AB \sin.A.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le quarré du sinus du côté opposé à l'angle constant
Est au produit du sinus du côté constant par le sinus de l'angle constant.

3. sin. δAC : sin. δB :: sin. AB sin. A : sin. C sin. (C — δC), (VII. 19°), (541).

$$\delta AC : \delta B :: \sin.AB \sin.A : \sin.^2 C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le produit du sinus du côté constant par le sinus de l'angle constant
Est au quarré du sinus de l'angle opposé au côté constant.

Si $A = 90°$, ou si $AB = 90°$;

544. $\sin.\eth AC : \sin.\eth B :: \sin.AC \cos.(AC + \eth AC) : \sin.B \cos.(B + \eth B)$.

$$\eth AC : \eth B :: \sin.2AC : \sin.2B.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du double du côté variable
Est au sinus du double de l'angle opposé.

RAPPORTS DES VARIATIONS DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT, ET DE L'ANGLE OPPOSÉ AU CÔTÉ CONSTANT.

545. $\tang.\frac{1}{2}\eth AC : - \sin.\frac{1}{2}\eth C :: \tang.(BC + \frac{1}{2}\eth BC) : \sin.(C - \frac{1}{2}\eth C)$.

$$\eth AC : - \eth C :: \tang.BC : \sin.C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme la tangente du côté opposé à l'angle constant
Est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

546. $\sin.\frac{1}{2}\eth AC : -\frac{1}{2}\sin\eth C :: 1 : \sin(C - \eth C) \times \frac{\cos.\frac{1}{2}\eth AC \sin.C \cot.A + \cos.C \cos(AC + \frac{1}{2}\eth AC)}{\sin.AC}$

$$\eth AC : - \eth C :: \sin.AC : \sin.^2 C \cot.A + \sin.C \cos.C \cos.AC.$$

547. $\eth AC : - \eth C :: \sin.BC \tang.BC : \sin.AB \sin.A$, (VII. 6°), (545).

Si $A = 90°$;

548. $\sin.\frac{1}{2}\eth AC : -\frac{1}{2}\sin.\eth C :: \frac{\sin.AC}{\cos.(AC + \frac{1}{2}\eth AC)} : \sin.(C - \eth C) \cos.C$, (546);

$$\eth AC : - \eth C :: 2 \tang.AC : \sin.2C.$$

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme le double de la tangente du côté variable
Est au sinus du double du même angle.

Si

Si AB = 90°;

549. $\sin.\frac{1}{2}\delta AC : \frac{1}{2}\sin.\delta C :: \frac{\cos.AC}{\sin.(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} : \sin.(C + \delta C)\cos.C.$

$$\delta AC : \delta C :: 2\cot.AC : \sin.2C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant
Comme le double de la cotangente du premier de ces côtés
Est au sinus du double du second de ces angles.

RAPPORTS DES VARIATIONS DU CÔTÉ ADJACENT A L'ANGLE CONSTANT, ET DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT.

550. $\tang.\frac{1}{2}\delta AC : \tang.\frac{1}{2}\delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta C : \cos.(C - \frac{1}{2}\delta C).$

$$\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos.C.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation du côté opposé,
Comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté constant.

551. $\sin.\frac{1}{2}\delta AC : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: 1 : \frac{\cos.\frac{1}{2}\delta AC \cos.AB - \cos.BC \cos.(AC + \frac{1}{2}\delta AC)}{\sin.AC \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : \delta BC :: \sin.BC \sin.AC : \cos.AB - \cos.BC \cos.AC.$$

552. $\delta AC : \delta BC :: 1 : \cos.AB \sin.A \sin.B - \cos.A \cos.B$, (VII. 12°), (550).

Si A = 90°;

553. $\sin.\frac{1}{2}\delta AC : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \frac{\cos.AC}{\sin.(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} : \frac{\cos.BC}{\sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : \delta BC :: \cot.AC : \cot.BC.$$

Les variations de l'hypothénuse et du côté
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Si AB = 90°;

554. $\sin.\frac{1}{2}\delta AC : -\sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \frac{\sin.AC}{\cos.(AC + \frac{1}{2}\delta AC)} : \frac{\cos.BC}{\sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}.$

$$\delta AC : -\delta BC :: \tang.AC : \cot.BC.$$

La variation du côté adjacent à l'angle constant
Est à la variation du côté opposé,
Comme le produit de leurs tangentes est au rayon.

RAPPORTS DES VARIATIONS DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT, ET DE L'ANGLE ADJACENT AU CÔTÉ CONSTANT.

555. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC) : \text{tang.}(C - \frac{1}{2}\delta C)$.

$$\delta BC : \delta B :: \sin.BC : \text{tang.}C.$$

La variation du côté opposé à l'angle constant
Est à la variation de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant
Est à la tangente de l'angle opposé au côté constant.

556. $\frac{1}{2}\sin.\delta BC : \sin.\frac{1}{2}\delta B :: \frac{\cos.\frac{1}{2}\delta B \sin.BC \cot.AB - \cos.BC \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)}{\sin.B} \cdot \frac{1}{\sin.(BC + \delta BC)}$.

$$\delta BC : \delta B :: \sin.^2 BC \cot.AB - \sin.BC \cos.BC \cos.B : \sin.B.$$

557. $\delta BC : \delta B :: \sin.AB \sin.A : \sin.C \text{ tang.}C$, (VII. 19°), (555).

Si $A = 90°$;

558. $\frac{1}{2}\sin.\delta BC : \sin.\frac{1}{2}\delta B :: \sin.(BC + \delta BC) \cos.BC : \frac{\cos.B}{\sin.(B + \frac{1}{2}\delta B)}$.

$$\delta BC : \delta B :: \sin.2BC : 2 \cot.B.$$

La variation de l'hypothénuse
Est à celle de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du double de l'hypothénuse
Est au double de la cotangente du même angle.

Si $AB = 90°$;

559. $-\frac{1}{2}\sin.\delta BC : \sin.\frac{1}{2}\delta B :: \sin.(BC - \delta BC) \cos.BC : \frac{\sin.B}{\cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)}$.

$$-\delta BC : \delta B :: \sin.2BC : 2 \text{ tang.}B.$$

La variation du côté opposé à l'angle constant
Est à celle de l'angle adjacent au côté constant,
Comme le sinus du double du premier de ces côtés
Est au double de la tangente du second de ces angles.

RAPPORTS DES VARIATIONS
DU CÔTÉ OPPOSÉ A L'ANGLE CONSTANT, ET DE L'ANGLE OPPOSÉ AU CÔTÉ CONSTANT.

560.* tang.$\frac{1}{2}\delta$BC : — tang.$\frac{1}{2}\delta$C :: tang.(BC + $\frac{1}{2}\delta$BC) : tang.(C — $\frac{1}{2}\delta$C).

δBC : — δC :: tang.BC : tang.C.

La variation du côté opposé à l'angle constant
Et la variation de l'angle opposé au côté constant
Sont proportionnelles à leurs tangentes.

561. δBC : — δC :: sin.AC : (cos.AC + tang.C cot.A) sin.C, (VII. 32°).

562. δBC : — δC : : (tang.BC cot.AB — cos.B) sin.BC : sin.B, (VII. 18°), (560).

Si A = 90°;

563. δBC : — δC :: sin.BC : cot.B, (430, 3°), (560).

La variation de l'hypothénuse
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme le sinus de l'hypothénuse
Est à la cotangente de l'autre angle.

Si AB = 90°;

564. δBC : δC :: sin.BC : tang.B, (562).

La variation du côté opposé à l'angle constant
Est à la variation de l'angle opposé au côté constant,
Comme le sinus du côté opposé à l'angle constant
Est à la tangente de l'angle variable adjacent au côté constant.

RAPPORTS DES VARIATIONS
DES DEUX ANGLES.

565. tang.$\frac{1}{2}\delta$B : — tang.$\frac{1}{2}\delta$C :: cos.$\frac{1}{2}\delta$BC : cos.(BC + $\frac{1}{2}\delta$BC).

δB : — δC :: 1 : cos.BC.

La variation de l'angle adjacent au côté constant
Est à la variation de l'angle opposé,
Comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle constant.

$\sin.\frac{1}{2}\partial B \quad \sin.\frac{1}{2}\partial C :: 1 : \frac{\cos.\frac{1}{2}\partial B \cos.A + \cos.C \cos.(B + \frac{1}{2}\partial B)}{\sin.B \sin.(C - \frac{1}{2}\partial C)}$.

$\partial C :: \sin.B \sin.C : \cos.A + \cos.B \cos.C.$

$\cos.A \sin.AB \sin.AC + \cos.AB \cos.AC$, (VII, 26°), (565).

Si $A = 90°$;

$\text{in.}\frac{1}{2}\partial C :: \frac{\sin.B}{\cos.(B + \frac{1}{2}\partial B)} : \frac{\cos.C}{\sin.(C - \frac{1}{2}\partial C)}$, (566).

$\partial B : -\partial C :: \text{tang.}B : \text{cot.}C.$

iation angle adjacent au côté constant
la varia de l'a e opposé,
le pr t de s tangentes est au rayon.

Si $AB = 90°$;

$\frac{1}{2}\partial B : \sin.\frac{1}{2}\partial C :: \frac{\cos.B}{\sin.(B + \frac{1}{2}\partial B)} : \frac{\cos.C}{\sin.(C + \frac{1}{2}\partial C)}$.

$\partial B : \partial C :: \text{cot.}B : \text{cot.}C.$

aria ngles
lles à leurs cotangentes.

Quantités constantes BC, A; ou *un côté et l'angle opposé.*

RAPPORTS DES VARIATIONS DES DEUX CÔTÉS.

570. $\text{tang.}\frac{1}{2}\partial AB : -\text{tang.}\frac{1}{2}\partial AC :: \frac{\cos.(C + \frac{1}{2}\partial C)}{\cos.\frac{1}{2}\partial C} : \frac{\cos.(B - \frac{1}{2}\partial B)}{\cos.\frac{1}{2}\partial B}$.

$\partial AB : -\partial AC :: \cos.C : \cos.B.$

Les variations des côtés
Sont proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

571. $\partial AB : -\partial AC :: \cos.AB \sin.A \text{ tang.}B - \cos.A : 1$, (VII. 12°).

572. $\partial AB : -\partial AC :: 1 : \cos.AC \sin.A \text{ tang.}C - \cos.A$, (VII. 10°), (570).

573.* $\partial AB : -\partial AC :: \frac{\sin.AB}{\sin.AC} : \frac{\cos.AC - \cos.BC \cos.AB}{\cos.AB - \cos.BC \cos.AC}$, (VII. 11°, 9°), (570).

574.* $\partial AB : -\partial AC :: 1 : \frac{1 - \text{tang.}AC \text{ cot.}AB \cos.A}{\text{tang.}AC \text{ cot.}AB - \cos A}$, (VII. 26°).

Si A = 90°;

575. $\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta AB}{-\sin.\frac{1}{2}\delta AC} : 1 :: \frac{\cos.(AB+\delta AB)}{\sin.(AB+\frac{1}{2}\delta AB)} \cdot \frac{\cos.AC}{\sin.(AC-\frac{1}{2}\delta AC)} :: \frac{\cos.AB}{\sin.(AB+\frac{1}{2}\delta AB)} \cdot \frac{\cos.(AC-\delta AC)}{\sin.(AC-\frac{1}{2}\delta AC)}$

$$\delta AB : -\delta AC :: \cot.AB : \cot.AC.$$

Les variations des côtés
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

Si BC = 90°;

576. $\sin.\delta AB : -\sin.\delta AC :: \sin.AB\cos.(AB+\delta AB) : \sin.(AC-\delta AC)\cos.AC.$

$$\delta AB : -\delta AC :: \sin.2AB : \sin.2AC, \text{ (I. 6°)}.$$

Les variations des côtés
Sont proportionnelles aux sinus des côtés doubles.

577. $\sin.\delta AB : -\sin.\delta AC :: \cos.(C+\delta C) : \cos.B :: \cos.C : \cos.(B-\delta B).$

$$\delta AB : -\delta AC :: \cos.C : \cos.B.$$

578. $\delta AB : \delta AC :: \cos.A : \cos.^2B :: \cos.^2C : \cos.A.$

La variation d'un côté
Est à la variation de l'autre côté,
Comme le quarré du cosinus de l'angle opposé au premier côté
Est au cosinus de l'angle constant.

RAPPORTS DES VARIATIONS DES DEUX ANGLES.

579. $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta C : -\text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: \frac{\cos.(AB+\frac{1}{2}\delta AB)}{\cos.\frac{1}{2}\delta AB} : \frac{\cos.(AC-\frac{1}{2}\delta AC)}{\cos.\frac{1}{2}\delta AC}.$

$$\delta C : -\delta B :: \cos.AB : \cos.AC.$$

Les variations des angles
Sont proportionnelles aux cosinus des côtés opposés.

580. $\delta C : -\delta B :: \cos.C \sin.BC \text{ tang.}AC + \cos.BC : 1$, (VII. 30°).

581. $\delta C : -\delta B :: 1 : \cos.B \sin.BC \text{ tang.}AB + \cos.BC$, (VII. 28°), (579).

582.* $\delta C : -\delta B :: \frac{\sin.C}{\sin.B} : \frac{\cos.B + \cos A \cos.C}{\cos.C + \cos.A \cos.B}$, (VII. 29°, 27°), (579).

583.* $\delta C : -\delta B :: \text{tang.}B \cot.C + \cos.BC : 1 + \text{tang.}B \cot.C \cos.BC$, (VII. 8°).

Si A = 90°;

584. $\sin.\partial C : -\sin.\partial B :: \sin.C \cos.(C + \partial C) : \sin.(B - \partial B) \cos.B.$

$$\partial C : -\partial B :: \sin.2C : \sin.2B.$$

Les variations des angles
Sont proportionnelles aux sinus des angles doubles.

585. $\sin.\partial C : -\sin.\partial B :: \cos.(AB + \partial AB) : \cos.AC :: \cos.AB : \cos.(AC - \partial AC)$

$$\partial C : -\partial B :: \cos.AB : \cos.AC.$$

586. $\partial C : -\partial B :: \cos.BC : \cos.^2AC :: \cos.^2AB : \cos.BC$, (430; 10°, 7°).

La variation d'un angle
Est à la variation de l'autre angle,
Comme le quarré du cosinus du côté opposé au premier angle
Est au cosinus de l'hypothémuse.

Si BC = 90°;

587. $\sin.\frac{1}{2}\partial C : -\sin.\frac{1}{2}\partial B :: \frac{\cos.(C + \partial C)}{\sin.(C + \frac{1}{2}\partial C)} \cdot \frac{\cos.B}{\sin.(B - \frac{1}{2}\partial B)} :: \frac{\cos.C}{\sin.(C + \frac{1}{2}\partial C)} \cdot \frac{\cos.(B - \partial B)}{\sin.(B - \frac{1}{2}\partial B)}$

$$\partial C : -\partial B :: \cot.C : \cot.B.$$

Les variations des angles
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS D'UN CÔTÉ ET DE L'ANGLE OPPOSÉ.

588.* $\sin.\frac{1}{2}\partial AB : \sin.\frac{1}{2}\partial C :: \frac{\sin.AB}{\cos.(AB + \frac{1}{2}\partial AB)} : \frac{\sin.C}{\cos.(C + \frac{1}{2}\partial C)}.$

$$\partial AB : \partial C :: \text{tang.}AB : \text{tang.}C.$$

Les variations d'un côté et de l'angle opposé
Sont proportionnelles à leurs tangentes.

589. $\partial AB : \partial C :: \sin.AC : \sin.A + \cos.A \cos.AC \text{ tang.}C$, (VII. 35°).

590. $\partial AB : \partial C :: \sin.BC : \sin.B + \cos.B \cos.BC \text{ tang.}C$, (VII. 36°), (588).

591. $\partial AB : \partial C :: \sin.AC - \cos.AC \cos.A \text{ tang.}AB : \sin.A$, (VII. 17°), (588).

592. $\partial AB : \partial C :: \sin.BC - \cos.BC \cos.B \text{ tang.}AB : \sin.B$, (VII. 18°), (588).

De même

593.* $-\sin.\frac{1}{2}\delta AC : -\sin.\frac{1}{2}\delta B :: \frac{\sin.AC}{\cos.(AC-\frac{1}{2}\delta AC)} : \frac{\sin.B}{\cos.(B-\frac{1}{2}\delta B)}$.

$$-\delta AC : -\delta B :: \text{tang.}AC : \text{tang.}B.$$

594. $-\delta AC : -\delta B :: \sin.AB : \sin.A + \cos.A \cos.AB \text{ tang.}B.$

595. $-\delta AC : -\delta B :: \sin.BC : \sin.C + \cos.C \cos.BC \text{ tang.}B.$

596. $-\delta AC : -\delta B :: \sin.AB - \cos.AB \cos.A \text{ tang.}AC : \sin.A.$

597. $-\delta AC : -\delta B :: \sin.BC - \cos.BC \cos.C \text{ tang.}AC : \sin.C.$

RAPPORTS DES VARIATIONS

D'UN CÔTÉ ET DE L'ANGLE ADJACENT.

598. $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AB : -\frac{1}{2}\sin.\delta B :: \frac{\sin.AC}{\cos.\frac{1}{2}\delta AC \cos.(AC-\frac{1}{2}\delta AC)} \times \frac{\cos.(C+\frac{1}{2}\delta C)}{\cos.\frac{1}{2}\delta C} : \sin.B.$

$$\delta AB : -\delta B :: \text{tang.}AC \cos.C : \sin.B.$$

La variation d'un côté
Est à la variation de l'angle adjacent,
Comme le produit de la tang. de l'autre côté variab. par le cos. de l'autre ang. var.
Est au sinus du premier de ces angles.

599. $\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AB : -\frac{1}{2}\sin.\delta B :: \sin.AB : \frac{\cos.\frac{1}{2}\delta AC \cos.(AC-\frac{1}{2}\delta AC) \sin.C \cos.\frac{1}{2}\delta C}{\cos.(C+\frac{1}{2}\delta C)}$.

$$\delta AB : -\delta B :: \sin.AB : \cos.AC \text{ tang.}C.$$

La variation d'un côté
Est à la variation de l'angle adjacent,
Comme le sinus du même côté
Est au produit du cos. de l'autre côté variable par la tang. de l'autre ang. variable.

600. $\delta AB : -\delta B :: \cos.AB \text{ tang.}AC - \sin.AB \cos.A : \sin.A$, (VII. 17e).

601. $\delta AB : -\delta B :: \sin.BC : \cos.B \text{ tang.}C + \sin.B \cos.BC$, (VII. 33e), (598).

602.* $\delta AB : -\delta B :: \frac{\text{tang.}BC - \cos.B \text{ tang.}AB}{\sin.B} : 1 + \cos.B \text{ tang.}AB \text{ tang.}BC$, (VII. 18e).

603.* $\delta AB : -\delta B :: \sin.AB : \frac{\text{tang.}B \cos.AB + \text{tang.}A}{\text{tang.}A \text{ tang.}B \cos.AB - 1}$, (VII. 31e).

De même

604. $-\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AC : \frac{1}{2}\text{sin.}\delta C :: \frac{\text{sin.AB}}{\cos.\frac{1}{2}\delta AB \cos.(AB+\frac{1}{2}\delta AB)} \times \frac{\cos.(B-\frac{1}{2}\delta B)}{\cos.\frac{1}{2}\delta B} : \text{sin.C.}$

$$-\delta AC : \delta C :: \text{tang.AB cos.B} : \text{sin.C.}$$

605. $-\text{tang.}\frac{1}{2}\delta AC : \frac{1}{2}\text{sin.}\delta C :: \text{sin.AC} : \frac{\cos.\frac{1}{2}\delta AB \cos.(AB+\frac{1}{2}\delta AB) \text{ sin.B cos.}\frac{1}{2}\delta B}{\cos.(B-\frac{1}{2}\delta B)}$

$$-\delta AC : \delta C :: \text{sin.AC} : \text{cos.AB tang.B}$$

606. $-\delta AC : \delta C :: \text{cos.AC tang.AB} - \text{sin.AC cos.A} : \text{sin.A.}$

607. $-\delta AC : \delta C :: \text{sin.BC} : \text{cos.C tang.B} + \text{sin.C cos.BC.}$

608.* $-\delta AC : \delta C :: \text{tang.BC} - \text{cosC tangAC} : (1+\text{cosC tangAC tang.BC}) \text{ sinC.}$

609.* $-\delta AC : \delta C :: (\text{tang.A tang.C cos.AC} - 1) \text{ sinAC} : \text{tangC cosAC} + \text{tangA.}$

Si $A = 90°$;

610. $\frac{1}{2}\text{sin.}\delta AB : -\text{sin.}\frac{1}{2}\delta B :: \text{sin.AB cos.}(AB+\delta AB) : \frac{\text{cos.B}}{\text{sin.}(B-\frac{1}{2}\delta B)}$.

$$\delta AB : -\delta B :: \text{sin.2AB} : 2\,\text{cot.B.}$$

La variation d'un côté
Est à la variation de l'angle adjacent,
Comme le sinus du double de ce côté
Est au double de la cotangente du même angle.

De même

611. $-\frac{1}{2}\text{sin.}\delta AC : \text{sin.}\frac{1}{2}\delta C :: \text{sin.AC cos.}(AC-\delta AC) : \frac{\text{cos.C}}{\text{sin.}(C+\frac{1}{2}\delta C)}$.

$$-\delta AC : \delta C :: \text{sin.2AC} : 2\,\text{cot.C.}$$

Si $BC = 90°$;

612. $\text{sin.}\frac{1}{2}\delta AB : -\frac{1}{2}\text{sin.}\delta B :: \frac{\text{cos.AB}}{\text{sin.}(AB+\frac{1}{2}\delta AB)} : \text{sin.B cos.}(B-\delta B)$.

$$\delta AB : -\delta B :: 2\,\text{cot.AB} : \text{sin.2B.}$$

La variation d'un côté
Est à celle de l'angle adjacent,
Comme le double de la cotangente du même côté
Est au sinus du double du même angle.

De

De même

613. — $\sin.\frac{1}{2}\delta AC : \frac{1}{2}\sin.\delta C :: \frac{\cos.AC}{\sin.(AC - \frac{1}{2}\delta AC)} : \sin.C \cos.(C + \delta C)$.

$— \delta AC : \delta C :: 2\cot.AC : \sin.2C.$

Quantités constantes AB, AC; ou *deux côtés*.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX ANGLES OPPOSÉS AUX CÔTÉS CONSTANTS.

614.* $\tan g.\frac{1}{2}\delta B : \tan g.\frac{1}{2}\delta C :: \tan g.(B + \frac{1}{2}\delta B) : \tan g.(C + \frac{1}{2}\delta C)$.

$\delta B : \delta C :: \tan g.B : \tan g.C.$

Les variations des angles opposés aux côtés constants
Sont proportionnelles aux tangentes de ces mêmes angles.

615. $\delta B : \delta C :: \cos.C : \sin.BC \cot.AC - \cos.BC \cos.C$, (VII. 15°).

616. $\delta B : \delta C :: \cos.AB - \cos.BC \cos.AC : \cos.AC - \cos.BC \cos.AB$, (VII. 11°).

617. $\delta B : \delta C :: \sin.BC \cot.AB - \cos.BC \cos.B : \cos.B$, (VII. 18°), (614).

618. $\delta B : \delta C :: 1 : \frac{\sin.AB \cot.AC - \cos.AB \cos.A}{\sin AC \cot.AB - \cos.AC \cos.A}$, (VII. 16°, 17°), (614).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIEME CÔTÉ ET D'UN ANGLE ADJACENT.

619. — $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \tan g.\frac{1}{2}\delta B :: \sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \cot.(C + \frac{1}{2}\delta C)$.

$— \delta BC : \delta B :: \sin.BC : \cot.C.$

La variation du troisieme côté
Est à la variation d'un angle adjacent,
Comme le sinus du même côté
Est à la cotangente de l'autre angle adjacent.

620.* $— \sin.\frac{1}{2}\delta BC : \sin.\frac{1}{2}\delta B :: \sin(B + \frac{1}{2}\delta B) : \frac{\cot.AB \sin(BC - \frac{1}{2}\delta BC) - \cos.B \cos(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.(BC - \delta BC)}$

$— \delta BC : \delta B :: \sin.B : \cot.AB - \cot.BC \cos.B.$

621. — $\partial BC : \partial B :: \sin.AB \sin.A : \cos.C$, (VII. 19°), (619).

622. — $\partial BC : \partial B :: \sin.AB : \cos.AB \sin.B - \cot.A \cos.B$, (VII. 12°).

De même

623. — $\sin.\frac{1}{2}\partial BC : \tang.\frac{1}{2}\partial C :: \sin.(BC - \frac{1}{2}\partial BC) : \cot.(B + \frac{1}{2}\partial B)$.

$$- \partial BC : \partial C :: \sin.BC : \cot.B.$$

624.* — $\sin.\frac{1}{2}\partial BC : \sin.\frac{1}{2}\partial C :: \sin(C+\frac{1}{2}\partial C) : \frac{\cot.AC \sin(BC-\frac{1}{2}\partial BC) - \cos.C \cos(BC-\frac{1}{2}\partial BC)}{\sin.(BC-\partial BC)}$

$$- \partial BC : \partial C :: \sin.C : \cot.AC - \cot.BC \cos.C.$$

625. — $\partial BC : \partial C :: \sin.AC \sin.A : \cos.B$.

626. — $\partial BC : \partial C :: \sin.AC : \cos.AC \sin.C - \cot.A \cos.C$.

Si $AC = 90°$;

627. $\frac{1}{2}\sin.\partial BC : \sin.\frac{1}{2}\partial B :: \sin.(BC + \partial BC) \cos.BC : \frac{\cos.B}{\sin.(B+\frac{1}{2}\partial B)}$.

$$\partial BC : \partial B :: \sin.2BC : 2\cot.B.$$

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90°,
Comme le sinus du double du côté variable
Est au double de la cotangente du même angle.

628. — $\partial BC : \partial B :: \cos.AB : \cos.C \cot.C$.

Si $AB = 90°$;

On changera C en B et B en C, dans les analogies (627, 628).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIEME CÔTÉ ET DE L'ANGLE OPPOSÉ.

629. — $\sin.\frac{1}{2}\partial BC : -\sin.\frac{1}{2}\partial A :: \sin.AB \sin.AC \sin.(A - \frac{1}{2}\partial A) : \sin.(BC - \frac{1}{2}\partial BC$

$$- \partial BC : - \partial A :: \sin.AB \sin.AC \sin.A : \sin.BC.$$

La variation du côté
Est à la variation de l'angle opposé,

Comme le produit du rectangle des sinus des côtés constants par le sinus de l'angle qu'ils comprennent

Est au sinus du côté variable.

630. $-\eth BC : -\eth A :: \sin.AB \sin.B : 1$, (VII. 20°).

631. $-\eth BC : -\eth A :: \sin.AC \sin.C : 1$, (VII. 4°).

La variation du côté

Est à la variation de l'angle opposé,

Comme le produit du sinus d'un côté constant par le sinus de l'angle opposé à l'autre côté constant est au rayon.

Si $AC = 90°$, ou si $AB = 90°$;

632. $-\sin.\frac{1}{2}\eth BC : -\sin.\frac{1}{2}\eth A :: \frac{\cos.BC}{\sin.(BC - \frac{1}{2}\eth BC)} : \frac{\cos.A}{\sin.(A - \frac{1}{2}\eth A)}$.

$$-\eth BC - \eth A :: \cot.BC : \cot.A.$$

Les variations du côté et de l'angle opposé

Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DE L'ANGLE COMPRIS ENTRE LES CÔTÉS CONSTANTS, ET DE L'UN DES DEUX AUTRES ANGLES.

633.* $-\sin.\frac{1}{2}\eth A : \frac{1}{2}\sin.\eth B :: \frac{1}{\sin.(B + \eth B)} : \frac{\cos.AB \sin.B \sin.(A - \frac{1}{2}\eth A) - \cos.B \cos.(A - \frac{1}{2}\eth A)}{\sin.(A - \eth A)}$

$$-\eth A : \eth B :: 1 : (\cos.AB - \cot.B \cot.A) \sin.^2 B.$$

634. $-\sin.\frac{1}{2}\eth A : \frac{1}{2}\sin.\eth B :: \frac{\sin.(A - \eth A)}{\sin.(B + \eth B)} : \frac{\cos.C \sin.(A - \frac{1}{2}\eth A) - \cos.B \sin.\frac{1}{2}\eth A}{\sin.A}$.

$$-\eth A : \eth B :: \sin.A : \sin.B \cos.C.$$

La variation de l'angle opposé au côté variable

Est à la variation de l'un des angles adjacents,

Comme le sinus du même angle opposé

Est au produit du sinus du même angle adjacent par le cos. du troisieme angle.

635.— $\sin.\frac{1}{2}\eth A : \text{tang.}\frac{1}{2}\eth B :: \frac{\sin.^2(BC-\frac{1}{2}\eth BC)}{\sin.BC} : \sin.AC \times \frac{\sin.(A-\frac{1}{2}\eth A)}{\sin.A} \times \frac{\sin.C}{\text{tang.}(C+\frac{1}{2}\eth C)}$

$$— \eth A : \eth B :: \sin.BC : \sin.AC \cos.C.$$

La variation de l'angle opposé au côté variable
Est à la variation de l'un des angles adjacents,
Comme le sinus du côté variable
Est au produit du sinus du côté opposé au même angle adjacent par le cos. de l'autre angle adjacent.

636. — $\eth A : \eth B :: \sin.^2 BC : \cos.AB - \cos.BC \cos.AC$, (VII. 11°).

637. — $\eth A : \eth B :: 1 : \cos.AB - \sin.AB \cos.B \cot.BC$, (VII. 28°).

De même

638.*— $\sin.\frac{1}{2}\eth A : \frac{1}{2}\sin\eth C :: 1 : \sin(C+\eth C) \times \frac{\cos.AC \sin C \sin(A-\frac{1}{2}\eth A) - \cos C \cos.(A-\frac{1}{2}\eth A)}{\sin.(A-\eth A)}$

$$— \eth A : \eth C :: 1 : (\cos.AC - \cot.C \cot.A) \sin.^2 C.$$

639. — $\sin.\frac{1}{2}\eth A : \frac{1}{2}\sin.\eth C :: \frac{\sin.(A-\eth A)}{\sin.(C+\eth C)} : \frac{\cos.B \sin.(A-\frac{1}{2}\eth A) - \cos.C \sin.\frac{1}{2}\eth A}{\sin.A}$.

$$— \eth A : \eth C :: \sin.A : \sin.C \cos.B.$$

640.— $\sin.\frac{1}{2}\eth A : \text{tang.}\frac{1}{2}\eth C :: \frac{\sin.^2(BC-\frac{1}{2}\eth BC)}{\sin.BC} : \sin.AB \times \frac{\sin.(A-\frac{1}{2}\eth A)}{\sin.A} \times \frac{\sin.B}{\text{tang.}(B+\frac{1}{2}\eth B)}$

$$— \eth A : \eth C :: \sin.BC : \sin.AB \cos.B.$$

641. — $\eth A : \eth C :: \sin.^2 BC : \cos.AC - \cos.BC \cos.AB$.

642. — $\eth A : \eth C :: 1 : \cos.AC - \sin.AC \cos.C \cot.BC$.

Si $AB = 90°$;

643. $\sin.\frac{1}{2}\eth A : \frac{1}{2}\sin.\eth B :: \frac{\sin.A}{\cos.(A+\frac{1}{2}\eth A).} : \sin.B \cos.(B+\eth B)$.

$$\eth A : \eth B :: 2 \text{ tang.} A : \sin.2B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants
Est à la variation de l'autre angle adjacent au côté de 90°,
Comme le double de la tangente du premier angle
Est au sinus du double du second angle.

644. $\sin.\delta A : \sin.\delta C :: \sin.(A + \delta A)\cos.A : \sin.(C + \delta C)\cos.$

$$\delta A : \delta C :: \sin.2A : \sin.2C.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants
Et la variation de l'angle opposé au côté de 90°
Sont proportionnelles aux sinus de ces mêmes angles doubles.

645. — $\sin.\delta A : \sin.\delta C :: \sin.(BC - \delta BC) : \cos.B.$

$$-\delta A : \delta C :: \sin.BC : \cos.B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants
Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90°,
Comme le sinus du côté variable
Est au cosinus du troisieme angle.

646. — $\sin.\delta A : \sin.\delta C :: \cos.AC : \cos.B\cos.(B + \delta B).$

$$-\delta A : \delta C :: \cos.AC : \cos.^2B.$$

La variation de l'angle compris entre les côtés constants
Est à la variation de l'angle opposé au côté de 90°,
Comme le cosinus de l'autre côté constant
Est au quarré du cosinus du troisieme angle.

Si $AC = 90°$;

On changera B en C et C en B dans les analogies (643 à 646).

Quantités constantes B, C; ou *deux angles.*

RAPPORTS DES VARIATIONS

DES DEUX CÔTÉS OPPOSÉS AUX ANGLES CONSTANTS.

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta AB :: \text{tang.}(AC + \tfrac{1}{2}\delta AC) : \text{tang.}(AB + \tfrac{1}{2}\delta AB).$$

$$\delta AC : \delta AB :: \text{tang.}AC : \text{tang.}AB.$$

s variations des côtés opposés aux angles constants
ıt proportionnelles aux tangentes des mêmes côtés.

648. $\partial AC : \partial AB :: \cos.AB : \sin.A \cot.B + \cos.A \cos.AB$, (VII. 34°).

649. $\partial AC : \partial AB :: \cos.C + \cos.A \cos.B : \cos.B + \cos.A \cos.C$, (VII. 29°).

650. $\partial AC : \partial AB :: \sin.A \cot.C + \cos.A \cos.AC : \cos.AC$, (VII. 35°), (647).

651. $\partial AC : \partial AB :: 1 : \frac{\sin.C \cot.B + \cos.C \cos.BC}{\sin.B \cot.C + \cos.B \cos.BC}$, (VII. 33°, 36°), (647).

RAPPORTS DES VARIATIONS DU TROISIEME ANGLE ET D'UN CÔTÉ ADJACENT.

652. $\sin.\frac{1}{2}\partial A : \tang.\frac{1}{2}\partial AC :: \sin.(A + \frac{1}{2}\partial A) : \cot.(AB + \frac{1}{2}\partial AB)$.

$$\partial A : \partial AC :: \sin.A : \cot.AB.$$

La variation du troisieme angle
Est à la variation d'un côté adjacent,
Comme le sinus du même angle
Est à la cotangente de l'autre côté adjacent.

653. $\sin.\frac{1}{2}\partial A : \sin.\frac{1}{2}\partial AC :: \sin.(AC + \frac{1}{2}\partial AC) : \frac{\cot.C \sin.(A + \frac{1}{2}\partial A) + \cos.AC \cos.(A + \frac{1}{2}\partial}{\sin.(A + \partial A)}$

$$\partial A : \partial AC :: \sin.AC : \cot.C + \cos.AC \cot.A.$$

654. $\partial A : \partial AC :: \sin.BC \sin.C : \cos.AB$, (VII. 1°), (652).

655. $\partial A : \partial AC :: \sin.C : \cos.C \sin.AC + \cot.BC \cos.AC$, (VII. 30°).

De même

656. $\sin.\frac{1}{2}\partial A : \tang.\frac{1}{2}\partial AB :: \sin.(A + \frac{1}{2}\partial A) : \cot.(AC + \frac{1}{2}\partial AC)$.

$$\partial A : \partial AB :: \sin.A : \cot.AC.$$

657. $\sin.\frac{1}{2}\partial A : \sin.\frac{1}{2}\partial AB :: \sin.(AB + \frac{1}{2}\partial AB) : \frac{\cot.B \sin.(A + \frac{1}{2}\partial A) + \cos.AB \cos.(A + \frac{1}{2}\partial}{\sin.(A + \partial A)}$

$$\partial A : \partial AB :: \sin.AB : \cot.B + \cos.AB \cot.A.$$

658. $\partial A : \partial AB :: \sin.BC \sin.B : \cos.AC$.

659. $\partial A : \partial AB :: \sin.B : \cos.B \sin.AB + \cot.BC \cos.AB$.

Si $B = 90°$;

660. $\frac{1}{2}\sin.\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta AC :: \sin.(A + \delta A)\cos.A : \frac{\cos.AC}{\sin.(AC + \frac{1}{2}\delta AC)}$.

$$\delta A : \delta AC :: \sin.2A : 2\cot.AC.$$

La variation de l'angle
Est à la variation de l'hypothénuse,
Comme le sinus du double de l'angle variable
Est au double de la cotangente de l'hypothénuse.

661. $\delta A : \delta AC :: \cos.C : \cos.AB \cot.AB$.

Si $C = 90°$;

On changera B en C et C en B dans les analogies (660, 661).

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU TROISIEME ANGLE ET DU CÔTÉ OPPOSÉ.

662. $\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \sin.B \sin.C \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC) : \sin.(A + \frac{1}{2}\delta A)$.

$$\delta A : \delta BC :: \sin.B \sin.C \sin.BC : \sin.A.$$

La variation de l'angle
Est à la variation du côté opposé,
Comme le produit du rectangle des sinus des angles constants par le sinus du côté compris
Est au sinus de l'angle variable.

663. $\delta A : \delta BC :: \sin.AB \sin.B : 1$, (VII. 1°).

664. $\delta A : \delta BC :: \sin.AC \sin.C : 1$, (VII. 23°).

La variation de l'angle
Est à la variation du côté opposé,
Comme le produit du sinus d'un angle constant par le sinus du côté opposé à l'autre angle constant est au rayon.

Si $B = 90°$, ou si $C = 90°$;

665. $\sin.\frac{1}{2}\delta A : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \frac{\cos.A}{\sin.(A + \frac{1}{2}\delta A)} : \frac{\cos.BC}{\sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}$.

$$\delta A : \delta BC :: \cot.A : \cot.BC.$$

Les variations de l'angle et du côté opposé
Sont proportionnelles à leurs cotangentes.

RAPPORTS DES VARIATIONS

DU CÔTÉ COMPRIS ENTRE LES ANGLES CONSTANTS, ET DE L'UN DES DEUX AUTRES CÔTÉS.

666. $\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\frac{1}{2}\sin.\delta AC} : 1 :: \frac{1}{\sin.(AC + \delta AC)} : \frac{\cos.C \sin.AC \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC) + \cos.AC \cos.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.(BC + \delta BC)}$

$$\delta BC : \delta AC :: 1 : (\cos.C + \cot.AC \cot.BC) \sin.^2 AC.$$

667. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \frac{1}{2}\sin.\delta AC :: \frac{\sin.(BC + \delta BC)}{\sin.(AC + \delta AC)} : \frac{\cos.AB \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC) - \cos.AC \sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\sin.BC}$.

$$\delta BC : \delta AC :: \sin.BC : \sin.AC \cos.AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'un des deux autres côtés,
Comme le sinus du premier côté
Est au produit du sinus du second côté par le cosinus du troisieme côté.

668. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \tang.\frac{1}{2}\delta AC :: \frac{\sin.^2(A + \frac{1}{2}\delta A)}{\sin.A} : \sin.B \times \frac{\sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.BC} \times \frac{\sin.AB}{\tang.(AB + \frac{1}{2}\delta$

$$\delta BC : \delta AC :: \sin.A : \sin.B \cos.AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'un des deux autres côtés,
Comme le sinus de l'angle variable
Est au produit du sinus de l'angle constant opposé à ce dernier côté par le cosinus du troisieme côté.

669. $\delta BC : \delta AC :: \sin.^2 A : \cos.C + \cos.A \cos.B$, (VII. 29°).

670. $\delta BC : \delta AC :: 1 : \cos.C + \sin.C \cos.AC \cot.A$, (VII. 10°).

De

De même

671.* $\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\frac{1}{2}\sin.\delta AB} : 1 :: \frac{1}{\sin.(AB+\delta AB)} : \frac{\cos.B \sin.AB \sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC) + \cos.AB \cos.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.(BC+\delta BC)}$.

$$\delta BC : \delta AB :: 1 : (\cos.B + \cot.AB \cot.BC) \sin.^2 AB.$$

672. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \frac{1}{2}\sin.\delta AB :: \frac{\sin.(BC+\delta BC)}{\sin.(AB+\delta AB)} : \frac{\cos.AC \sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC) - \cos.AB \sin.\frac{1}{2}\delta BC}{\sin.BC}$.

$$\delta BC : \delta AB :: \sin.BC : \sin.AB \cos.AC.$$

673. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \tang.\frac{1}{2}\delta AB :: \frac{\sin.^2(A+\frac{1}{2}\delta A)}{\sin.A} : \sin.C \times \frac{\sin.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.BC} \times \frac{\sin.AC}{\tang.(AC+\frac{1}{2}\delta AC)}$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin.A : \sin.C \cos.AC.$$

674. $\delta BC : \delta AB :: \sin.^2 A : \cos.B + \cos.A \cos.C.$

675. $\delta BC : \delta AB :: 1 : \cos.B + \sin.B \cos.AB \cot.A.$

Si $C = 90°$;

676. $\sin.\frac{1}{2}\delta BC : \frac{1}{2}\sin.\delta AC :: \frac{\sin.BC}{\cos.(BC+\frac{1}{2}\delta BC)} : \sin.AC \cos.(AC+\delta AC).$

$$\delta BC : \delta AC :: 2 \tang.BC : \sin.2AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'autre côté,
Comme le double de la tangente du premier côté
Est au sinus du double du second côté.

677. $\sin.\delta BC : \sin.\delta AB :: \sin.(BC+\delta BC) \cos.BC : \sin.(AB+\delta AB) \cos.AB.$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin.2BC : \sin.2AB.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'hypothénuse,
Comme le sinus du double du même côté
Est au sinus du double de l'hypothénuse.

678. $\sin.\delta BC : \sin.\delta AB :: \sin.(A+\delta A) : \cos.AC.$

$$\delta BC : \delta AB :: \sin.A : \cos.AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'hypothénuse,
Comme le sinus de l'angle variable
Est au cosinus du côté adjacent.

679. $\sin.\partial BC : \sin.\partial AB :: \cos.B : \cos.AC \cos.(AC + \partial AC)$.

$$\partial BC : \partial AB :: \cos.B : \cos.^2 AC.$$

La variation du côté opposé à l'angle variable
Est à la variation de l'hypothénuse,
Comme le cosinus de l'angle oblique constant
Est au quarré du cosinus du côté opposé.

$$\text{Si } B = 90°;$$

On changera C en B et B en C dans les analogies (676 à 679).

Démonstration des Analogies de la Table précédente.

Fig.64 680. Soit le triangle sphérique ABC converti en ABD, le côté AB et l'angle adjacent A demeurant constants; et soient $CBD = \partial B$, $C - D = \partial C$, $CD = \partial AC$, et $BD - BC = \partial BC$, comme nous avons fait (251). Ces expressions adoptées, on entendra facilement les démonstrations suivantes.

681. Les analogies finies (541) dépendent de la proportion entre les sinus des côtés et les sinus des angles opposés (448), appliquée au triangle BCD.

682. Chaque analogie infinitésimale précédée dans un même article d'une analogie finie, est déduite de cette analogie finie par les moyens déjà employés (253, 264, 265).

En substituant dans les analogies (541) la valeur de sin.C, (VII. 6°), on obtient les analogies (542). C'est ce que signifie le renvoi à la formule 6° de la table VII, que l'on a vu (542), et c'est ainsi que doivent s'entendre toutes les citations ou renvois pareils dans ces analogies.

Et quand la substitution n'a pas été faite dans l'article qui précéde immédiatement, mais dans un article plus éloigné, alors j'ai cité de plus l'article où elle a eu lieu. Par exemple, dans les ana-

logies (543), la citation (VII. 19e) (541) signifie que l'expression contenue dans la formule 19e de la table VII a été substituée dans les analogies de l'article 541.

Ce n'est que dans les analogies infinitésimales, et non dans les analogies finies, que les substitutions indiquées par la table ont été faites; à l'exception cependant des substitutions dont nous venons de parler pour les articles (542, 543).

683. Lorsque $A = 90°$, la formule (VII. 34e) donne tang.AC = tang.B sin.AB, parcequ'alors sin.A = 1 et cos.A = 0. Prenant dans cette équation les différentielles finies, selon la formule (II. 32e), et observant que AB est constant, on aura $\frac{\sin.\delta AC}{\cos.AC\ \cos.(AC + \delta AC)} = \frac{\sin.\delta B}{\cos.B\ \cos.(B + \delta B)} \times \sin.AB$. En substituant dans cette équation la valeur de sin.AB prise de l'équation précédente, (qu'on se souvienne que c'est ainsi que dans toutes les différentiations semblables nous ferons disparoître la quantité constante), on en tirera aussitôt la premiere analogie (544).

684. Si $AB = 90°$, alors l'équation (VII. 34e) devient tang.AC $= \frac{\text{tang.B}}{\sin.A}$, et l'on a toujours la même analogie finie (544), en différentiant cette équation.

L'analogie infinitésimale (544), déduite comme nous l'avons dit (682), se trouve simplifiée dans le second rapport, au moyen de la formule (I. 6e). Parmi les analogies suivantes beaucoup d'autres ont été simplifiées de la même maniere; ce à quoi nous ne nous arrêterons pas.

685. Dans le triangle sphérique BCD, on a (IX. 4e), $\cos.\frac{1}{2}(BCD + D) : \cos.\frac{1}{2}(BCD - D) :: \text{tang.}\frac{1}{2}CD : \text{tang.}\frac{1}{2}(BD + BC)$. Or $\cos.\frac{1}{2}(BCD + D) = \cos.\frac{1}{2}\left(180° - \overline{C - D}\right) = (5) \sin.\frac{1}{2}(C - D) = \sin.\frac{1}{2}\delta C$, (680); et $\cos.\frac{1}{2}(BCD - D) = \cos.\frac{1}{2}\left(180° - \overline{C + D}\right) = \sin.\frac{1}{2}(C + D) = \sin.(C - \frac{1}{2}\delta C)$. Substituons ces valeurs dans le premier rapport de l'analogie ci-dessus, mettons dans le

Fig.64 second les expressions (680), et nous aurons la premiere analogie (545).

686. L'opération précédente suppose $C > D$, c'est-à-dire qu'elle suppose que l'angle C diminue pour se changer en D, tandis que le côté AC augmente. Pour indiquer que ces deux variations se font en sens contraire, nous avons donné le signe négatif à $\sin.\frac{1}{2}\delta C$. Au reste on a toujours en effet $C > D$ lorsque $(BC + BD)$ est $< 180°$, comme on le comprendra facilement en appliquant la regle (475) au triangle BCD. Mais quand on a $(BC + BD) > 180°$, alors $\text{tang.}(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ devient négative, et par conséquent $\sin.\frac{1}{2}\delta C$ devient positif. En effet dans ce cas C augmente, c'est-à-dire que C est $<$ D. Par des raisonnements semblables il sera facile de trouver la raison du signe négatif partout où nous l'avons employé dans les premiers rapports des analogies de la table.

687. Prenons les différentielles finies (II. 30e, 31e, 33e) dans l'équation (VII. 17e) exprimée comme il suit, $\sin.A \cot.C = \sin.AC \cot.AB - \cos.AC \cos.A$, et, en nous rappellant que A et AB sont constants, nous aurons $-\frac{\sin.\delta C \sin.A}{\sin.C \sin.(C - \delta C)} = 2 \sin.\frac{1}{2}\delta AC \times \left(\cos.\overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC} \cot.AB + \sin.\overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC} \cos.A\right)$. Substituons à cot.AB sa valeur (VII. 35e), multiplions l'équation par $\frac{\sin.AC}{\cos.A}$, et, en observant que $\cos.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) \times \cos.AC + \sin.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) \sin.AC = \cos.\frac{1}{2}\delta AC$, (II. 4*), nous aurons $-\sin.\delta C \times \frac{\sin.AC \text{ tang.}A}{\sin.C \sin.(C - \delta C)} = 2 \sin.\frac{1}{2}\delta AC \times \left(\text{tang.}A \cot.C \cos.\overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC} + \cos.\frac{1}{2}\delta AC\right)$; équation qui, multipliée par cot.A, donnera la premiere analogie (546).

On verra (725) ce que signifie l'astérisque *.

688. Si la formule (VII. 17e) eût été prise de la maniere suivante, $\text{tang.}C \sin.AC \cot.AB - \text{tang.}C \cos.AC \cos.A = \sin.A$, la différentiation n'auroit plus été rigoureuse, parcequ'en différentiant les produits des variables, tang.C sin.AC et tang.C cos.AC,

il eût fallu négliger les rectangles des différentielles (133), pour ne pas tomber dans une expression extrêmement compliquée. On trouveroit de même, si l'on différentioit la formule (VII. 17°) en la prenant comme elle est dans la table VII, que la différentiation ne seroit pas exacte, et telle que nous l'avons eue (687). En général pour former une équation différentielle finie, il faut 1°. que l'équation qu'on veut différentier soit telle qu'aucun terme ne contienne plus d'une variable; 2°. que par conséquent le dénominateur d'un membre ne contienne aucune variable, lorsqu'il s'en trouve quelqu'une dans le numérateur de l'autre membre (137). Nous donnerons dans la suite, et spécialement (703), des moyens pour obtenir ces conditions dans certains cas qui, au premier aspect, paroissent les exclure.

689. L'analogie infinitésimale (547) n'a point d'analogie différentielle finie qui lui corresponde; pour la former il faudroit avoir à substituer dans la premiere (545) une valeur exacte de sin.$(C - \frac{1}{2}\delta C)$ correspondante à celle de sin.C que nous avons substituée dans la seconde analogie (545). C'est par la même cause qu'on ne trouve point d'analogies finies dans quelques autres articles de la table.

690. Lorsque $A = 90°$, la premiere analogie (548) se tire immédiatement de la premiere (546).

Quand $AB = 90°$, la formule (VII. 17°) devient cot.$C = -$ cos.AC cot.A. Prenant les différentielles et observant qu'elles auront le même signe après la substitution (683) de la valeur de cot.A que l'équation précédente donne négative, on aura la premiere analogie (549).

On remarquera l'utilité des signes que j'ai insérés dans les analogies différentielles, puisqu'ils font connoître dans le cas présent que quand $AB = 90°$, les changements de C et de AC ne se font plus en sens contraire, pourvu cependant que AC et C soient de la même espece. Le changement de signe, par comparaison avec les analogies précédentes, fait voir combien il seroit

Fig. 64 facile, tant dans ce cas que dans d'autres pareils de la table, de prendre l'accroissement pour le décroissement, ou *vice versâ*, en se servant des analogies infinitésimales telles qu'elles ont été données jusqu'à présent, c'est-à-dire sans aucune distinction de signes.

691. Dans le triangle BCD on a (IX. 4°), tang. $\frac{1}{2}$(BD — BC) : tang. $\frac{1}{2}$CD :: sin. $\frac{1}{2}$(BCD — D) : sin. $\frac{1}{2}$(BCD + D). Procédant comme on a fait (685), cette analogie se transforme en la premiere (550).

692. En prenant les différentielles finies dans l'équation (VII. 26°) dont on aura changé les signes pour rendre positives les différentielles des cosinus, on a $2\sin.\frac{1}{2}\delta BC \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC) = 2\sin.\frac{1}{2}\delta AC$ (cos.AB $\sin.\overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC}$ — sin.AB $\cos.\overline{AC + \frac{1}{2}\delta AC}$ cos.A). Substituant la valeur (VII. 7°) de cos.A, et multipliant l'équation par sin.AC, on trouvera cos.AB multiplié par la valeur de cos. $\frac{1}{2}\delta AC$ énoncée (687), et on aura aussitôt la premiere analogie (551).

693. En différentiant l'équation (VII. 26°), nous venons d'employer (AC + $\frac{1}{2}\delta$AC), et non (AC — $\frac{1}{2}\delta$AC), dans la différentielle de — sin.AC; ce qui en apparence est contraire à la regle donnée (143). Mais comme la quantité δAC ne peut être à la fois négative et positive, et que la différentiation de — cos.AC a donné le signe positif pour sin. $\frac{1}{2}\delta$AC, il s'ensuit réellement, tant d'après la même regle que par la regle donnée (154), qu'on doit employer par-tout (AC + $\frac{1}{2}\delta$AC). Si on eût adopté le signe négatif, on auroit eu, pour le second membre de l'équation, $-2\sin.\frac{1}{2}\delta AC$ (sin.AB $\cos.\overline{AC - \frac{1}{2}\delta AC}$ cos.A — sin.$\overline{AC - \frac{1}{2}\delta AC}$ cos.AB). Mais le choix du signe positif est indiqué par l'analogie (550), dans laquelle on voit que les changements de AC et de BC se font dans un même sens toutes les fois que l'on a (C — $\frac{1}{2}\delta$C) < 90°, comme on doit toujours le supposer (459) dans la construction des formules.

694. Quand A = 90°, le dernier terme de l'équation (692) disparoît, et mettant dans cette équation, au lieu de cos.AB,

$\frac{\cos.BC}{\cos.AC}$, valeur qui se tire, dans ce cas, de la formule (VII. 26°), on en déduit la premiere analogie (553).

Si c'est AB qui égale 90°, la formule citée donne cos.BC = sin.AC cos.A. En différentiant cette équation, et la réduisant comme nous avons dit (683), on en tire la premiere analogie (554).

695. Dans le triangle BCD on a (IX. 2°), sin.$\frac{1}{2}$(BD + BC) : sin.$\frac{1}{2}$(BD — BC) :: cot.$\frac{1}{2}$CBD : tang.$\frac{1}{2}$(BCD — D). Si on substitue les expressions (680), et qu'on observe que tang.$\frac{1}{2}$(BCD—D) = cot.(C — $\frac{1}{2}\delta$C), (685), et que le second rapport peut s'exprimer ainsi, tang.(C — $\frac{1}{2}\delta$C) : tang.$\frac{1}{2}\delta$B, l'analogie se convertit en la premiere (555).

696. La formule (VII. 31°) peut s'exprimer comme il suit; — cot.BC sin.AB = — sin.B cot.A — cos.B cos.AB. En prenant les différentielles finies, $\frac{\text{sin.}\delta\text{BC sin.AB}}{\text{sin.BC sin.(BC} + \delta\text{BC)}} = 2\sin.\frac{1}{2}\delta B \times$ (cos.AB sin.$\overline{B + \frac{1}{2}\delta B}$ — cos.$\overline{B + \frac{1}{2}\delta B}$ cot.A) : substituant à cot.A sa valeur (VII. 13°), multipliant l'équation par $\frac{\text{sin.B}}{\text{sin.AB}}$, et observant que sin.(B + $\frac{1}{2}\delta$B) sin.B + cos.(B + $\frac{1}{2}\delta$B) cos.B = cos.$\frac{1}{2}\delta$B, (II. 4°), ce que nous nous dispenserons de remarquer à l'avenir, on aura la premiere analogie (556).

697. Si A = 90°, la formule (VII. 31°) donne cos.B = tang.AB cot.BC. Changeant les signes, différentiant et réduisant comme nous avons dit (683), on aura la premiere analogie (558).

En opérant de la même maniere sur l'équation tang.A cot.BC = sin.B, à laquelle se réduit la formule (VII. 13°) quand AB = 90°, on obtient la premiere analogie (559).

698. Dans le triangle BCD on a (474), (P), tang.$\frac{1}{2}$(BD + BC) : tang.$\frac{1}{2}$(BD — BC) :: tang.$\frac{1}{2}$(BCD + D) : tang.$\frac{1}{2}$(BCD — D), ou (685) :: cot.$\frac{1}{2}\delta$C : cot.(C—$\frac{1}{2}\delta$C), ou enfin :: tang.(C—$\frac{1}{2}\delta$C) : tang.$\frac{1}{2}\delta$C. Mettant dans le premier de ces rapports les expressions (680), on verra que l'analogie formée de ce rapport et du dernier que nous venons de rapporter, se réduit à la premiere analogie (560), dans laquelle tang.$\frac{1}{2}\delta$C est affectée du signe négatif par la raison que nous avons donnée (686).

Fig.64 699. L'analogie (564) se tire immédiatement de l'analogie (562). On observera le changement de signe dans cette analogie, comparée à l'analogie (563). Il est clair que si, dans le cas de AB = 90°, les termes moyens sont — δC et — cos.B sin.BC, leur produit sera positif, et par conséquent δC, dans ce cas, acquiert le signe positif.

700. Dans le triangle BCD on a (IX. 2°), cos.$\frac{1}{2}$(BD + BC) : cos.$\frac{1}{2}$(BD — BC) :: cot.$\frac{1}{2}$CBD : tang.$\frac{1}{2}$(BCD + D). Ces expressions, transformées comme on a déja fait plus d'une fois, donneront la premiere analogie (565).

En différentiant l'équation (VII. 12°), substituant la valeur (VII. 29°) de cos.AB, et réduisant, comme on l'a déja vu, on aura la premiere analogie (566).

701. La premiere analogie (568) se déduit immédiatement de la premiere (566).

Nous obtiendrons la premiere (569), en différentiant, à notre ordinaire, l'équation cos.C = — cos.A cos.B, à laquelle se réduit la formule (VII. 12°), dans le cas où AB = 90°. Les différentielles ont un même signe dans l'analogie (569), par une cause semblable à celle que nous avons exposée (690).

Fig.65 702. Actuellement soit converti en ADE le triangle ABC; de maniere qu'on ait DE = BC : alors DF + FE = BF + FC, et par conséquent FE — BF = FC — DF. Et dans les triangles BFE, CFD, on a (IX. 4°)

sin.$\frac{1}{2}$(EBF + E) : sin.$\frac{1}{2}$(EBF — E) :: tang.$\frac{1}{2}$BE : tang.$\frac{1}{2}$(FE — BF);

sin.$\frac{1}{2}$(CDF + C) : sin.$\frac{1}{2}$(CDF — C) :: tang.$\frac{1}{2}$CD : tang.$\frac{1}{2}$(FC — DF).

Qu'on observe 1°. que la valeur du dernier terme est la même dans les deux analogies, ensorte que, si on les divise l'une par l'autre, le quotient de ces deux termes est 1; 2°. que BE = δAB, et que CD = — δAC; 3°. que B est > E et C < D, par la même raison que celle exposée (686); d'où il suit que E = B — δB, et

que

que $D = C + \delta C$. En opérant comme on a fait (685), on a $\sin.\frac{1}{2}(EBF + E) = \cos.\frac{1}{2}\delta B$; et $\sin.\frac{1}{2}(EBF - E) = \cos.(B - \frac{1}{2}\delta B)$; et de même $\sin.\frac{1}{2}(CDF + C) = \cos.\frac{1}{2}\delta C$, et $\sin.\frac{1}{2}(CDF - C) = \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Avec ces substitutions, les deux analogies ci-dessus, divisées l'une par l'autre, donneront la premiere (570).

Substituez dans l'analogie (573) la valeur (VII. 26e) de cos.BC; mettez 1 — sin.^{2}AC au lieu de cos.^{2}AC, et 1 — sin.^{2}AB au lieu de cos.^{2}AB; puis divisez le second rapport par sin.^{2}AB sin.AC cos.AC, et vous aurez l'analogie (574).

703. Quand $A = 90°$, on a (VII. 26e), cos.BC = cos.AB cos.AC. Le second membre de cette équation étant un produit de deux variables, il paroît d'abord impossible (688) d'en avoir les différentielles finies. C'est la premiere fois dans le cours de cet Ouvrage, que nous nous trouvons obligés de recourir à la sécante. La difficulté disparoît en faisant, par exemple, cos.BC séc.AB = cos.AC.

Pour avoir l'expression de la différentielle finie d'une sécante, j'observe que $\cos.B - \cos.A = \frac{1}{\text{séc.}B} - \frac{1}{\text{séc.}A} = \frac{\text{séc.}A - \text{séc.}B}{\text{séc.}B\ \text{séc.}A} =$ (séc.A — séc.B) cos.B cos.A. Donc (II. 23e), séc.A — séc.B = $\frac{2\sin.\frac{1}{2}(A - B)\sin.\frac{1}{2}(A + B)}{\cos.A\ \cos.B}$; d'où je tire, en procédant comme je l'ai fait (139),

$$\delta\text{séc.}B = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta B\ \sin.(B + \frac{1}{2}\delta B)}{\cos.B\ \cos.(B + \delta B)}.$$

Maintenant, en différentiant l'équation cos.AC = cos.BC séc.AB, j'aurai donc $-2\sin.\frac{1}{2}\delta AC\ \sin.(AC - \frac{1}{2}\delta AC) = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta AB\ \sin.(AB + \frac{1}{2}\delta AB)}{\cos.AB\ \cos.(AB + \delta AB)} \times \cos.BC$. En mettant cos.AB cos.AC au lieu de cos.BC, je trouve l'analogie formée par les deux premiers rapports (575). Celle que forment le premier et le troisieme, s'obtient en différentiant l'équation — cos.AB = — séc.AC cos.BC.

704. Quand $BC = 90°$, on a (VII. 7e), cos.A = — cot.AB cot.AC, ou cos.A tang.AB = — cot.AC. Différentiant et obser-

Fig.65 vant que l'une des différentielles devient négative par la substitution de la valeur négative de cos.A, ainsi qu'on l'a dit (690), on aura la premiere analogie (576).

Dans le cas où BC = 90°, on a aussi cos.AC = cos.B sin.AB, (VII. 28ᵉ); et par la même raison, dans le triangle ADE, cos.AE = cos.D sin.AD, ou cos.(AB + ∂AB) = cos.(C + ∂C) × sin.(AC — ∂AC): faisant ces substitutions dans la premiere analogie (576), on aura les deux premiers rapports (577).

Dans le même cas, on a encore (VII. 8ᵉ), cos.A = — cos.B cos.C = — cos.D cos.E = — cos.(C + ∂C) cos.(B — ∂B). Donc 1°. cos.(C + ∂C) : cos.B :: cos.C : cos.(B — ∂B), second et troisieme des rapports (577). 2°. En prenant, dans l'équation cos.A = — cos.B cos.C, la valeur de cos.B = $-\frac{\cos.A}{\cos.C}$, et celle de cos.C = $-\frac{\cos.A}{\cos.B}$, et les substituant alternativement dans l'analogie infinitésimale (577), on aura les analogies (578).

705. Si l'on change tous les signes dans la premiere analogie (570), et qu'ensuite on substitue aux expressions de cette analogie celles du triangle supplémentaire, par la méthode facile que j'ai donnée (440), on observera que AB diminuant, l'angle opposé dans le triangle supplémentaire doit croître; de sorte qu'au lieu de — tang.$\frac{1}{2}$∂AB, on aura tang.$\frac{1}{2}$∂C, et, par la même raison, — tang.$\frac{1}{2}$∂B au lieu de tang.$\frac{1}{2}$∂AC. On sait d'ailleurs que le cosinus d'un arc et celui de son supplément different pour le signe (36); on aura donc cos.(AB + $\frac{1}{2}$∂AB), au lieu de — cos.(C — $\frac{1}{2}$∂C), et cos.(AC — $\frac{1}{2}$∂AC) au lieu de — cos.(B + $\frac{1}{2}$∂B). Mais au lieu de cos.$\frac{1}{2}$∂C, on a cos.$\frac{1}{2}$∂AB; et cos.$\frac{1}{2}$∂AC au lieu de cos.$\frac{1}{2}$∂B, sans aucun changement de signe (154). C'est d'après ces observations que se forme la premiere analogie (579).

706. Substituons dans l'analogie (582) la valeur (VII. 8ᵉ) de cos.A; mettons 1 — sin.²B au lieu de cos.²B, et 1 — sin.²C au lieu de cos.²C; puis divisons le second rapport par sin.B cos.B × sin.²C, et nous trouverons l'analogie (583).

Quand $A = 90°$, on a (VII. 25°), cos.BC = cot.B cot.C, ou cos.BC tang.C = cot.B. Différentions à l'ordinaire (683), et nous aurons la premiere analogie (584).

Dans le même cas, cos.B = cos.AC sin.C, (VII. 10°), et par la même raison, cos.D = cos.AE sin.E, ou cos.(C + δC) = cos.(AB + δAB) sin.(B — δB). Ces substitutions dans l'analogie finie (584) donneront les deux premiers rapports (585). De plus (VI. 13°), cos.BC = cos.AB cos.AC = cos.AE cos.AD = cos.(AB + δAB) cos.(AC — δAC). Donc cos.(AB + δAB) : cos.AC :: cos.AB : cos.(AC — δAC), second et troisieme rapports (585).

En changeant les signes dans les analogies (575), puis employant le triangle supplémentaire comme nous l'avons fait (705), on obtiendra les analogies (587).

707. Prenant les différentielles finies dans l'équation sin.BC × sin.C = sin.AB sin.A, (VII. 1°), puis substituant $\frac{\text{sin.AB}}{\text{sin.C}}$ à la quantité constante $\frac{\text{sin.BC}}{\text{sin.A}}$, on aura la premiere analogie (588).

En changeant B en C et C en B dans les analogies (588 à 592), on obtient les analogies (593 à 597). On pourroit donner dans celles-ci le signe positif aux deux variations, puisqu'elles sont dans un même sens; mais je leur ai donné le signe négatif, pour conserver l'uniformité entre ces analogies et les analogies (570 et suiv.).

Lorsque A ou que BC = 90°, il n'en résulte aucune analogie différente des précédentes (588 à 597); mais alors ces analogies se simplifient, comme je l'indiquerai (728).

708. La premiere analogie (598), se trouve en prenant le produit, terme à terme, des analogies finies (570, 593).

Mettant dans l'analogie (598), sin.AB : sin.C au lieu de sin.AC : sin.B, on a la premiere (599).

Substituons la valeur (VII. 18°) de tang.C dans l'analogie (601); réduisons le second rapport à un même dénominateur que nous supprimerons; écrivons 1 — sin.^{2}BC au lieu de cos.^{2}BC; enfin

Fig.65 divisons le second rapport par sin.BC cos.BC cot.AB; nous aurons l'analogie (602).

Substituons dans celle-ci la valeur (VII. 31°) de tang.BC; réduisons encore le second rapport à un même dénominateur que nous supprimerons, et mettons 1 — sin.²B au lieu de cos.²B. Divisons ensuite ce second rapport par sin.B cos.B, multiplions-le par cos.AB tang.A, et observons que sin.²AB + cos.²AB = 1: nous trouverons l'analogie (603).

Les analogies (604 à 609) s'obtiennent en changeant B en C et C en B dans les analogies (598 à 603), et changeant les signes des différentielles, pour conserver l'uniformité, comme nous l'avons dit (707); ce qu'on remarquera aussi dans les analogies (611), qui sont tirées des analogies (610).

La premiere (610) se trouve en différentiant à l'ordinaire l'équation cos.B = tang.AB cot.BC, donnée par la formule (VII. 31°), dans le cas où A = 90°.

Quand BC = 90°, de la formule (VII. 13°) on tire tang.A × cos.AB = — tang.B. Différentiant et se rappellant ce qui a été dit (690) sur le changement de signe, on aura la premiere analogie (612).

En changeant dans celle-ci B en C, on a la premiere (613).

Fig.66 709. Soit converti en ABD le triangle ABC, de sorte qu'on ait AD = AC. Les deux côtés AB, AC seront constants, et on aura sin.AB : sin.AC :: sin.C : sin.B :: sin.D : sin.ABD. La derniere de ces analogies fait voir qu'en supposant, comme nous l'avons prescrit (459), tous les angles aigus, le sinus le plus grand correspond au plus grand angle, et le plus petit au plus petit angle : de sorte que si on a ABD > B, comme dans la figure, on doit avoir D > C. Nous ferons donc, pour employer nos expressions ordinaires, CBD = δB, ABD = B + δB, D = C + δC, CAD = — δA, (A désignant l'angle BAC du triangle primitif ABC), et BD = BC — δBC; car il est aisé de conclure de l'équation (VII. 26°) que si A diminue, BC doit aussi diminuer.

710. La derniere analogie sin.C : sin.B :: sin.D : sin.ABD donne (II. 12°), tang.$\frac{1}{2}$(ABD + B) : tang.$\frac{1}{2}$(ABD — B) :: tang.$\frac{1}{2}$(D + C) : tang.$\frac{1}{2}$(D — C). Substituez les expressions ci-dessus, vous aurez la premiere analogie (614).

Les arcs finis qui se trouvent ensemble dans l'une quelconque des analogies (615 à 618) ne sont réunis dans aucune autre de ces analogies. C'est en général ce que j'ai eu l'attention d'observer dans la Table. Il seroit inutile, il seroit même nuisible de multiplier les analogies par ce moyen. Cependant celles que donne La Caille dans le cas présent sont δB : δC :: tang.B : tang.C :: sin.AC cos.C : sin.AB cos.B :: sin.B cos.C : sin.C cos.B. Je ne sais de quel usage peuvent être les deux derniers rapports, qui l'un et l'autre supposent que l'on connoisse les angles B et C; et quel sera le Calculateur qui, dans ce cas, ne préférera pas de se servir du rapport tang.B : tang.C? Les analogies de La Caille sont plus d'une fois susceptibles de cette légere critique; et j'ai cru devoir en faire l'observation, d'autant plus que d'autres Auteurs les ont adoptées.

Lorsque l'un des côtés constants égale 90°, il n'en résulte d'autres analogies que celles données (614 à 618).

711. Dans le triangle BCD, on a (IX. 2°), sin.$\frac{1}{2}$(BC + BD) : sin.$\frac{1}{2}$(BC — BD) :: cot.$\frac{1}{2}$CBD : tang.$\frac{1}{2}$(BDC — BCD). Mais BDC — BCD = D + ADC — (ACD — C) = D + C, le triangle CAD étant isoscele. En substituant cette valeur et les expressions (709) dans l'analogie ci-dessus, on aura la premiere (619).

712. Puisque (VII. 9°), sin.BC sin.AB cos.B = cos.AC — cos.BC cos.AB; en employant la cosécante, on aura sin.AB cos.B = cos.AC coséc.BC — cot.BC cos.AB. La différentielle finie de la cosécante se déduit de la formule (II. 22°), en opérant comme nous l'avons fait (703), pour trouver la différentielle de la sécante: sa valeur est

$$-\delta\text{coséc.B} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta\text{B}\ \cos.(\text{B} + \frac{1}{2}\delta\text{B})}{\sin.\text{B}\ \sin.(\text{B} + \delta\text{B})},$$

B désignant un arc quelconque.

Fig. 66 Différentions maintenant l'équation précédente, après en avoir changé les signes pour avoir δB positive, et en adoptant le signe négatif pour δBC; le tout pour conserver l'uniformité avec l'analogie (619). Nous aurons $2\sin.\frac{1}{2}\delta B \sin.(B + \frac{1}{2}\delta B) \sin.AB = -\cos.AC \times \frac{-2\sin.\frac{1}{2}\delta BC \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.BC \sin.(BC - \delta BC)} - \frac{\sin.\delta BC \cos.AB}{\sin.BC \sin.(BC - \delta BC)}$. Substituons au lieu de cos.AC sa valeur (VII. 28e), $2\sin.\frac{1}{2}\delta BC \cos.\frac{1}{2}\delta BC$ au lieu de sin.δBC, et (II.4e) cos.BC cos.$(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$ + sin.BC sin.$(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$ au lieu de cos.$\frac{1}{2}\delta BC$: réduisons et divisons l'équation par 2 sin.AB; nous aurons la premiere analogie (620).

En changeant B en C et C en B dans les analogies (619 à 622), on a les analogies (623 à 626).

713. Quand AC = 90°, on a (VII. 9e), cos.B = — cot.BC cot.AB. Changez les signes, différentiez à l'ordinaire (690), vous aurez la premiere analogie (627).

Dans ce même cas, on a aussi (VII. 30e), cos.AB = cos.C sin.BC, ou sin.BC = $\frac{\cos.AB}{\cos.C}$. Substituez cette valeur dans l'analogie infinitésimale (619), vous aurez l'infinitésimale (628).

714. Si au lieu de AC = 90°, on avoit BC = 90°, on auroit alors (VII. 11e), cos.C = $\frac{\cos.AB}{\sin.AC}$, et (619), — δBC : δB :: 1 : cot.C. Connoissant les deux côtés constants, on trouveroit, par l'équation, l'angle C, qui serviroit ensuite pour résoudre l'analogie. C'est à quoi se réduit la formule compliquée $\delta B : \delta BC :: \cos.AB : \sqrt{(\sin.^2AC - \cos.^2AB)}$ que donne *l'Almanach astronomique* de Berlin pour l'année 1750. Mais nous verrons (764), que cette analogie est assez défectueuse pour l'usage auquel on l'applique.

715. La premiere analogie (629) se trouve en différentiant l'équation (VII. 26e). Le second rapport contient quatre parties du triangle, ce qui s'écarte du système général de la table; mais il n'est pas possible de simplifier davantage cette analogie, l'une des plus utiles de cette table, comme on le verra (Chap. XXI).

Quand un des côtés constants est de 90°, la formule (VII. 26°) devient cos.BC = cos.A sin.AB, ou cos.BC = cos.A sin.AC. En différentiant l'une ou l'autre de ces équations, on aura la premiere analogie (632).

716. Quand BC = 90°, on a (VII. 11°), $\cos.C = \frac{\cos.AB}{\sin.AC}$. Les deux côtés constants supposés connus, cette équation donnera l'angle C, qu'on employera ensuite pour résoudre l'analogie (631), sans qu'il soit besoin d'introduire un radical (760) de la forme de l'expression citée (714).

717. La formule (VII. 16°) donne cot.B = sin.AB cot.AC × coséc.A — cos.AB cot.A. Changeons les signes; différentions, en prenant (712) la différentielle de la cosécante; adoptons pour δA le signe négatif; mettons $2\sin.\frac{1}{2}\delta A \cos.\frac{1}{2}\delta A$ au lieu de sin.δA: enfin substituons la valeur (VII. 34°) de cot.AC, et (II. 4°) cos.A cos.$(A - \frac{1}{2}\delta A)$ + sin.A sin.$(A - \frac{1}{2}\delta A)$ au lieu de $\cos.\frac{1}{2}\delta A$; réduisons et nous aurons la premiere analogie (633).

En substituant dans celle-ci la valeur (VII. 29°) de cos.AB, réduisant le dernier terme de l'analogie à un même dénominateur, et observant que sin.A cos.$\overline{A - \frac{1}{2}\delta A}$ — cos.A sin.$\overline{A - \frac{1}{2}\delta A}$ = sin.$\frac{1}{2}\delta$A, (II. 2°), on aura la premiere analogie (634).

La premiere (635) s'obtient en divisant l'une par l'autre les analogies différentielles finies (619, 629), et substituant la valeur (VII. 24°) de sin.AB. Quoique cette analogie contienne quatre parties du triangle dans le second rapport, j'ai cru ne devoir pas l'omettre, parcequ'elle correspond à une infinitésimale qui n'en contient que trois.

Les analogies (638 à 642) s'obtiennent en changeant B en C et C en B dans les analogies (633 à 637).

718. Quand AB = 90°, on a (VII. 16°), tang.B = sin.A tang.AC, et (VII. 17°), cot.C = — cos.AC cot.A. En différentiant (683) chacune de ces deux équations, on aura les premieres analogies (643, 644).

Fig.66 Dans le même cas, on a (VII. 12°), cos.C = — cos.A cos.B. Si l'on substitue cette valeur dans la premiere analogie (644), sin.δA devient négatif, et l'analogie se change en celle-ci, — sin.δA : sin.δC :: sin.(A — δA) : sin.(C + δC) cos.B. Mais dans le triangle ABD, on a sin.BAD = sin.BD sin.D, (448), ou sin.(A — δA) = sin.(BC — δBC) sin.(C + δC). Substituons cette valeur dans la derniere analogie ci-dessus, et nous en tirerons la premiere (645).

Enfin quand AB = 90°, le triangle ABD donne (VII. 28°), cos.AD = cos.ABD sin.BD, ou sin.(BC — δBC) = $\frac{\text{cos.AC}}{\text{cos.(B + }\delta\text{B)}}$. En substituant cette valeur dans la premiere analogie (645), on aura la premiere (646).

719. Toutes les analogies (647 à 679) se trouvent en prenant les parties du triangle opposées à celles que renferment les analogies (614 à 646), et faisant usage du triangle supplémentaire, après avoir changé les signes conformément à ce que nous avons fait (705). Au surplus, pour diminuer la difficulté relativement aux signes, j'ai renvoyé à la table VII : c'est de cette table que j'ai tiré les valeurs dont les substitutions m'ont donné celles d'entre les analogies infinitésimales, que j'ai formées par cette voie.

Dans la premiere analogie (652) on observera qu'au lieu de donner au troisieme terme le signe négatif, tel qu'il devroit l'avoir, j'ai rendu le premier terme positif : ce qui a lieu dans plusieurs des analogies suivantes. Dans l'analogie (661), le quatrieme terme est celui qui seroit négatif, si l'on ne rendoit pas le premier terme positif.

Pour tirer la premiere analogie (662) de la premiere (629), il ne faut pas changer les signes dans celle-ci.

Dans le premier rapport de l'analogie finie (665), j'ai préféré les signes positifs, pour conserver l'uniformité avec les analogies précédentes.

S'il reste quelques difficultés pour l'intelligence des signes dans les

les analogies (647 à 679), on pourra chercher la démonstration directe de ces analogies, par les méthodes que j'ai employées pour démontrer les analogies correspondantes (614 à 646).

720. On observera que la derniere analogie (679), dont nous ferons usage (775), n'exigeant que deux données AC et B pour faire connoître le rapport entre les deux différentielles, cette analogie est préférable à celle que La Caille a donnée, et qui est, en changeant les lettres employées par cet Auteur, $\delta BC : \delta AB :: \sin.B \sin.BC : \frac{1}{2}\sin.2AC$; de sorte qu'elle exige que l'on connoisse non seulement AC et B, mais encore BC.

Réflexions et explications sur l'usage des analogies (541 *à* 679).

721. Peut-être ne verra-t-on pas au premier coup d'œil quelle est l'utilité des analogies différentielles finies, analogies absolument nouvelles, et dont la forme est souvent compliquée.

1°. Ces analogies renferment la solution immédiate, et ordinairement la plus simple, des problêmes relatifs à deux triangles obliquangles ayant deux parties communes ou égales, lorsque l'énoncé du problême conduit à la considération de quelques différences entre les parties de l'un de ces triangles et les parties de l'autre : nous en verrons divers exemples (Chap. XXI).

2°. Les analogies différentielles finies apprendront au Calculateur ce qu'il y a de négligé dans les infinitésimales correspondantes; de sorte qu'en se servant de celles-ci, il saura à-peu-près à quelle erreur il s'expose, et qu'il pourra ou diminuer cette erreur ou l'éviter, en ayant recours aux analogies finies; avantage réel, surtout quand les différentielles sont divisées ou multipliées par des quantités voisines de zéro ou de l'infini, parcequ'alors les analogies infinitésimales sont sujettes à des erreurs énormes, et même infiniment grandes.

3°. Cet avantage s'étend aussi aux analogies infinitésimales qui n'ont point d'analogies finies correspondantes. Car on peut former

celles-ci, sinon rigoureusement, du moins très approchées, même lorsque les *différences* sont de quelques degrés, en procédant comme il suit.

722. Je suppose, par exemple, qu'ayant à employer l'analogie infinitésimale (636), on desire d'atteindre la plus grande exactitude qu'il sera possible. Comme cette analogie est tirée de la précédente, je simplifie d'abord le second rapport de l'analogie différentielle finie (635), par une supposition à-peu-près exacte. Pour cet effet, j'établis ce principe, que toutes les parties variables d'un triangle quelconque ABC arrivent en même temps à la moitié de leurs variations respectives, que, par exemple, quand A est devenu $A - \frac{1}{2}\delta A$, alors aussi BC se trouve être $BC - \frac{1}{2}\delta BC$, et ainsi des autres variables. Cette supposition n'est certainement pas rigoureuse; mais en général elle approche très fort de la vérité, lorsque les variations ne sont que de peu de degrés; elle est même très exacte dans les cas ordinaires, où les *différences* sont rarement d'un degré. Cela posé, comme AB, AC sont les parties constantes dans les analogies que nous avons à considérer, nous aurons, par la regle (448), $\sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \sin.(A - \frac{1}{2}\delta A) :: \sin.AB : \sin.(C + \frac{1}{2}\delta C)$. Substituant le second au premier de ces rapports dans l'analogie finie (635), et écrivant aussi $\sin.AB : \sin.C$ au lieu de $\sin.BC : \sin.A$, cette analogie deviendra $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B :: \sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC) : \sin.AC \cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$, et, pour le remarquer en passant, elle pourroit sous cette forme moins compliquée servir de même à guider dans l'usage de l'infinitésimale (635). Substituons actuellement la valeur de $\cos.(C + \frac{1}{2}\delta C)$, qui, prise (VII. 11e) et exprimée d'après notre supposition, sera $\frac{\cos.AB - \cos.AC \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.AC \sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}$; nous aurons

$$-\sin.\tfrac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta B :: 1 : \frac{\cos.AB - \cos.AC \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}{\sin.^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)}.$$

C'est l'analogie dont il faudroit se servir au lieu de l'analogie (636), si l'on desiroit une grande approximation.

723. On peut employer $-\delta A : \delta B$ au lieu de $-\sin.\frac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\frac{1}{2}\delta B$, en ayant égard aux limites que j'ai assignées (259); et l'usage apprendra que souvent même on peut passer ces limites sans inconvénient dans les analogies différentielles des triangles sphériques, parceque les deux premiers termes sont de même nature, et que, par conséquent, en employant les arcs au lieu de leurs lignes trigonométriques, les deux erreurs se compensent de maniere que celle qui peut affecter le résultat est ordinairement insensible.

724. Essayons pour second exemple de convertir l'analogie (637) en une autre à très peu près rigoureuse; opération moins facile que la précédente, parceque cette analogie est tirée d'une autre infinitésimale (636) qui n'a point d'analogie différentielle finie correspondante, de sorte qu'il faut remonter à la premiere analogie (635). J'emploie les réductions déjà faites, et je substitue dans la derniere analogie (722) la valeur (VII. 28°) de cos.AC prise comme il suit : $\cos.AC = \cos.(B + \frac{1}{2}\delta B)\sin.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)\sin.AB + \cos.(BC - \frac{1}{2}\delta BC)\cos.AB$. Au lieu de $\cos.^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, je mets $1 - \sin.^2(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, je réduis et j'ai

$$-\sin.\tfrac{1}{2}\delta A : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta B :: 1 : \cos.AB - \frac{\sin.AB\cos.(B+\frac{1}{2}\delta B)}{\text{tang.}(BC-\frac{1}{2}\delta BC)}.$$

725. On ne se sert ordinairement des analogies infinitésimales que pour chercher la valeur d'une différentielle; et l'on pourroit penser que mes analogies finies ne sont pas susceptibles du même usage, puisqu'elles renferment souvent dans le second rapport les différentielles contenues dans le premier. Mais j'ai déjà donné (281, 282) deux méthodes pour calculer la valeur d'une différentielle précisément dans ce cas. De plus il est nécessaire d'observer que les analogies finies sont toutes rigoureuses, et par conséquent propres à donner la valeur exacte de l'une quelconque des quantités qu'elles contiennent, et non pas seulement de l'une des différentielles.

J'ai marqué d'un astérisque * les analogies au lieu desquelles

on peut employer, et quelquefois même avec avantage, la méthode suivante qui est rigoureuse et que me fournit la table VII. Huit de ces analogies (573, 574, 582, &c.) sont infinitésimales, et n'ont point d'analogie finie correspondante ; c'est sur-tout dans le cas de ces huit analogies que la méthode que je vais proposer est avantageuse.

Soit par exemple δC l'inconnue dans l'analogie (546). Puisque AB et A sont les parties constantes relativement à cette analogie, qui d'ailleurs ne renferme point AB, je cherche dans la table VII une valeur de AB exprimée par le moyen de AC, A et C, parties contenues dans cette même analogie. La formule 35e me donne

Fig.64 pour le triangle ABC, $\text{tang.AB} = \frac{\text{sin.AC}}{\text{sin.A cot.C} + \text{cos.A cos.AC}}$; et pour le triangle ABD, $\text{tang.AB} = \frac{\text{sin.AD}}{\text{sin.A cot.D} + \text{cos.A cos.AD}}$. En mettant en équation ces deux valeurs de tang.AB, dans la seconde desquelles je substitue les expressions (680), j'ai . . . . . (sin.A cot.$\overline{C - \delta C}$ + cos.A cos.$\overline{AC + \delta AC}$) sin.AC = (sin.A cot.C + cos.A cos.AC) sin.$\overline{AC + \delta AC}$. Pour simplifier, je divise par cos.A ; il reste cot.$\overline{C - \delta C}$ sin.AC tang.A = (tang.A cot.C + cos.AC) sin.$\overline{AC + \delta AC}$ − sin.AC cos.$\overline{AC + \delta AC}$; équation qui donne immédiatement la valeur de cot.$\overline{C - \delta C}$, et par conséquent aussi celle de δC.

Si de cette équation on vouloit déduire la valeur de AC, ou celle de (AC + δAC), on auroit recours à la méthode (369). Il suffit d'en prévenir une fois pour tous les cas semblables.

726. On peut avoir compris, par les démonstrations que j'ai données des analogies de la table, quel est l'usage qu'on doit faire des signes qui précèdent les différentielles. Mais pour éviter toute équivoque, je préviens 1°. que dans le second rapport des analogies finies, il est nécessaire d'employer les différentielles avec le signe qui convient au cas que l'on considere. Si, par exemple, on fait usage de l'analogie (545), on doit employer tang.(BC + $\frac{1}{2}\delta$BC),

quand le côté BC croît en variant, et tang.$(BC - \frac{1}{2}\delta BC)$, quand ce côté décroît en variant. 2°. Dans les analogies finies ou infinitésimales, les signes que j'ai adoptés, dans le premier rapport, pour les différentielles ou pour leurs lignes trigonométriques, servent seulement à indiquer que les variations se font toutes deux en un même sens, si les différentielles ont un même signe; ou l'une en croissant, l'autre en décroissant, si les différentielles ont un signe différent. Cette regle suppose que le résultat du second rapport soit positif; elle doit se renverser, lorsque ce résultat est négatif. Ainsi en employant la premiere analogie (545), on saura, par exemple, que AC et C varient en sens contraire, quand on aura $(BC + \frac{1}{2}\delta BC) < 90°$; et que AC et C varient dans le même sens quand on aura $(BC + \frac{1}{2}\delta BC) > 90°$, car alors tang.$(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ étant négative, les deux signes négatifs des termes moyens donnent un produit positif. Tel est l'avantage qu'on retirera des signes des différentielles : ils sont aussi d'une utilité réelle (730) pour l'application des méthodes (284, 285).

727. Il y a, dans ma table, plus de 70 analogies qui renferment le cosinus de quelque côté ou de la variation de quelque côté, et qui cependant peuvent se transférer aux triangles rectilignes par le moyen des regles que j'ai données (425). C'est sur-tout en cela que ces regles me paroissent utiles, puisqu'en supposant leur application, une seule table renferme une collection abondante et complete dans son genre des analogies différentielles des triangles soit sphériques soit rectilignes. Ces derniers ne fournissent que quatre analogies finies (279, 10ᵉ à 13ᵉ) qui soient plus simples que celles qu'on déduiroit des analogies correspondantes des triangles sphériques (635, 640, 629).

Il est clair 1°. que les analogies relatives au cas où l'un des côtés est de 90°, ne peuvent par leur nature se transférer aux triangles rectilignes, puisqu'il est nécessaire pour cela que l'analogie soit applicable à un triangle infiniment petit (425); 2°. que dans le cas où un angle est constant, les analogies qui contiennent dans le

premier rapport les variations des deux autres angles ne peuvent être d'aucune utilité pour les triangles rectilignes, dans lesquels ces deux variations sont nécessairement égales entre elles; 3°. que dans le cas où deux angles sont constants, les analogies qui contiennent la variation du troisieme dans le premier rapport, sont encore opposées à la nature des triangles rectilignes. À l'exception de ces trois classes d'analogies, on pourra traduire utilement pour l'usage des triangles rectilignes les autres analogies de ma table : une seulement (573) de ces analogies se réduit à zéro, lorsqu'on lui applique les regles (425).

Observons encore que le premier terme du conséquent du second rapport de l'analogie finie (666) doit se négliger, suivant l'esprit des regles (425), dans l'application de cette analogie aux triangles rectilignes; puisque le produit $\sin.(AC + \delta AC) \sin.AC \sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC)$ représente un infiniment petit du troisieme ordre. Cette observation a lieu de même pour la premiere analogie (671).

Pour donner un exemple de l'application des analogies différentielles sphériques aux triangles rectilignes; si dans la premiere (546) on fait $\sin.\frac{1}{2}\delta AC = \frac{1}{2}\delta AC$, $\sin.AC = AC$, et qu'on fasse encore $\cos.\frac{1}{2}\delta AC = 1$, $\cos.(AC + \frac{1}{2}\delta AC) = 1$, (425), l'analogie devient $\delta AC : -\sin.\delta C :: AC : \sin.C \sin.(C - \delta C) \cot.A + \sin.(C - \delta C) \cos.C$; et c'est ce qu'on trouve par la Trigonométrie rectiligne, en substituant la valeur de BC (III. 21°) dans l'analogie (279, 1°).

728. J'ai donné des analogies pour le cas où quelqu'une des parties constantes est de 90°; mais il ne faut pas en conclure que ces analogies sont les seules dont on puisse se servir en pareil cas. Par exemple les analogies (627, 628) données pour le cas où $AC = 90°$ n'excluent pas l'usage des précédentes (619 à 626), dont quelques-unes sont même simplifiées dans ce cas, parcequ'on a $\sin.AC = 1$, $\cos.AC = 0$ et $\cot.AC = 0$, (42). Mais nous avons cru devoir donner aussi les analogies (627, 628), parce-

qu'elles ne se déduisent pas immédiatement des précédentes simplifiées. Il en est de même des autres analogies pareilles, à l'exception des analogies (548, 564, 568) : si je n'ai pas omis celles-ci, c'est à cause de leur rapport avec les analogies (549, 563, 569).

On observera que, lorsque le second rapport d'une analogie contient la tangente de l'arc de 90°, il faut éliminer cette tangente, en multipliant le rapport par la cotangente du même arc : autrement l'analogie ne pourroit être simplifiée et ne seroit d'aucun usage, puisqu'elle contiendroit une expression de valeur infinie.

729. La Caille et d'autres Auteurs ont donné quelques analogies infinitésimales pour le cas où quelqu'une des parties variables est de 90°. Pour moi, je me suis borné à la considération des cas où quelqu'une des parties constantes est de 90°, afin que ma table fournît les analogies différentielles finies même pour les triangles constamment ou rectangles ou rectilateres : quoique souvent elles soient moins commodes pour le calcul numérique que ne le sont les proportions (441 à 457), il m'a semblé qu'elles devoient être rapportées, ne fût-ce, comme nous l'avons dit (721, 2°.), que pour servir d'avertissement au Calculateur qui emploiera les infinitésimales correspondantes.

Mais si j'eusse voulu considérer aussi chacune des parties variables comme étant de 90°, et donner les analogies relatives à chacune de ces suppositions, ma table seroit devenue beaucoup plus longue, et n'eût pas été beaucoup plus utile. Je me contenterai donc d'indiquer par un exemple comment on peut parvenir en pareils cas à des expressions fort simples. Je suppose qu'on ait à employer la premiere analogie (551), et que $BC = 90°$: on aura $\cos.BC = 0$, et $\sin.(BC + \frac{1}{2}\delta BC) = \cos.\frac{1}{2}\delta BC$; ensorte que l'analogie deviendra $\sin.\frac{1}{2}\delta AC : \sin.\frac{1}{2}\delta BC :: \cos.\frac{1}{2}\delta BC \sin.AC : \cos.\frac{1}{2}\delta AC \cos.AB$. Convertissant cette analogie en équation, et

réduisant à l'aide de la formule (I. 6ᵉ), on trouve sin.∂AC : sin.∂BC :: sin.AC : cos.AB, analogie déjà fort simple. Mais quand BC = 90°, cos.C = $\frac{\text{cos.AB}}{\text{sin.AC}}$, (VII. 11ᵉ); donc on a sin.∂AC : sin.∂BC :: 1 : cos.C, analogie plus simple encore, et qu'on peut employer au lieu de la premiere (550), lorsque BC = 90°.

730. Lorsque le triangle variable n'aura *qu'une partie constante*, ou même *qu'il n'en aura point*, les analogies (541 à 679) serviront également, avec les conditions et en suivant les regles exposées (283, 284, 285) pour les triangles rectilignes.

Il me reste à observer qu'il n'y a jamais lieu d'employer R″, (272), dans les analogies infinitésimales de la Trigonométrie sphérique, attendu que les deux variations qui forment le premier rapport sont toujours de même nature, et que par conséquent l'une et l'autre se prennent également en secondes.

Exemples du calcul des Analogies différentielles des Triangles sphériques.

Fig.48 731. Supposons que dans l'exemple III, (500), il puisse y avoir une erreur de 1° sur le côté BD, ou, ce qui revient au même, que les moyens employés pour mesurer le chemin du bâtiment puissent laisser une incertitude d'un degré. On demande quelle seroit en ce cas l'erreur dans la longitude calculée ou dans l'angle au pôle. Il y a alors dans le triangle ABD deux côtés constants AB, AD, et on cherche la variation de A dépendante de celle du côté opposé BD; circonstances qui sont celles des analogies (629), dans lesquelles il faut seulement changer C en D.

On observera d'abord que si l'on ne sait pas en quel sens l'erreur ∂BD a été commise, on ne peut pas faire usage de l'analogie différentielle finie, dans laquelle il faut employer (BD ± ½∂BD). Je fais donc comme il suit le calcul de l'infinitésimale.

log.

$$\begin{aligned} -\log.(\delta BD = 3600'') &= 3,556303 \\ \log.\sin.(BD = 37^\circ 25') &= 9,783623 \\ (500),\ \text{compl. log.}(\sin.AB\ \sin.AD) &= 0,204796 \\ \text{compl.log.sin.}(A = 27^\circ 8') &= 0,340975 \\ \log.\delta A &= 3,885697 \end{aligned}$$

Donc un degré d'erreur sur le côté BD en produit une de $2^\circ 8'$ environ sur l'angle A, dans le même sens (726).

732. Si l'on n'avoit pas les analogies infinitésimales, il faudroit, pour arriver à ce résultat, calculer deux fois l'exemple III, (500); une premiere fois en faisant $BD = 36^\circ 25'$, et une seconde en faisant $BD = 38^\circ 25'$; ensuite on prendroit la demi-différence des deux valeurs de A que fourniroient ces deux calculs. Les analogies infinitésimales sont donc précieuses lorsqu'on ignore si la variation donnée est positive ou négative. Mais au contraire si on le sait, comme il arrive dans la plupart des cas auxquels on les a appliquées jusqu'à présent, ce même exemple fait reconnoître leur imperfection, et par conséquent l'utilité des analogies finies que j'ai proposées.

733. En effet supposons que l'erreur δBD soit en plus. En employant dans le calcul (731), $\sin.(BD + \frac{1}{2}\delta BD) = \sin.37^\circ 55'$ au lieu de $\sin.BD$, et $\sin.(A + \frac{1}{2}\delta A) = \sin.28^\circ 12'$ au lieu de $\sin.A$, comme le prescrit l'analogie finie, on trouve $\delta A = 2^\circ 5' 2''$. L'usage de l'analogie infinitésimale en pareil cas produiroit donc environ $3'$ d'erreur dans la valeur de δA.

Si on vouloit cette valeur avec toute la précision possible, on emploieroit dans le calcul précédent $\sin.28^\circ 10' \frac{1}{2}$ au lieu de $\sin.28^\circ 12'$, et on trouveroit $\delta A = 2^\circ 5' 8''$.

Quant à l'emploi des arcs au lieu des sinus dans le premier rapport de l'analogie, l'épreuve démontreroit que la différence qui en résulte dans le calcul est insensible, comme je l'ai avancé (723).

734. Avec les mêmes données dans le triangle ABD, je sup-

pose actuellement que les valeurs de AB et BD soient considérées comme exactes, et qu'il y ait une incertitude d'un degré sur le côté AD, c'est-à-dire sur la latitude du lieu où se trouve le vaisseau. On demande quelle erreur il en résultera pour la longitude, c'est-à-dire pour la valeur de A. Alors les deux côtés AB, BD sont constans, et l'on cherche la variation de l'angle opposé à BD, dépendante de celle du troisieme côté. Changeant B en A, A en B et D en C, pour que le triangle BAD de la figure puisse se comparer au triangle ABC de la table, j'observe que c'est le cas des analogies (619 à 622). Mais comme nos données sont $B = 27° 8'$, $AB = 71° 30'$, $AC = 37° 25'$, $BC = 41° 9'$, et $\delta BC = 1°$, il est facile de voir qu'il faut avoir recours aux analogies (620). Je prends l'infinitésimale, et je fais le calcul comme il suit:

log.($\delta BC = 3600''$) =	3,556303	. . . . .	3,556303
compl.log.sin.B =	0,340975	log.cot.B =	0,290340
log.cot.AB =	9,524520	log.— cot.BC =	0,058541
	3,421798		— 3,905184

Ces deux logarithmes répondent à $44' 1'',2$ et à $-2° 13' 58'',7$; et par conséquent on a $\delta B = -1° 29' 57''\frac{1}{2}$. Dans ce cas les variations δBC et δB se font dans le même sens, puisqu'elles ont un signe différent dans le premier rapport de l'analogie, et que le résultat du second rapport est négatif (726).

J'ai donné le signe négatif au logarithme 3,905184, non qu'il soit en effet un logarithme négatif (164), mais parceque'il correspond à une quantité négative. C'est au surplus ce qu'il est toujours facile de distinguer.

735. Cherchons maintenant quelle est l'erreur de la formule infinitésimale dont nous venons de nous servir. Pour cela je suppose que l'on sache que la variation de BC est en moins. Je ferai usage du second rapport de l'analogie finie (620), et en faisant le calcul je supposerai la valeur de δB absolument inconnue, pour donner un exemple de la méthode enseignée (281).

log.(δBC = 3600″) =	3,556303		3,556303
log.cot.AB =	9,524520	log.—cos.B =	9,949364
log.sin.(BC — $\frac{1}{2}\delta$BC) =	9,813872 . .	log.cos.	9,880072
compl.log.sin.(BC—δBC) =	0,190581		0,190581
log.constant	3,085276	log.const.—	3,576320
compl.log.sin.B =	0,340975		0,340975
	3,426251	—	3,917295

Ces logarithmes donnent, pour valeur approchée, δB = 44′ 28″ — 2° 17′ 46″ = — 1° 33′ 18″. Ce résultat étant négatif, la variation de δB est dans le même sens que celle de BC par les raisons déjà exposées; aux logarithmes constants ci-dessus on doit donc ajouter compl.log.sin.(B — $\frac{1}{2}\delta$B = 26° 21′); ce qui donne, pour valeur plus approchée, δB = 45′ 42″ — 2° 21′ 33″ = — 1° 35′ 51″. Enfin employant, d'après cette approximation, sin.(B — $\frac{1}{2}\delta$B = 26° 20′), on a pour valeur exacte, δB = — 1° 35′ 55″.

Donc dans cet exemple l'analogie infinitésimale seroit en erreur de 6′.

On verra (760, 764) des erreurs plus graves résultantes de l'emploi des analogies infinitésimales, qui cependant sont les seules qui aient été en usage jusqu'à présent.

736. Si l'on vouloit avoir directement et par un seul calcul la valeur de δB, quelle que fût d'ailleurs sa grandeur, on développeroit sin.(B + $\frac{1}{2}\delta$B), comme nous l'avons dit (282), ou bien on mettroit $\frac{1}{2}$cos.B — $\frac{1}{2}$cos.(B + δB) au lieu de sin.(B + $\frac{1}{2}\delta$B) sin.$\frac{1}{2}\delta$B, (II. 16°). Alors appellant p le produit du premier et du quatrième terme de l'analogie, on auroit cos.(B + δB) = cos.B — 2p. Si dans le calcul précédent on met sin.($\frac{1}{2}\delta$BC = 30′) au lieu de δBC, on trouve p = — 0,0061882, en faisant abstraction du signe négatif de sin.$\frac{1}{2}\delta$BC, qui ne doit servir que d'avertissement (726). Mais en faisant usage des sinus naturels, cos.B = 0,8899476: donc cos.(B + δB) = 0,8899476 +

0,0123764 = 0,9023240 = cos. 25° 32′ 5″. Or B = 27° 8′; donc δB = — 1° 35′ 55″.

Si l'on cherchoit de même directement la valeur finie de δBC, l'opération seroit plus compliquée : on arriveroit à une équation dans laquelle seroient contenus sin. δBC et cos. δBC, et l'on résoudroit cette équation par la méthode expéditive que j'ai donnée (369). Mais cette recherche de δBC est un des cas dans lesquels il est mieux d'avoir recours à la méthode (725).

CHAPITRE XX.

Résumé sur l'application de la Trigonométrie à la résolution des problêmes.

737. ÉTANT donné un problême quelconque, pourvu qu'il puisse se résoudre par la seule considération des triangles, on en cherchera la solution dans cette Trigonométrie de la maniere suivante. 1°. Si les données et la chose cherchée appartiennent à un seul triangle, la solution se trouvera dans l'un des Chapitres VIII, IX, XV, XVI, XVIII. 2°. Si les données et la chose cherchée se trouvent distribuées en deux triangles, on en aura la solution dans les Chapitres X ou XIX, ou en opérant d'après les méthodes (322, 323, 342), ou en ayant recours aux formules (441 à 457) selon les cas. 3°. Si les données et la chose cherchée sont tirées de plus de deux triangles, on considérera deux triangles à la fois, on en cherchera les solutions d'après ce que nous venons de dire, et on les liera l'une à l'autre, selon que le cas le permettra, pour arriver à la solution finale demandée.

738. Au premier aspect ces avertissements pourront sembler au moins inutiles. Mais on verra dans le Chapitre suivant avec

quelle facilité, quelle simplicité nous avons résolu la plus grande partie des problêmes de l'Astronomie ; soit parce qu'en considérant leurs conditions nous avons suivi la marche facile que nous venons d'indiquer, soit parceque nous avons fait usage d'expressions commodes des différences finies des lignes trigonométriques, expressions qui jusqu'à présent manquoient aux Traités de Trigonométrie : et cet essai sur les problêmes de l'Astronomie nous donne lieu de croire que dans les autres Sciences ou Arts soumis au Calcul, il y a peu de problêmes dont ce Traité ne donne promptement la solution, lorsqu'ils peuvent être résolus par la seule considération des triangles.

CHAPITRE XXI.

Applications de la Trigonométrie à l'Astronomie.

739. Ce Chapitre suppose le Lecteur initié dans l'Astronomie dont les éléments ne peuvent entrer dans ce Traité : ceux qui ne les connoîtront pas feront abstraction des théories et des dénominations, s'ils veulent parcourir ce qui suit, et se borneront à étudier les opérations analytiques, qui sont d'un usage général dans les Mathématiques. Je suivrai autant qu'il me sera possible l'ordre des problêmes contenus dans l'Astronomie de M. de la Lande, et je renverrai souvent à cet Ouvrage, le meilleur sans contredit, le plus complet et le plus accrédité sur la science sublime de l'Astronomie dont il augmente encore l'intérêt. J'omettrai les problêmes de moindre importance, ainsi que ceux qui regardent la détermination des éléments de l'orbite d'une planete ou d'une comete, problêmes dont je me réserve de parler ailleurs. J'omettrai de même, pour ne me pas répéter, les problêmes du plus court cré-

puscule et du plus grand éclat de Vénus, dont j'ai donné les solutions dans l'*Encyclopédie méthodique* qui s'imprime actuellement à Paris.

740. *Connoissant l'ascension droite et la déclinaison d'un astre, et l'obliquité de l'écliptique, trouver la longitude et la latitude de cet astre.*

Fig. 67 Soit P le pôle boréal de l'équateur LQ, E le pôle boréal de l'écliptique LT, L le premier point du belier, S l'astre que je suppose dans la latitude boréale et dans le premier quart de l'équateur et de l'écliptique ; position à laquelle il est à propos de rapporter la solution générale des problêmes, parcequ'en faisant sur les signes des lignes trigonométriques les changements convenables, la solution satisfait de même à toute autre position. On a donc PL = 90° = EL, (382), et LPE = 90° = LEP, (390). Or LM ou LPM, (386), est l'ascension droite donnée ; donc SPE = 90° + *asc. dr.* La déclinaison donnée est SM, et par conséquent PS = 90° — *décl.* L'obliquité de l'écliptique est TLQ = PE, (391). On connoît donc trois parties du triangle PSE, savoir PS, PE et SPE. On cherche 1°. la longitude LN ou LEN, qu'on peut connoître par le moyen de l'angle PES = 90° — *long.* ; 2°. la latitude SN, qu'on trouvera par le moyen de ES = 90° — *lat.* Par conséquent le problême n'exige que la résolution du seul triangle PES.

Étant donnés deux côtés PS, PE, et l'angle compris SPE, il y a (470 et suiv.) quatre manieres de déterminer l'angle PES. La seconde est la plus courte : la quatrieme est un peu plus laborieuse ; mais elle a l'avantage de faire connoître en même temps l'angle de position PSE. Lorsque la connoissance de cet angle est inutile, je préfere la maniere qui, en apparence, est la plus longue, c'est-à-dire la premiere, parcequ'elle n'exige d'attention que pour les signes, (42, 744) ; tandis que les trois autres peuvent induire en erreur dans bien des cas, si l'on n'a pas sous les yeux une figure à-peu-près exacte. Appliquant donc la premiere solution au triangle

PES, on a tang.PES $= \frac{\text{sin.SPE}}{\text{sin.PE cot.PS} - \text{cos.PE cos.SPE}}$, ou cot.PES $=$ $\frac{\text{sin.PE cot.PS}}{\text{sin.SPE}}$ — cos.PE cot.SPE. Substituant dans cette équation les dénominations ou valeurs de PES, PE, &c. données ci-dessus, et observant que cot.SPE $=$ — cot.(90° + *asc.dr.*), (36), on a

$$\text{tang.}long. = \frac{\text{sin.}obl.\ \text{tang.}décl.}{\text{cos.}asc.dr.} + \text{cos.}obl.\ \text{tang.}asc.dr.$$

ou, pour plus de commodité dans le calcul,

$$\text{tang.}long. = \text{cos.}obl.\ \text{tang.}asc.dr. \left(\frac{\text{tang.}obl.\ \text{tang.}décl.}{\text{sin.}asc.dr.} + 1\right).$$

En observant les regles des signes, (42, 744), on aura toujours la longitude dans le quart de l'écliptique auquel l'astre correspondra, pourvu qu'on fasse encore attention que si l'ascension droite est dans le premier ou dans le dernier quart, la longitude ne peut jamais être dans le second ou dans le troisieme, et que si l'ascension droite est dans le second ou dans le troisieme, la longitude ne peut jamais être dans le premier ou dans le dernier.

741. Si dans la formule que nous venons de trouver il déplaît d'avoir à chercher des logarithmes dans deux tables, on pourra n'employer que les tables trigonométriques, en divisant le calcul en deux équations formées comme je l'ai enseigné (198, 203, 202):

$$\text{tang.B} = \sqrt{\frac{\text{tang.}obl.\ \text{tang.}décl.}{\text{sin.}asc.dr.}};$$

$$\text{tang.}long. = \frac{\text{cos.}obl.\ \text{tang.}asc.dr.}{\text{cos.}^2\text{B}}.$$

Lorsque la quantité sous le radical sera négative, au lieu de ces formules on aura recours aux suivantes :

Si $-\frac{\text{tang.}obl.\ \text{tang.}décl.}{\text{sin.}asc.dr.}$ est < 1, on a

$$\text{cos.B} = \sqrt{-\frac{\text{tang.}obl.\ \text{tang.}décl.}{\text{sin.}asc.dr.}},$$

$$\text{tang.}long. = \text{cos.}obl.\ \text{tang.}asc.dr.\ \text{sin.}^2\text{B}.$$

Si $-\frac{\text{tang.}obl.\ \text{tang.}décl.}{\text{sin.}asc.dr.}$ est > 1, on a

$$\frac{1}{\text{cos.B}} = \sqrt{-\frac{\text{tang.}obl.\ \text{tang.}décl.}{\text{sin.}asc.dr.}},$$

$$\text{tang.}long. = -\text{cos.}obl.\ \text{tang.}asc.dr.\ \text{tang.}^2\text{B}.$$

Fig. 67 On vera que pour passer d'une ligne trigonométrique de l'a iaire B à une autre ligne trigonométrique du même a st pas nécessaire de calculer cet angle lui-même en utes, &c., ainsi que nous l'avons fait voir (200).

ir *trouver la latitude*, seconde partie du problème (740). réfere de même la premiere solution (476), d'autant plus ogarithmes, à l'exception d'un seul, se trouvent dans le cal a longitude. J'ai cos.SE = cos.PE cos,PS + sin.PE sin PE, et substituant les dénominations (740),

sin. *lat.* — cos. *obl.* sin. *décl.* — sin. *obl.* cos. *décl.* sin. *asc. dr.*

ou, pour plus de commodité dans le calcul,

sin. *lat.* = cos. *obl.* sin. *décl.* (1 — tang. *obl.* cot. *décl.* sin. *asc. dr.*).

743. Et à l'imitation de ce que nous venons de faire (741);

Si tang. *obl.* cot. *décl.* sin. *asc. dr.* est < 1, on a

$$\cos.C = \sqrt{\text{tang. } obl. \text{ cot. } décl. \text{ sin. } asc.\, dr.}$$

$$\sin. lat. = \cos. obl. \sin. décl. \sin.^2 C.$$

Si tang. *obl.* cot. *décl.* sin. *asc. dr.* est > 1, on a

$$\frac{1}{\cos.C} = \sqrt{\text{tang. } obl. \text{ cot. } décl. \text{ sin. } asc.\, dr.}$$

$$\sin. lat. = -\cos. obl. \sin. décl. \text{ tang.}^2 C.$$

Lorsque la quantité sous le signe radical sera négative, au lieu des formules précédentes on aura

$$\text{tang.} C = \sqrt{-\text{ tang. } obl. \text{ cot. } décl. \text{ sin. } asc.\, dr.}$$

$$\sin. lat. = \frac{\cos. obl. \sin. décl.}{\cos.^2 C}.$$

Les solutions que j'ai données pour le problême (740) exigent la recherche de douze logarithmes, c'est-à-dire d'un seul de plus que si j'eusse fait usage des solutions (472, 477): mais deux ou trois de ces logarithmes ne varient point pour une même époque, ce

ce qui est un avantage lorsqu'on a plusieurs calculs à faire pour cette époque. Les solutions données par M. de la Lande (*Astr.* 900) exigent de même douze logarithmes.

744. Dans les formules précédentes, et dans toutes celles de ce Chapitre, on observera que pour la *déclinaison australe*, sin. *décl.* est *négatif*, puisque sin. *décl.* = cos. PS, et qu'alors PS est $> 90°$. La même regle a lieu pour tang. *décl.* et cot. *décl.* Mais cos. *décl.* ou sin. PS est toujours positif, puisqu'on ne peut jamais avoir PS $> 180°$.

Ces observations s'appliquent de même aux lignes trigonométriques de la latitude.

745. *Connoissant la longitude et la latitude d'un astre, avec l'obliquité de l'écliptique, trouver l'ascension droite et la déclinaison de cet astre.*

En faisant (VII. 13e, 28e), A = P, B = E, C = S, on a, dans le triangle PES, $\text{cot.P} = \frac{\text{sin.PE cot.ES} - \text{cos.PE cos.E}}{\text{sin.E}}$, et cos. PS = cos. E sin. ES sin. PE + cos. ES cos. PE. Changeant les signes dans la premiere de ces formules, et substituant les dénominations (740), on a

$$\text{tang. } asc.\ dr. = \text{tang. } long. \text{ cos. } obl. - \frac{\text{tang. } lat. \text{ sin. } obl.}{\text{cos. } long.},$$

$$\text{sin. } décl. = \text{sin. } long. \text{ cos. } lat. \text{ sin. } obl. + \text{sin. } lat. \text{ cos. } obl.$$

Comme on fait usage de ce problême bien moins souvent que de l'inverse (740), je laisse à ceux qui desireront des transformations analogues à celles que j'ai données (741, 743) le soin de les composer.

746. *Connoissant les différences d'ascension droite et de déclinaison entre deux astres*, et la distance réciproque de ces astres étant un arc sensiblement rectiligne, *trouver les différences de longitude et de latitude.*

Les méthodes que j'ai vu employer jusqu'à présent pour la solution de ce problême important, dont l'usage est continuel,

sont toutes sujettes à une erreur de quelques secondes, plus ou moins, selon les cas.

Fig. 67 Soient L, S les centres de deux astres, et leur distance LS un petit arc sensiblement rectiligne (tel que seroit par exemple un arc de 1° 20′, dont la différence à la corde n'est (152) que de 0″, 1); soit LQ l'un des paralleles de l'équateur, et P son pôle, LT l'un des paralleles de l'écliptique, et E son pôle : la différence donnée d'ascension droite est LPS, SM celle de déclinaison ; les différences cherchées de longitude et de latitude sont LES et SN.

En multipliant LPS par sin.PL, on a l'arc de parallele LM, (394); de même, si l'on avoit la valeur de LN, en la divisant par sin.EL, on auroit celle de LES : et alors, pour avoir la solution cherchée, il suffiroit de résoudre les petits triangles SML, SNL qui contiennent les quantités LM, LN, SM, SN. Aussi la méthode la plus usitée consiste-t-elle en effet à résoudre ces triangles en les considérant comme rectilignes rectangles, et en supposant connu *l'angle de position* PSE = NSH, et de plus que NSH = 90° — NHS = MLN. De cette derniere supposition et de celle des angles droits naît l'erreur que j'ai démontrée (533 à 539).

Si l'on suppose M = 90° = N, et qu'on observe que l'hypothénuse du triangle LMS est commune au triangle LNS ; alors, en employant les formules (270, 271), dans lesquelles on substituera L à C, S à B, N à D, M à A, on aura pour tous les cas, LN = LM × cos.MLN ± SM × sin.MLN, et SN = SM × cos.MLN ∓ LM × sin.MLN, ou

$$\delta long. = \frac{1}{\cos.lat.}(\delta asc.dr.\ \cos.déc.\ \cos.ang.posit. \pm \delta déc.\ \sin.ang.posit.);$$

$$\delta lat. = \delta déc.\ \cos.ang.posit. \mp \delta asc.dr.\ \cos.déc.\ \sin.ang.posit.$$

En examinant les différents cas, on trouve que les signes inférieurs ont lieu en deux circonstances, pourvu néanmoins qu'elles n'existent pas en même temps ; c'est-à-dire 1°. dans les *signes descendants*, ou, ce qui revient au même, quand les astres corres-

pondent au second ou au troisieme quart de l'écliptique; 2°. lorsque l'astre le plus avancé en ascension droite est aussi le plus éloigné du pôle boréal de l'équateur. Dans les autres cas, ou lorsque ces deux circonstances existent en même temps, ce sont les signes supérieurs qui ont lieu.

De plus, lorsque par la formule, $\delta long.$ se trouvera négative, dans ce cas l'astre le plus avancé en ascension droite sera le moins avancé en longitude; et lorsque par la formule, $\delta lat.$ se trouvera négative, l'astre le plus voisin du pôle boréal de l'équateur sera le plus éloigné du pôle boréal de l'écliptique.

747. Pour vérifier les formules précédentes; soit L le centre de la lune, S le centre du soleil, et par conséquent ES $= 90°$; soit LS $= 32'$, MS $= 16' = \delta décl. \odot\mathbb{C}$, PE $= 23° 28'$, PS $= 67°$, et par conséquent PM $= 67° 16' =$ PL.

Dans le triangle rectilatere PES, connoissant PE, PS, on trouve (440) pour la valeur de *l'angle de position* PSE du soleil, $4° 47' 18'',7$; pour celle de l'angle SPE, $167° 53' 57'',3$, ce qui donne $asc.dr.\odot = 77° 53' 57'',3$; et pour la valeur de l'angle PES, $11°7'33'',5$, ce qui donne $long.\odot = 78°52'26'',5$. En résolvant le triangle PLS dans lequel les trois côtés sont donnés, on trouve PSL $= 119° 54' 8'',6$, et SPL $= 30' 4'',6 = \delta asc.dr.\odot\mathbb{C}$. Enfin dans le triangle rectilatere LES, connoissant LS et ESL $=$ PSL $-$ PSE $= 115° 6' 49'',8$, on trouve SEL $= 28' 58'',5 = \delta long.\odot\mathbb{C}$, et EL $= 90° 13' 34'',9$, ce qui donne $\delta lat.\odot\mathbb{C}$ ou $lat.austr.\mathbb{C} = 13' 34'',9$. Ces éléments, tous déterminés rigoureusement, serviront de comparaison.

748. En employant $décl.\mathbb{C}$ dans les formules (746), ainsi que l'indique la figure, et faisant, comme on le peut sans erreur, $\cos. lat.\mathbb{C} = 1$; on a $\delta long.\odot\mathbb{C} = 30' 4'',6 \cos.22° 44' \cos.4° 47' + 16' \sin.4° 47' 20'' = 27' 38'',6 + 1' 20'',1 = 28' 58'',7$; résultat dont l'erreur pourroit à la rigueur se négliger. Les logarithmes employés dans le calcul de la premiere formule

Fig.67 servent à calculer la seconde, et on trouve $\delta lat.\odot\mathbb{C} = 13'37'',7$; c'est-à-dire 2″, 8 de plus que la valeur exacte.

749. Cette erreur provient de la cause exposée (539). En effet toute erreur disparoît si on a recours aux corrections que j'ai indiquées au même lieu. La table (536) fait connoître que l'erreur sur l'angle droit N est absolument insensible, NE différant peu de 90°, et que par conséquent on doit employer dans les calculs (748) l'angle de position NSH' *augmenté* de la quantité de l'erreur de l'angle droit M.

Cette erreur, à la distance MP, ou 67° 16′, du pôle, est selon la table (536), 0′, 209 × ML = 0′, 209 × 30 cos.22° 44′ = 5′, 78 = 5′ 47″. On doit aussi (537) employer dans les calculs (748) ML *diminué* de la quantité 0″, 01745 × SM × 5,78 : mais comme il est plus commode d'appliquer cette correction à l'angle au pôle MPL, on divisera cette même quantité par cos.22° 44′, ou, au lieu de 5, 78, on emploiera, en la calculant, 0′, 209 × MPL = 0, 209 × 30; ce qui donnera 0″, 01745 × 16 × 6, 27 = 1″, 75.

Mettons à présent, dans le calcul (748), $\delta asc.dr.$ = 30′ 2″, 85, et *ang.posit.* = 4° 53′ 6″, et nous trouverons $\delta long.\odot\mathbb{C}$ = 28′ 58″, 5; et *lat.austr.* $\mathbb{C}$ = 13′ 34″, 9; ce qui est absolument conforme aux résultats du calcul rigoureux (747).

750. Si les points S, L indiquent l'un le centre d'un astre, et l'autre une *tache* sur le disque de ce même astre, il est évident que les mêmes formules (746), calculées avec les mêmes corrections (749) dans le cas où les distances de l'astre aux deux pôles différeroient sensiblement entre elles, donneront exactement la solution du problème.

751. Pour trouver les différences de longitude et de latitude entre le soleil et la lune, Mayer a donné les deux formules suivantes que je tire de M. Trembley (*Essai de Trigon. sphérique*, Chap. IX) : $\delta long.$ = $\delta asc.dr.$ cos.*obl.* $\pm$ $\delta décl.$ sin.*obl.* ×

cos.*asc.dr.* ⊙, et δ*lat.* $= \frac{\delta décl \cdot \cos.obl.}{\cos.décl. \odot} - \delta$*asc.dr.* sin.*obl.* × cos.*long.* ⊙. En calculant ces formules avec les éléments (747), on a δ*long.* = 28′ 55″, 5, et δ*lat.* = 13′ 38″. L'erreur est de 3″ pour chacune de ces valeurs ; ces formules n'ont donc pas l'exactitude que desirent aujourd'hui les Astronomes.

752. *Connoissant les différences de hauteur et d'azimuth entre deux astres, trouver les différences d'ascension droite et de déclinaison.*

Si dans la solution (746) on prend P pour le zénith, E pour le pôle de l'équateur, les formules donneront (753)

$$\delta asc.dr. = \frac{1}{\cos.décl.}(\delta azim. \cos.haut. \cos.ang.de\,var. \pm \delta haut. \sin.ang.de\,var.)$$

$$\delta décl. = \delta haut. \cos.ang.de\,var. \mp \delta azim. \cos.haut. \sin.ang.de\,var.$$

Les signes inférieurs ont lieu lorsque l'astre le plus bas a le moindre azimuth oriental, ou le plus grand azimuth occidental. L'azimuth est le supplément de l'angle SPE.

753. Pour distinguer entre eux les deux angles qui se trouvent désignés l'un et l'autre, dans différents Auteurs, sous la dénomination d'*angle parallactique*, j'appellerai toujours de ce nom l'angle du vertical avec le cercle de latitude ; et je nomme *angle de variation* l'angle du vertical avec le cercle de déclinaison, par contraste avec l'*angle de position* qui lui est contigu ; l'un changeant à chaque moment, tandis que l'autre est sensiblement constant pour toutes les étoiles.

754. Les formules (746) s'appliquent encore facilement à la résolution du problême suivant et de son inverse : *Connoissant les différences de hauteur et d'azimuth, trouver les différences de longitude et de latitude.* Je me dispenserai de faire ces applications, parceque les regles des signes deviennent plus compliquées ; que la formation de l'angle parallactique exige encore d'autres regles, et que M. de la Lande (*Astr.* 2125 à 2129 ; et 1883 et suiv.) a

résolu ces problêmes par une autre méthode et avec les explications les plus détaillées. Je préviens seulement que soit dans ces problêmes, soit dans le précédent (752), mes corrections (539) seront d'autant plus nécessaires, que les astres seront plus élevés sur l'horizon. Elles deviennent pourtant inutiles dans la belle Méthode de M. de la Lande pour le calcul des éclipses, parcequ'on y résout successivement les deux problêmes, l'un par rapport au lieu vrai des astres, l'autre par rapport au lieu apparent, et que les erreurs des deux opérations se compensent comme je l'ai souvent éprouvé.

755. *Trouver une méthode expéditive pour calculer une table des azimuths, des distances au zénith, et des angles de variation* (753), *pour une latitude terrestre donnée, en prenant pour arguments la déclinaison et l'angle horaire.*

Une pareille table est très utile pour pointer de jour la lunette d'un quart de cercle sur un astre qu'on n'apperçoit point à l'œil nud, et de nuit sur un astre peu visible; pour calculer l'effet de la réfraction sur l'ascension droite et sur la déclinaison; et pour d'autres circonstances qui se présentent continuellement. Par-tout où il se trouve un Observatoire en activité, on devroit avoir cette table calculée en minutes, sur le modele de celle qu'on a insérée pour Paris dans la *Connoissance des Temps*, de 1782. M. Prevost, à qui cette table est due en partie, m'a dit avoir calculé avec exactitude les azimuths et les distances au zénith, par le moyen des formules (VIII. 7e, 8e). Par la méthode que je vais indiquer, il auroit encore obtenu, et sans plus de travail, les angles de variation qui depuis ont été calculés par M. Lévêque.

Fig. 68 Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, S un astre situé dans une partie quelconque du Ciel visible. Connoissant les côtés PZ, PS, et l'angle compris P, on trouve à la fois, par l'élégante solution de Neper (IX. 2e), *l'azimuth* et *l'angle de variation :* la déclinaison restant la même, il suffit de changer seulement log. cot. $\frac{1}{2}$ *ang. horaire* pour trouver successivement l'azimuth et

l'angle de variation correspondants à chacun des angles horaires de la table. On fera de même pour chaque déclinaison différente. Ensuite, ayant sin.S : sin.PZ :: sin.P : sin.ZS, comme, dans cette analogie, PZ est toujours constant, il suffira, pour un même angle horaire, de chercher deux logarithmes pour connoître les *distances au zénith* correspondantes à chaque déclinaison. On fera de même pour chaque angle horaire différent. Donc en général, par cette méthode, pour déterminer trois quantités on n'a que quatre logarithmes à chercher.

756. *Connoissant la hauteur du pôle, ayant observé dans un même vertical deux étoiles, et connoissant leurs déclinaisons et leurs ascensions droites, et par conséquent les moments de leur passage au méridien, trouver l'heure à laquelle l'observation a été faite.*

Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, T, S les deux étoiles. Fig.69
Les choses connues sont PZ, PT, PS, et TPS différence des ascensions droites : on cherche l'angle TPZ.

Comme on a PTZ = 180° — PTS, les lignes trigonométriques de l'angle T sont communes aux triangles PTZ, PTS; de sorte que si l'on trouve, par la table VII, que l'une de ces lignes puisse être exprimée dans chacun des deux triangles par les lignes trigonométriques des parties connues et de l'angle cherché, le problème sera résolu. Or faisant A = T, B = P, C = Z, on a (VII. 13°), $\text{tang.PTZ} = \frac{\text{sin.TPZ}}{\text{sin.PT cot.PZ} - \text{cos.PT cos.TPZ}}$; et faisant C = S, — $\text{tang.PTS} = \frac{\text{sin.TPS}}{\text{sin.PT cot.PS} - \text{cos.PT cos.TPS}}$. Mettant en équation ces deux valeurs de tang.T, chassant les fractions et divisant l'équation par cos.PT, on trouvera sin.TPS cos.TPZ + (cos.TPS — tang.PT cot.PS) sin.TPZ = tang.PT cot.PZ sin.TPS. Et par conséquent (369)

$$\text{tang.B} = \text{cot.TPS}\left(1 - \frac{\text{tang.PT cot.PS}}{\text{cos.TPS}}\right), \text{ et}$$

$$\text{cos.(TPZ} \backsim \text{B)} = \text{tang.PT cot.PZ cos.B.}$$

Pour la commodité des Calculateurs, j'ajoute les valeurs ci-après :

TPS = la différence d'ascension droite des deux étoiles prise du côté où elle est moindre que de 180°.

PT = la distance au pôle, de l'étoile la plus élevée.

PS = la distance au pôle, de l'étoile la moins élevée.

PZ = la distance du pôle au zénith.

TPZ = l'angle horaire cherché de l'étoile la plus élevée.

Si TPZ est $> 90°$, on fera négatif le second membre de chacune des deux formules; et on aura le supplément de la valeur cherchée de TPZ.

757. *Déterminer de combien de temps la réfraction accélere le lever ou retarde le coucher des astres.*

Fig. 70 Soit P le pôle de l'équateur, Z le zénith, OR l'horizon, T un astre qui élevé, par la réfraction, de la quantité TL déterminée par les Astronomes de $33'\frac{1}{2}$ environ, paroisse se lever au point L. Sans cette élévation apparente, on ne verroit l'astre se lever que quand il arriveroit au point S, en supposant PS = PT. Son lever est donc accéléré, et, par la même raison, son coucher retardé de la quantité de temps mesurée par le petit angle TPS.

J'observe que les triangles PZS, PTZ ont un côté commun PZ; que PS = PT, et que connoissant TL = ZT — ZS = δZS, il s'agit de trouver TPS = δZPS que je désigne par δP.

J'ai recours aux analogies différentielles correspondantes à ce cas, et faisant (629), A = P, B = Z, C = S, je trouve $\sin.\frac{1}{2}\delta ZS : \sin.\frac{1}{2}\delta P :: \sin.PZ \sin.PS \sin.(P + \frac{1}{2}\delta P) : \sin.(ZS + \frac{1}{2}\delta ZS)$. Mais parceque ZS = 90°, $\sin.(ZS + \frac{1}{2}\delta ZS) = \cos.\frac{1}{2}\delta ZS$. Donc (I. 6e)

(A)... $\sin.\delta ZS : 2 \sin.\frac{1}{2}\delta P :: \sin.PZ \sin.PS \sin.(P + \frac{1}{2}\delta P) : 1$;

ou (723), en désignant dans le second membre le temps cherché par t,

(B)... *Temps cherché* $= \frac{\text{réfraction horizontale}}{15 \cos.lat. \cos.decl. \sin.(ang.hor. + \frac{1}{2}t)}$.

Comme la valeur de t se connoît toujours à-peu-près, il est rare

rare qu'on ait à calculer cette formule plus d'une fois par la méthode (281). Si on veut faire usage de l'autre méthode (282), on observera que $2\sin.\frac{1}{2}\delta_1 P \sin.(P + \frac{1}{2}\delta_1 P) = \cos.P - \cos.(P + \delta_1 P)$, (II. 16e); et l'analogie (A) donnera

(C)... $\cos.(P + \delta_1 P) = \cos.P \left(1 - \frac{\sin.\delta_1 ZS}{\sin.PZ \sin.PS \cos.P}\right)$; ou

(D)... $\cos.(ang.hor. + 15\,t) = \cos.ang.hor. \left(1 - \frac{\sin refr.\ horiz.}{\cos.lat. \cos.décl. \cos.ang.hor.}\right)$

758. Dans les formules précédentes, on doit employer pour P, ou pour l'angle horaire, l'angle ZPS, c'est-à-dire l'angle horaire de l'astre considéré dans le plan de l'horizon. Il est facile de trouver cet angle : car le triangle rectilatere PZS donne (VII. 7e), $\cos.P = -\cot.PZ \cot.PS$, ou

$$\cos.ang.hor. = -\tang.lat. \tang.décl.$$

Cette équation fait voir qu'à déclinaison égale, l'angle horaire correspondant à la déclinaison boréale est obtus, et supplément de l'angle horaire correspondant à la déclinaison australe. Mais lorsque P est obtus, $\sin.(P + \frac{1}{2}\delta_1 P)$ est $<$ sin.P, et lorsque P est aigu, $\sin.(P + \frac{1}{2}\delta_1 P)$ est $>$ sin.P. L'analogie (A) fait donc connoître qu'à déclinaison égale, l'effet de la réfraction ne peut être le même pour la déclinaison boréale et pour l'australe, et que par conséquent les tables qu'on a données jusqu'à présent induisent en erreur sur ce point.

C'est à M. l'Abbé Pieracchi, Internonce apostolique à Paris, et amateur distingué de l'Astronomie, que je dois la premiere notion de cette erreur qu'il a reconnue en résolvant séparément les deux triangles ZPS, ZPT, au moyen des trois côtés, pour avoir la valeur des angles au pôle dans les deux cas. Je n'avois pas encore essayé d'appliquer mes analogies différentielles finies au problême (757); cette application m'eût conduit à la découverte de l'erreur dont il s'agit, erreur qui dans certains cas est assez grave, ainsi qu'on va le voir.

Fig. 70 759. Soit PZ = 30° : en faisant PS = 61°, on a, par la formule (758), P = 163° 45′ 31″ ; et, en faisant PS = 119°, P = 16° 14′ 29″. Avec ces éléments, et en supposant δZS = 33′ 30″, la formule (C) donne, dans le cas de la déclinaison boréale, P + δP = 169° 13′ 36″, et par conséquent l'effet de la réfraction ou δP = 5° 28′ 5″; et dans le cas de la déclinaison australe, P + δP = 20° 18′ 48″, et par conséquent δP = 4° 4′ 19″. La premiere valeur de δP réduite en temps, est 21′ 52″ pour la déclinaison boréale ; la seconde, 16′ 17″ pour la déclinaison australe. La différence est de 5′ 35″ de temps. On auroit donc une erreur de près de 6′ de temps, si l'on employoit dans le cas de la déclinaison boréale la quantité de 16′ 9″ assignée dans la table de la *Connoissance des Temps*, 1782, p. 302, pour le cas de la déclinaison de 29° et de la latitude de 60°. La table donnée à la suite, pour les arcs semi-diurnes apparents, à la latitude de Paris, paroît avoir été construite rigoureusement, et calculée séparément pour les déclinaisons boréales et pour les déclinaisons australes.

760. Si dans l'exemple (759) on eût calculé la valeur de δP au moyen de l'analogie que plusieurs Astronomes ont employée, δP : δZS :: 1 : $\sqrt{(\sin.^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, laquelle se résout facilement par la méthode (716), on eût trouvé δP = 4° 33′ 54″, et par conséquent l'erreur de l'analogie infinitésimale seroit de 54′ pour la déclinaison boréale, et de 30′ pour l'australe : ce qui prouve l'utilité de mes analogies différentielles finies, dont j'ai déduit la formule (C) que je crois plus expéditive que la résolution du triangle par les trois côtés ; d'autant plus qu'avec le seul changement d'un signe, elle s'emploie et pour la déclinaison boréale et pour l'australe. Mais si l'on connoît à-peu-près la valeur de δP ou de 15 t, ce qui arrive lorsqu'on calcule une table, je crois que les solutions (A), (B) paroîtront préférables à toute autre méthode employée jusqu'à présent.

761. Si à la réfraction horizontale on substitue le diametre du

soleil, les formules (757) feront connoître *le temps que le disque du soleil emploie à se lever ou à se coucher.*

Et si à la réfraction horizontale on substitue la dépression du cercle crépusculaire, dépression qu'on a fixée à 18°, on aura par la formule (D) *la durée du crépuscule.*

762. *Trouver le changement d'amplitude produit par la réfraction sur un astre qui se leve ou qui se couche.*

Conservons les dénominations (757; l'arc SL de l'horizon, ou le petit angle LZS, que nous nommerons comme à l'ordinaire δZ, est celui dont on cherche la valeur.

La premiere analogie (620) se réduit dans ce cas, par la méthode (282), à une expression très simple; mais dans ce même cas on obtient plus promptement cette expression par la méthode (725). Désignons par Z l'angle PZS, et observons que PT = PS, et que TZ = 90° + δZS : le triangle PTZ nous donnera (VII. 28e), cos.PT = cos.(Z — δZ) cos.δZS sin.PZ — sin.δZS cos.PZ = cos.PS; le triangle rectilatere PZS donne aussi cos.PS = cos.Z sin.PZ. Égalons les deux valeurs de cos.PS; nous aurons cos.(Z — δZ) = tang.δZS cot.PZ + $\frac{\cos.Z}{\cos.\delta ZS}$. Ces deux dernieres équations se réduisent aux suivantes, en appellant *amplitude vraie* le complément de l'angle PZS, et *amplitude apparente* le complément de PZT :

$$\text{sin. } ampl.\ vr. = \frac{\text{sin. } décl.}{\text{cos. } lat.};$$

$$\text{sin. } ampl.\ app. = \frac{\text{sin. } ampl.\ vr.}{\text{cos. } réfr.\ horiz.}\left(1 + \frac{\text{sin. } réfr.\ horiz.\ \text{tang. } lat.}{\text{sin. } ampl.\ vr.}\right).$$

Or la différence de l'amplitude vraie à l'amplitude apparente est ce que l'on cherche.

Un exemple nous sera utile à plus d'une fin.

763. Soit PZ = 41° 12′ 20″, PS = 51° 25′ 20″, et δZS = 33′ = *réfr. horiz.* Au moyen des formules précédentes on trouvera *ampl. vr.* = 71° 11′ 21″, et *ampl. app.* = 73° 15′ 17″. Et par

conséquent l'effet de la réfraction sur l'amplitude est, dans ce cas, de 2° 4′.

764. Si, avec les mêmes éléments, on emploie, au lieu de mes formules rigoureuses, l'analogie (714), $\delta Z : \delta ZS :: \cos.PZ : \sqrt{(\sin.^2 PS - \cos.^2 PZ)}$, on trouvera $\delta Z = 1°.57'$. Une erreur de 7′ sur cette quantité fait voir avec quelle précaution il faut faire usage des analogies infinitésimales.

765. Si dans l'exemple (763) on fait $\delta ZS = 32'$, mes formules donnent $\delta Z = 2° 0'$. Une minute de variation dans la réfraction horizontale produit donc ici un changement de 4′ sur l'amplitude apparente, et par conséquent de 8′ si on prend la somme des changements tant pour l'amplitude ortive que pour l'amplitude occase. Il faut donc attribuer à une erreur de calcul ce qu'on a avancé, qu'une minute de variation dans la réfraction horizontale, à la latitude donnée (763), produit un changement de 29′ sur l'amplitude ortive et occase de la Lyre.

766. *Trouver l'élongation d'une planete pour le temps de sa station apparente.*

Nous considérerons la planete comme étant dans le plan de l'écliptique, et les orbites de la planete et de la Terre comme circulaires. L'erreur de la premiere hypothese est de peu de conséquence; nous donnerons un moyen facile pour obvier à l'erreur de la seconde.

Soit p l'angle à la planete ou *la parallaxe annuelle*, e l'angle à la Terre ou *l'élongation*. Dans la supposition des orbites circulaires, les côtés opposés à ces angles sont constants; de sorte qu'on a (614), $\delta p : \delta e :: \text{tang.}p : \text{tang.}e$. Si on appelle $\odot$ la longitude du soleil, g la longitude géocentrique de la planete, h la longitude héliocentrique, on aura (*Astron.* de M. de la Lande, 1142, 1141), $g = \odot - e$, $p = h \backsim g$. Or une planete est dite *stationnaire*, quand sa longitude géocentrique ne varie pas; dans ce cas les dernieres équations donnent $\delta\odot = \delta e$, et $\delta p = \delta h$, et par conséquent $\delta h : \delta\odot :: \text{tang.}p : \text{tang.}e$. Mais δh

et $\delta\odot$, ou les mouvements simultanés de la planete et de la Terre, sont en raison inverse de leurs révolutions périodiques, puisque le mouvement angulaire est d'autant plus grand que le temps de la révolution est plus court. Appellant R la révolution périodique de la Terre, r celle de la planete, on a donc $\delta h : \delta\odot :: R : r$, et par conséquent $R : r :: \text{tang.}p : \text{tang.}e$. Mais suivant la loi de Kepler, $R^2 : r^2 :: D^3 : d^3$, D étant la distance moyenne du soleil à la Terre, d celle du soleil à la planete. Donc $D^3 : d^3 ::$ $\text{tang.}^2 p : \text{tang.}^2 e$, ou (9), $\frac{D^2}{d} : \frac{d^2}{D} :: \frac{\text{sin.}^2 p}{\text{cos.}^2 p} : \frac{\text{sin.}^2 e}{\text{cos.}^2 e}$. Or les numérateurs forment entre eux la proportion connue des côtés aux sinus des angles opposés : donc aussi (13) les dénominateurs sont en proportion. L'analogie des numérateurs donne $\text{sin.}^2 p = \frac{D^2 \text{sin.}^2 e}{d^2}$; celle des dénominateurs, $\text{cos.}^2 p = \frac{d^2 \text{cos.}^2 e}{D}$. Mais $\text{sin.}^2 p + \text{cos.}^2 p = \text{sin.}^2 e + \text{cos.}^2 e$, (28) : donc $\frac{D^2 \text{sin.}^2 e}{d^2} + \frac{d \text{cos.}^2 e}{D} = \text{sin.}^2 e + \text{cos.}^2 e$, équation de laquelle on tire

$$\text{tang.}e = \frac{d}{\sqrt{(D^2 + Dd)}} = \frac{d}{D} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{d}{D}\right)}}.$$

Et, en faisant $D = 1$, selon l'usage des Astronomes,

$$\text{(E)}\ldots\ \text{tang.}\textit{elong.} = \frac{\textit{dist. moy.}\ \text{planete}}{\sqrt{(1 + \textit{dist. moy.}\ \text{plan.})}}.$$

La démonstration de cette formule très simple est tirée en grande partie des *Institutions astronomiques* de M. Le Monnier.

Pour plus d'exactitude et de commodité dans le calcul, on fera $\text{tang.}x = \sqrt{\frac{d}{D}}$, et on aura (198), $\text{tang.}e = \frac{d}{D} \times \text{cos.}x = \text{tang.}^2 x \text{ cos.}x$. Et par conséquent, en substituant aux distances moyennes les rayons vecteurs actuels, ce qui rendra insensible l'erreur de l'hypothese des orbites circulaires, on aura

$$\text{tang.}x = \sqrt{\frac{\textit{ray. vect.}\ \text{planete}}{\textit{ray. vect.}\ \text{Terre}}},$$

$$\text{tang.}\textit{elong.} = \text{sin.}x\ \text{tang.}x.$$

On pourra déterminer d'abord à-peu-près le temps de la station, au moyen de la formule (E) calculée, si l'on veut, par le moyen des deux dernieres équations, puis employer les rayons vecteurs donnés par les tables pour ce même temps qu'on parviendra à déterminer ainsi avec une précision beaucoup plus grande.

767. *La théorie du mouvement elliptique des planetes* donne les six équations ci-après, dont la démonstration n'appartient pas à la seule Trigonométrie, puisqu'elle dépend des observations, de la loi des aires proportionnelles aux temps, et des propriétés de l'ellipse. Soient

a le demi-grand axe de l'orbite d'une planete,
b le demi-petit axe,
e l'excentricité,
r le rayon vecteur de la planete,
u l'anomalie vraie,
x l'anomalie excentrique,
z l'anomalie moyenne.

On aura, en adoptant les démonstrations que donne M. de la Lande dans la *seconde Édition* de son Astronomie, qui est celle que je cite toujours,

1° ÉQUATION... $z = x + \frac{e}{a} \times \sin.x$, (*Astr.* 1241);

2° $r = a + e \cos.x$, (*Astr.* 3270);

3° $r = \frac{bb}{a - e \cos.u}$, (*Astr.* 3279);

4° $r = b \times \frac{\sin.x}{\sin.u}$, (*Astr.* 1245);

5° $\text{tang.}\frac{1}{2}u = \text{tang.}\frac{1}{2}x \sqrt{\frac{a-e}{a+e}}$, (*Astr.* 1240).

Enfin l'équation suivante donne le rapport entre les quantités constantes a, b, e:

6° $aa = bb + ee$, (*Astr.* 3269).

Pour simplifier les opérations, on fait ordinairement $a = 1$; alors il faut employer, dans les calculs numériques, des valeurs de b, e, r proportionnelles à la valeur de $a = 1$. Par exemple,

les Tables de Mercure, de M. de la Lande, donnent $a = 38709{,}88$; $e = 7960$: si on fait $a = 1$, la valeur de e sera $\frac{7960}{38709,88}$.

Des équations précédentes se déduisent les huit suivantes, qui sont fort utiles, et que nous démontrerons immédiatement après les avoir données.

$$7^e \quad \delta x = \frac{\delta z}{1 + \frac{c}{a} \times \cos. x};$$

$$8^e \quad \delta r = -\delta z \times \frac{ae}{bR''} \times \sin. u;$$

$$9^e \quad \delta u = \delta x \times \frac{\sin. u}{\sin. x};$$

$$10^e \quad \delta u = \delta z \times \frac{ab}{rr}.$$

Ces quatre équations ne sont exactes que lorsque les différentielles sont infiniment petites. Dans les autres cas je leur substitue les suivantes comme beaucoup plus approchées.

$$11^e \quad \delta x = \frac{\delta z}{1 + \frac{e}{a} \times \cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)};$$

$$12^e \quad \delta r = -\delta z \times \frac{ae}{bR''} \times \sin.(u + \frac{1}{2}\delta u);$$

$$13^e \quad \delta u = \delta x \times \frac{\sin.(u + \frac{1}{2}\delta u)}{\sin.(x + \frac{1}{2}\delta x)};$$

$$14^e \quad \delta u = \delta z \times \frac{ab}{(r - \frac{1}{2}\delta r)^2}.$$

768. Démonstration des équations 7e..... 14e.

En prenant les différentielles finies dans l'équation 1e, on a $\delta z = \delta x + \frac{c}{a} \times 2 \sin.\frac{1}{2}\delta x \cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)$, (II. 30e). Mettant δx au lieu de $2 \sin.\frac{1}{2}\delta x$, (259), le résultat est l'équation 11e, laquelle se change en la 7e lorsque δx est infiniment petit (140).

En opérant de même sur l'équation 2e, j'ai $\delta r = -\frac{\delta x}{R''} \times e \sin.(x - \frac{1}{2}\delta x)$; δx devant être divisé par R'', (262), parceque r et x ne sont pas des quantités de même nature (730). Je change

les signes, je substitue au numérateur δx sa valeur prise de l'équation 11e, et j'ai $-\delta r = \delta z \times \frac{ae}{R''} \times \frac{\sin.(x + \frac{1}{2}\delta x)}{a + e\cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)}$. Supposons par approximation (722), que r, x et u arrivent en même temps à la moitié de leur variation : 1°. le dernier dénominateur se réduira par la 2e équation à $(r - \frac{1}{2}\delta r)$; 2°. l'équation 4e donnera $\sin.(x + \frac{1}{2}\delta x) = \frac{(r - \frac{1}{2}\delta r)\sin.(u + \frac{1}{2}\delta u)}{b}$. Substituons cette valeur dans la derniere équation ci-dessus; nous aurons la 12e, qui se réduit à la 8e, lorsque les différentielles sont infiniment petites.

En différentiant l'équation 5e, on a (132), $\frac{\frac{1}{2}\delta u}{\cos.\frac{1}{2}u\cos.(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\delta u)} : \frac{\frac{1}{2}\delta x}{\cos.\frac{1}{2}x\cos.(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\delta x)} :: \text{tang.}\frac{1}{2}u : \text{tang.}\frac{1}{2}x$. D'où se déduit $\delta u = \delta x \times \frac{\sin.\frac{1}{2}u\cos.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\sin.\frac{1}{2}x\cos.\frac{1}{2}(x + \delta x)}$. De cette équation, si l'on suppose par approximation $\frac{\cos.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\cos.\frac{1}{2}(x + \delta x)} = \frac{\cos.\frac{1}{2}u}{\cos.\frac{1}{2}x}$, on tire la 9e; mais comme on peut supposer avec autant de raison $\frac{\sin.\frac{1}{2}u}{\sin.\frac{1}{2}x} = \frac{\sin.\frac{1}{2}(u + \delta u)}{\sin.\frac{1}{2}(x + \delta x)}$, ce qui donne $\delta u = \delta x \times \frac{\sin.(u + \delta u)}{\sin.(x + \delta x)}$, on aura en général une expression plus exacte dans l'équation 13e qui tient le milieu entre cette derniere et la 9e.

En mettant, comme nous l'avons déjà fait, $r - \frac{1}{2}\delta r$ au lieu de $a + e\cos.(x + \frac{1}{2}\delta x)$, l'équation 11e devient $\delta x = \frac{a\delta z}{r - \frac{1}{2}\delta r}$. Substituant dans la 13e cette valeur, et celle de $\sin.(x + \frac{1}{2}\delta x)$ employée ci-dessus, on aura la 14e, qui se réduit ensuite à la 10e.

Les formules fondamentales que j'ai réunies (767) pour la commodité des Astronomes, vont me servir utilement pour la résolution de divers problêmes, dans lesquels je suppose toujours connues les quantités a, b, e.

769. *PROBLÉME DE KEPLER. Étant donnée l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie.*

SOLUTION I. Toute la difficulté consiste à trouver l'anomalie excentrique, puisque, cet élément connu, l'équation 5e donne aussitôt

aussitôt la solution du problême. Nous nous bornerons donc à chercher x par le moyen de l'équation 1°; et comme il n'y a point de méthode rigoureuse pour la résoudre, nous emploierons ici la méthode générale d'approximation que nous avons proposée (364), parcequ'aucune autre ne nous paroît plus expéditive.

Si l'on donne à x une valeur arbitraire, l'équation 1° produira une erreur sur la valeur de z. Avec cette erreur δz on déterminera ensuite, au moyen de l'équation 11°, la correction δx que doit subir la valeur supposée de x, pour devenir exacte. Un exemple démontrera la justesse et la briéveté de cette opération.

Soit $z = 90°$, et cherchons x dans l'orbite de Mercure. Pour donner à x dans l'équation 1° une valeur supposée, très approchée de la valeur exacte, j'observe d'abord que pour les six premiers signes de l'anomalie moyenne, c'est-à-dire lorsque x est $< 180°$, on a toujours $z > x$, et au contraire $z < x$ pour les six derniers signes de l'anomalie moyenne, puisqu'alors sin.x est négatif, (42). Dans le cas proposé je dois donc supposer $x < z$. Je commence le calcul de l'équation 1° par la réduction en degrés, de la valeur de $\frac{e}{a}$. En prenant les éléments dans les tables de M. de la Lande, je trouve

log.e	=	3, 9009131
compl.log.a	=	5, 4121781
log.$\frac{e}{a}$	=	9, 3130912
(262), log.R°	=	1, 7581226
log.constant		1, 0712138

Et par conséquent $\frac{e}{a} \times$ R° $=$ 12° environ. Pour achever le calcul de l'équation 1°, il s'agit de choisir un arc x tel que son sinus multiplié par 12° donne un produit égal à $z - x$ ou à $90° - x$ dans le cas présent. En ouvrant les tables des sinus naturels, je reconnois facilement que sin. 79° seroit trop grand, et sin. 78° trop

petit. Je fais donc $x = 78° 30'$, et réduisant en secondes la valeur de $\frac{e}{a} \times R°$ en multipliant cette valeur par 3600, je termine le calcul comme il suit :

log. constant	1, 0712138
log. 3600 =	3, 5563025
log. sin. 78° 30′ =	9, 9911927
Somme	4, 6187090
Donc $\frac{e}{a} \times R'' \times \sin. 78° 30'$ =	41563″, 20
Mais $z - x = 11° 30'$ =	41400″, 00
Donc l'erreur δz =	163″, 2

Je suppose par approximation $\delta x = \delta z$, ce qui donne $\frac{1}{2}\delta x =$ 1′ 22″ environ. J'observe que mon calcul donnant pour z une valeur trop grande, la correction δx doit être négative, et je fais le calcul de l'équation 11e.

log. $\frac{e}{a}$ pris ci-dessus =	9, 31309
log. cos. $(x - \frac{1}{2}\delta x = 78° 28' 40'')$ =	9, 30048
Somme	8, 61357
Donc $\frac{e}{a} \times \cos.(x - \frac{1}{2}\delta x)$ =	0, 041075
compl. log. 1, 041075 =	9, 98252
log. $(\delta z = 163'', 2)$ =	2, 21272
log. δx =	2, 19524 ;

ce qui donne $\delta x = -156'', 76 = -2' 36'', 76$; et par conséquent $x = 78° 27' 23'', 24$. Cette valeur est juste à moins d'un $\frac{1}{100}$ de seconde, comme on pourra le vérifier en l'employant pour calculer l'équation 1e.

770. Pour démontrer d'autant plus l'utilité générale de ma méthode, soit $z = 180° 12' 27'', 83$, et soit demandé de trouver x

dans l'orbite de la comete de 1759, en faisant usage des éléments donnés par M. de la Lande (*Astr.* 3097).

$$\begin{aligned}
\log.(e = 17{,}49225) &= 1{,}2428457\\
\text{compl.}\log.(a = 18{,}07575) &= 8{,}7429037\\
\log.\tfrac{e}{a} &= 9{,}9857494\\
\log.\mathrm{R}^{\circ} &= 1{,}7581226\\
\log.\text{constant} &\quad 1{,}7438720
\end{aligned}$$

Donc $\frac{e}{a} \times \mathrm{R}^{\circ} = 55^{\circ}$ environ. Il faut trouver le sinus d'un arc x, de sorte que le produit de ce sinus par 55° soit égal à $z - x$. En négligeant pour cette recherche les 180° dans l'une et dans l'autre anomalie, ce produit pris en changeant les signes sera $x - 13'$. Après quelques épreuves sur les tables des sinus, je trouve que sin. 5° 10′ = 0, 09 peut satisfaire au cas proposé, puisque $55^{\circ} \times 0{,}09 = 4^{\circ}, 95 = 4^{\circ}\,57' = 5^{\circ}\,10' - 13'$. Je fais donc $x = 185^{\circ}\,10'$.

$$\begin{aligned}
\log.\text{constant} &\quad 1{,}7438720\\
\log.3600 &= 3{,}5563025\\
\log. - \sin. 185^{\circ}\,10' &= 8{,}9544991\\
\text{Somme} - &\quad 4{,}2546736
\end{aligned}$$

Et par conséquent $\frac{e}{a} \times \mathrm{R}'' \times \sin. 185^{\circ}\,10' = -17975'', 195$

Mais $z - x = 180^{\circ}\,12'\,27'', 83 - 185^{\circ}\,10' = -17852'', 170$

Donc l'erreur $\delta z = 123'', 025$

Ce calcul donne la valeur de z trop petite; celle de δx sera donc additive. Pour les cometes on ne peut supposer $\delta x = \delta z$. Ainsi, dans le calcul de l'équation 11e, il faut employer, pour arriver à une premiere approximation, cos. x au lieu de cos. $(x + \frac{1}{2}\delta x)$.

$$\begin{aligned}
\log.\tfrac{e}{a} \text{ pris ci-dessus} &= 9{,}98575\\
\log. - \cos.(x = 185^{\circ}\,10') &= 9{,}99823\\
\text{Somme} - &\quad 9{,}98398\\
\text{Donc } \tfrac{e}{a} \times \cos. x &= -0{,}9638
\end{aligned}$$

$$\text{compl.log.}\left(1 - \frac{e}{a}\cos.x = 0{,}0362\right) = 1{,}44129$$
$$\log.(\delta z = 123'', 025) = 2{,}09000$$
$$\log.\delta x = 3{,}53129$$

On a donc, pour premiere approximation, $\delta x = 56'\ 39''$. Cette correction étant considérable, on s'en servira pour recommencer le calcul, si l'on veut obtenir un résultat très exact. On aura alors

$$\frac{e}{a} \times R'' \times \sin.186°\ 6'\ 40'' = -\ 21249'', 478$$
$$z - x = 180°\ 12'\ 27'', 83 - 186°\ 6'\ 40'' = -\ 21252\ ,170$$
$$\text{Donc l'erreur } \delta z = \qquad 2'', 692$$

Donc $\frac{e}{a}\cos.(x = 186°\ 6'\ 40'') = -\ 0{,}96222$, en faisant usage des logarithmes à six décimales, et $\delta x = \frac{2'', 692}{0, 03778} = 1'\ 11'', 255$. Le calcul ayant donné z trop grand, cette correction δx doit ici se soustraire. Pour l'avoir avec encore plus de précision, qu'on emploie actuellement $\cos.(x - \frac{1}{2}\delta x = 186°\ 6'\ 4'')$ au lieu de $\cos.x$ dans le dernier calcul, comme le prescrit l'équation 11°, et l'on trouvera $\delta x = -\ 1'\ 11'', 29$, correction absolument exacte, puisque si l'on calcule l'équation 1° en faisant $x = 186°\ 5'\ 28'', 71$, on trouve précisément $z = 180°\ 12'\ 27'', 83$.

Comme les cometes ne sont visibles que dans le voisinage du périhélie, et que par cette raison c'est ordinairement de leur périhélie que se comptent leurs anomalies, il faut réduire ces anomalies comme si elles étoient comptées de l'aphélie, lorsqu'on voudra faire usage des équations (767) qui sont construites dans cette hypothese. Pour cet effet on ajoutera 180° aux anomalies données, après le passage au périhélie, et avant ce passage on prendra leur supplément à 180°.

771. SOLUTION II. En poussant jusqu'à la neuvieme puissance de l'excentricité les opérations de M. de la Lande (*Astr.* 3335), dans lesquelles $a = 1$, on trouve

$$z =$$

$$u + 2e \sin.u + (\tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{1}{8} e^4 + \tfrac{3}{64} e^6 + \tfrac{3}{128} e^8) \sin.2u + (\tfrac{1}{3} e^3 + \tfrac{1}{8} e^5 + \tfrac{1}{16} e^7 + \tfrac{7}{192} e^9) \sin.3u + (\tfrac{5}{32} e^4 + \tfrac{3}{32} e^6 + \tfrac{15}{256} e^8) \sin.4u + (\tfrac{3}{40} e^5 + \tfrac{1}{16} e^7 + \tfrac{3}{64} e^9) \sin.5u + (\tfrac{7}{192} e^6 + \tfrac{5}{128} e^8) \sin.6u + (\tfrac{1}{56} e^7 + \tfrac{3}{128} e^9) \sin.7u + \tfrac{9}{1024} e^8 \sin.8u + \tfrac{5}{1152} e^9 \sin.9u.$$

Cette série, convertie par la méthode que j'ai proposée (371, 372), me donne la suivante qui résout le problême :

$$u =$$

$$z - (2e - \tfrac{1}{4} e^3 + \tfrac{5}{96} e^5 + \tfrac{107}{4608} e^7 + \tfrac{6217}{368640} e^9) \sin.z + (\tfrac{5}{4} e^2 - \tfrac{11}{24} e^4 + \tfrac{17}{192} e^6 + \tfrac{43}{5760} e^8) \sin.2z - (\tfrac{13}{12} e^3 - \tfrac{43}{64} e^5 + \tfrac{95}{512} e^7 - \tfrac{973}{61440} e^9) \sin.3z + (\tfrac{103}{96} e^4 - \tfrac{451}{480} e^6 + \tfrac{4123}{11520} e^8) \sin.4z - (\tfrac{1097}{960} e^5 - \tfrac{5957}{4603} e^7 + \tfrac{1649221}{2580480} e^9) \sin.5z + (\tfrac{1223}{960} e^6 - \tfrac{7913}{4480} e^8) \sin.6z - (\tfrac{47273}{32256} e^7 - \tfrac{1173271}{737280} e^9) \sin.7z + \tfrac{556403}{322560} e^8 \sin.8z - \tfrac{10661993}{5160960} e^9 \sin.9z.$$

M. l'Abbé Bossut (*Mémoires des Prix*, 1766) a donné, pour parvenir à cette derniere série, une méthode aussi simple qu'élégante, et qui, d'après l'épreuve que j'en ai faite, n'est pas plus laborieuse que la mienne. Mais comme celle-ci est purement trigonométrique, j'ai dû la préférer dans ce Traité à celle de ce savant Géometre. J'observerai qu'ayant trouvé par l'une et l'autre méthode les mêmes coëfficients numériques jusqu'à la 8e puissance de l'excentricité inclusivement, je ne puis douter qu'ils ne soient exacts. Je n'ai calculé les coëfficients de la 9e que par ma méthode.

M. Jeaurat (*Mémoires présentés à l'Acad.* Tom. IV, pag. 605) a donné une série poussée jusqu'à e^8, laquelle sert à trouver de même le rayon vecteur par l'anomalie moyenne.

772. *Trouver une méthode expéditive pour calculer les tables de l'équation du centre, et du rayon vecteur d'une planete.*

On peut employer les formules (767, 12e, 14e) pour faire ces calculs avec beaucoup de promptitude, et d'ailleurs avec autant

d'exactitude qu'on peut le desirer. Nous en donnerons un exemple sur l'orbite la plus elliptique, en cherchant l'équation du centre et le rayon vecteur de Mercure pour 1° d'anomalie moyenne.

Partons de $z = 0$; alors $r = a + e$, et $\delta z = 1°$. En calculant l'équation 14ᵉ avec les éléments de l'orbite pris dans l'Astronomie de M. de la Lande, et employant dans le premier calcul r au lieu de $(r - \frac{1}{2}\delta r)$, parceque δr n'est pas encore connu, on a

$$\begin{aligned} \log.(\delta z = 3600'') &= 3,5563025 \\ \log.a &= 4,5878219 \\ \log.b &= 4,5784400 \\ \log.\text{constant} &= 2,7225644 \\ \text{compl.log.}rr &= 0,6619268 \\ \log.\delta u &= 3,384491 \end{aligned}$$

Et par conséquent $\delta u = 40' 23'', 77$ à très peu près.

Nommant q l'équation du centre, on sait que $z - u = q$; ce qui donne $\delta z - \delta u = \delta q$. Donc, dans notre exemple, $\delta q = 60' - 40' 24'' = 19' 36''$. C'est la différence de l'équation du centre, pour les deux cas de $z = 0$ et de $z = 1°$. Mais on sait encore que lorsque $z = 0$, on a de même $u = 0$, et par conséquent $q = 0$. Donc lorsque $z = 1°$, $u = 40' 24''$, et $q = 19' 36''$; ce qui est précisément l'équation du centre de Mercure, à 1° d'anomalie moyenne, dans les Tables de M. de la Lande.

Pour le calcul du rayon vecteur, il est à propos de convertir l'équation 12ᵉ de maniere qu'elle donne les différences des logarithmes, parceque ce sont les logarithmes que les tables renferment. En prenant le premier terme de la série (G), (175), beaucoup plus exact que le premier terme de la série (E), on a $-\delta\log.r = -M \times \frac{\delta r}{r - \frac{1}{2}\delta r}$; et substituant la valeur de δr, (767, 12ᵉ),

$$-\delta\log.r = \frac{Mac\,\delta z}{bR''} \times \frac{\sin.(u + \frac{1}{2}\delta u)}{r - \frac{1}{2}\delta r},$$

équation qui se calcule comme il suit :

$$
\begin{aligned}
(177),\ \log.M &= 9,6377843\\
\log.a &= 4,5878219\\
\log.e &= 3,9009131\\
\log.\delta z &= 3,5563025\\
\text{compl.log.}b &= 5,4215600\\
(262),\ \text{compl.log.}R'' &= 4,6855749\\
\hline
\log.\text{constant} &\quad 1,789957\\
\log.\sin.(u + \tfrac{1}{2}\delta u = 0^\circ\,20'\,12'') &= 7,769075\\
\text{compl.log.}(r = a + e) &= 5,330963\\
\hline
\log.(-\delta\log.r) &= 4,889995\\
\hline
\text{Ce logarithme donne } \delta\log.r &= -\ 0,0000078\\
\text{Mais } \log.r &= 4,6690366\\
\hline
\text{Somme} &\quad 4,6690288
\end{aligned}
$$

Et tel est en effet dans les tables de M. de la Lande le log. du rayon vecteur de Mercure, à 1° d'anomalie moyenne.

La valeur trouvée de $\delta\log.r$ sert à corriger les deux calculs précédents où on auroit dû employer $\log.(r - \frac{1}{2}\delta r)$ au lieu de $\log.r$. Cette correction se réduit à ajouter 4 au dernier chiffre de $\log.(-\delta\log.r)$, ce qui n'altere point dans ce cas la valeur de $\delta\log.r$, et à ajouter 8 au dernier chiffre de $\log.\delta u$, ce qui donne plus exactement $\delta u = 40'\,23'',81$.

En faisant $z = 1°$, on trouvera de même les valeurs de u et de q correspondantes à $z = 2°$; et on procédera de la même maniere de degré en degré. Pour se convaincre de la promptitude de ces opérations, il suffit d'observer 1°. que la marche des valeurs successives de $\delta\log.r$ avertit le Calculateur de la valeur très approchée de la quantité $\log.(r - \frac{1}{2}\delta r)$ qu'il doit employer dans chaque calcul; ce qui lui épargne le travail des corrections : 2°. qu'au moyen des logarithmes constants, les deux calculs de l'équation du centre et du rayon vecteur n'exigent d'autre recherche que celle de trois logarithmes pour chaque degré d'anomalie moyenne.

On pourroit craindre, en se servant de formules dont l'exactitude est à la vérité très approchée, mais non pas rigoureuse, que l'accumulation des erreurs ne devînt telle qu'elle dût mériter attention. Mais il sera facile de se rassurer en faisant de temps en temps les calculs par le moyen des équations (767, 1°, 2°, 5°), et cherchant x par la méthode (769). Je suppose par exemple que ces calculs plus rigoureux se fassent de 30° en 30° d'anomalie moyenne. Ensuite pour faire avec plus de sûreté les calculs intermédiaires au moyen de mes formules différentielles, 1°. on tiendra compte des centiemes de seconde, dans la formation des valeurs successives de u et de q; 2°. on formera les logarithmes successifs du rayon vecteur au moins avec une décimale de plus que ce qu'on veut en donner aux logarithmes de la table; 3°. on partira de 0° d'anomalie moyenne pour monter jusqu'à 15°, et de 30° pour descendre jusqu'à 15°: on s'y prendra de même pour les autres intervalles.

Observons que les équations 12°, 14°, et au lieu de celles-là, les 8° et 10° sont singulierement propres à fournir avec une grande précision les parties proportionnelles dans les tables déjà faites; lorsque par la regle de trois qu'on emploie ordinairement on ne pourra obtenir toute l'exactitude desirée, à cause de la trop grande inégalité des variations de l'équation du centre, et du logarithme du rayon vecteur.

773. *Trouver la plus grande équation du centre d'une planete.*

Au point de la plus grande valeur de q, on a $\delta q = 0$, (141); par conséquent l'équation (772), $\delta q = \delta z - \delta u$, donne, dans ce cas, $\delta z = \delta u$. Donc alors $ab = rr$, (767, 10°), ou $r = \sqrt{ab} = \frac{bb}{a - e\cos.u}$, (767, 3°). De cette derniere équation on tire

$$\cos.u = \frac{a - b\sqrt{\frac{b}{a}}}{e}.$$

Cette formule est simple et peut-être neuve. Mais comme la différence

rence entre les deux termes du numérateur se trouve ordinairement petite, ce qui peut nuire à l'exactitude des secondes dans la valeur de u, je transforme cette équation, et j'ai (I. 42°),

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{b\sqrt{\frac{b}{a}} - (a - e)}{a + e - b\sqrt{\frac{b}{a}}}}.$$

Mais $(a - e)(a + e) = bb$, (767, 6°) : prenant dans cette équation les valeurs de $a + e = \frac{bb}{a - e}$ et de $a - e = \frac{bb}{a + e}$, les substituant dans l'équation précédente, et divisant la fraction par $b\sqrt{\frac{b}{a}}$, j'obtiens l'expression suivante qui peut être plus commode pour l'usage des logarithmes :

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{ab}}{a + e}}{\frac{\sqrt{ab}}{a - e} - 1}}.$$

L'une ou l'autre de ces deux dernieres formules fera connoître avec précision l'anomalie vraie correspondante à la plus grande équation du centre. La valeur trouvée de tang.$\frac{1}{2}u$ sera utile pour le calcul de l'équation 5° (767), qui fera connoître l'anomalie excentrique, de laquelle on déduira ensuite l'anomalie moyenne en employant l'équation 1°; et enfin l'équation $q = z - u$ donnera la plus grande valeur cherchée.

774. *Trouver une méthode expéditive pour calculer la table générale du mouvement des cometes dans une orbite parabolique.*

Nommons t le temps écoulé depuis le passage au périhélie, de la comete de 109 jours : (c'est ainsi qu'on appelle la comete dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne du soleil à la Terre, parceque cette comete en partant du périhélie parcourroit 90° d'anomalie vraie en 109 jours). Nous considérons le temps t comme compté en jours et décimales de jours.

On a (la Lande, *Astr.* 3034),

$$(F)\ldots\ldots \text{tang.}^3\tfrac{1}{2}u + 3\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}u = \frac{4t}{109,6154};$$

Et en différentiant, $\frac{3\delta u\,\text{tang.}^2\frac{1}{2}u}{2\cos.^2\frac{1}{2}u} + \frac{3\delta u}{2\cos.^2\frac{1}{2}u} = \frac{4\delta t}{109,6154} = \frac{3\delta u}{2\cos.^2\frac{1}{2}u}(1 + \text{tang.}^2\tfrac{1}{2}u) = \frac{3\delta u}{2\cos.^4\frac{1}{2}u}$, (I. 19e). Je mets, pour plus d'exactitude, $\cos.\frac{1}{2}(u + \frac{1}{2}\delta u)$ au lieu de $\cos.\frac{1}{2}u$, comme me l'indiquent par analogie les différentielles finies des lignes trigonométriques, et j'ai

$$(G)\ldots\ldots \delta u = \frac{4R''\delta t}{164,4231} \times \cos.^4\tfrac{1}{2}(u + \tfrac{1}{2}\delta u).$$

Le facteur R'' est nécessaire pour obtenir δu en secondes.

Il est évident que la fraction $\frac{4R''\delta t}{164,4231}$ étant une quantité constante dans le calcul d'une table, ce calcul doit se faire très rapidement en employant la formule que je viens de donner. Il sera de plus très exact, lorsqu'on tiendra compte des centiemes de secondes dans la formation des valeurs successives de u, comme je l'ai dit (772), et lorsque pour obvier à l'accumulation des petites erreurs, on résoudra par intervalles l'équation (F), en employant la valeur de u trouvée par le moyen de l'équation (G), et cherchant celle de t : l'erreur de celle-ci étant connue, il est facile de corriger l'erreur de u, en employant la même formule (G).

La table générale du mouvement des cometes a été recalculée avec le plus grand soin et augmentée par le P. Pingré dans son excellent *Traité sur les Cometes*. Cependant les formules (F), (G) peuvent encore avoir leur application, soit pour la vérification de cette table ou de toute autre de la même espece, soit pour trouver les quantités intermédiaires ou les parties proportionnelles avec la plus grande précision.

775. *Trouver le mouvement horaire d'une planete en longitude.*

En nommant δz le mouvement horaire moyen en longitude, δu le mouvement horaire vrai sur l'orbite, ces mouvements et ceux

d'anomalie correspondants étant sensiblement égaux pour un temps d'une heure; la formule (767, 14°) donne la solution de ce problême avec plus d'exactitude qu'on n'en peut désirer dans un passage de Mercure ou de Vénus sur le disque du Soleil: la 10ᵉ suffira, lorsque le problême n'exigera pas autant de précision.

Si l'on veut avoir le mouvement horaire réduit au plan de l'écliptique, qu'on représente ce mouvement par AE, et le mouvement correspondant sur l'orbite par CD. Puisque A = 90° = E, les angles A et B sont constants, et changeant C en A et A en C dans l'analogie infinitésimale (679), on aura $\eth$AB : $\eth$BC :: cos.B : cos.ᵃ AC. Mais AC est la latitude héliocentrique de la planete, B l'inclinaison de l'orbite, $\eth$BC = CD = $\eth u$. Donc en faisant AE ou $\eth$AB = $\eth u'$, et mettant dans l'analogie la valeur (767, 10°) de $\eth u$, on aura Fig.52

$$\eth u' = \eth z \times \frac{ab}{rr} \times \frac{\cos. incl.}{\cos.^2 lat.}.$$

776. *Trouver le mouvement horaire d'une planete en latitude.*

La distance à une planete, comptée de son nœud ascendant, selon l'ordre des signes, sur l'orbite, se nomme *argument de latitude*. Comme le mouvement du nœud est insensible dans un temps d'une heure, on a $\eth$*arg. lat.* = $\eth$*long.* plan. = $\eth u$, (775). Cela posé, je prends l'équation (*Astr.* la Lande, 1129), sin. *lat.* = sin. *incl.* sin. *arg. lat.* = sin. *incl.* sin. *dist.* ☊, et différentiant j'ai $\eth$*lat.* cos. *lat.* = $\eth u$ cos. *dist.* ☊ sin. *incl.* = $\eth u$ sin. *lat.* cot. *dist.* ☊. En substituant la valeur de $\eth u$, (767, 10°), et désignant encore par $\eth z$ le mouvement horaire moyen en longitude, j'obtiens la formule suivante;

$$\eth lat. = \eth z \times \frac{ab}{rr} \times \text{tang. } lat. \text{ cot. } dist. ☊.$$

777. *Trouver le mouvement des nœuds des orbites des planetes, sur l'écliptique, produit par les attractions réciproques.*

Soit AB l'écliptique, et supposons que les signes procèdent de B en A; soit AC l'orbite d'une planete *P*, et BC l'orbite d'une Fig.71

Fig.71 autre planete p. Je considere d'abord l'effet de l'attraction de la planete p, en raison duquel le nœud C des deux orbites rétrograde sur l'orbite BC, de sorte que l'orbite troublée AC se trouve, par exemple, dans la situation ac. Il est visible que cette perturbation n'altere pas l'angle B : de plus l'altération qu'éprouve l'angle C de l'inclinaison mutuelle des deux orbites est si foible, d'après les observations, que relativement au mouvement des nœuds on peut la considérer comme une quantité à-peu-près nulle, et supposer sans scrupule que $C = c$. Donc le triangle ABC, en se changeant en aBc, conserve comme constants les angles B et C; on a par conséquent (675):

(H)..... $\delta BC : \delta AB :: 1 : \cos.B + \sin.B \cos.AB \cot.A$.

Or δBC est le mouvement rétrograde Cc de l'orbite troublée, sur celle de la planete troublante, et la quantité de ce mouvement est déterminée par la théorie de l'attraction; δAB est le mouvement cherché du nœud A de l'orbite troublée, sur l'écliptique; B ou CBA est l'inclinaison de l'orbite perturbatrice; A ou BAC est le supplément de l'inclinaison de l'orbite troublée; AB est la distance entre les nœuds des deux planetes sur l'écliptique. Les trois dernieres quantités sont toujours connues; et par conséquent notre formule (H) a l'avantage de résoudre immédiatement le problême, en donnant l'inconnue sans qu'on soit obligé à aucun calcul préliminaire pour déterminer la valeur de quelque autre partie du triangle ABC.

Pour trouver maintenant le mouvement du nœud de la pla-
Fig.72 nete p, produit par l'attraction de la planete P, on appellera BC l'orbite de celle-ci, AC l'orbite de p, transportée en ac par la perturbation; et l'analogie (H) résoudra encore ce problême. On observera seulement qu'ici BAC est l'inclinaison de l'orbite troublée, et B le supplément de l'inclinaison de l'orbite perturbatrice.

Si l'on nomme PP la planete troublante, pp la planete troublée, m le mouvement de l'orbite troublée sur celle de la planete

troublante, et qu'on observe qu'au lieu de l'angle d'inclinaison de celle des deux planetes dont le nœud est plus avancé en longitude, on doit employer le supplément de ce même angle, l'analogie (H) donnera généralement

(K)... Mouvement du nœud $= m$ (cos.*incl.PP* + sin.*incl.PP* cos.*dist.nœuds* cot.*incl.pp*).

778. La fig. 71 suppose *rétrograde* le mouvement A*a* du nœud A sur l'écliptique; la fig. 72 le suppose *direct*. Ce seroit le contraire, si *ca* coupoit CA entre les points A et C, comme cela arrive aussi. Il importe donc d'avoir une regle générale pour déterminer dans quel cas le mouvement cherché est *direct*, et dans quel autre il est *rétrograde*. Les signes que j'ai donnés aux différentielles dans la construction de mes analogies conduisent à cette regle. Puisque δBC et δAB ont le même signe dans l'analogie (H), il s'ensuit (726) que ces variations se font dans un même sens lorsque le quatrieme terme de l'analogie est positif, et en sens contraires lorsque ce terme est négatif. Or dans le système de l'attraction, le mouvement C*c* est toujours *rétrograde;* ensorte que BC diminue, et que δBC est *négatif*. De plus la diminution de AB indique le mouvement *rétrograde* dans le cas de la fig. 71, et le mouvement *direct* dans le cas de la fig. 72. Donc *le mouvement du nœud ascendant de la planete troublée est ou* direct *ou* rétrograde, *selon que le nœud ascendant de la planete troublante est* plus *avancé ou* moins *avancé en longitude que le nœud de la planete troublée.* Cette regle suppose positif le facteur binôme de m dans l'équation (K): lorsqu'il sera négatif, on mettra dans la même regle *moins* au lieu de *plus*, et *plus* au lieu de *moins*. De cette maniere on n'aura pas besoin de consulter une figure pour se guider dans le calcul.

779. Appliquons notre solution et nos regles à un exemple dans lequel nous ferons abstraction de la valeur absolue de δBC et de δAB. La longitude du nœud de Saturne est actuellement 3° 22°, celle du nœud de Mars 1° 18°. Donc la distance des nœuds est de

$2' 4° = 64°$. L'inclinaison de l'orbite de Saturne est de 2° 30′, celle de Mars de 1° 51′. Si on cherche l'effet de l'attraction de Mars sur le nœud de Saturne, on a log.cos.*incl.PP.* =log.cos. 1°51′ = 9, 9998 ; et log.(sin. *incl.PP* cos.*dist.nœuds* cot.*incl.pp*) = log.(sin. 1° 51′ cos.64° cot.177° 30′) = — 9, 5107, logarithme d'une quantité négative (734). Comme ce logarithme est plus petit que le précédent, il s'ensuit que le facteur binôme de *m* est une quantité positive ; et puisque le nœud de Mars, planete troublante, est *moins* avancé en longitude que le nœud de Saturne, le mouvement du nœud de Saturne, en vertu de l'attraction de Mars, sera *rétrograde.*

Si l'on cherche l'effet de l'attraction de Saturne sur le nœud de Mars, on a log. cos. *incl. PP* = log. cos. 177° 30′ = — 9, 9996 ; et log. (sin. *incl. PP* cos. *dist. nœuds* cot. *incl. pp*) = log.(sin. 177° 30′ cos. 64° cot. 1° 51′) = 9, 7723. Le facteur de *m* est donc négatif, et par conséquent on doit changer *moins* en *plus* dans la regle, et les mots *plus* et *rétrograde* se correspondront. Mais le nœud de Saturne ou de la planete troublante, est le *plus* avancé en longitude ; donc aussi l'attraction de Saturne fait *rétrograder* le nœud de Mars.

780. *Trouver le* maximum *du mouvement du nœud d'un satellite sur l'orbite de Jupiter, causé par l'attraction d'un autre satellite.*

Fig.71 Soit BA l'orbite de Jupiter, BC celle du satellite troublant, AC celle du satellite troublé. Il résulte des perturbations continuelles que les nœuds A et C rétrogradant en *a* et en *c*, et successivement de plus en plus, se confondent enfin avec le nœud B ; puis l'orbite
Fig.72 troublée AC passe au-delà et s'avance de l'autre côté du nœud B, jusqu'à ce que le nœud A arrive à la plus grande distance possible du nœud B. Alors l'orbite AC se rapproche de nouveau, les nœuds A et C reviennent se confondre avec le nœud B ; puis le nœud A
Fig.71 s'éloigne de B jusqu'à ce que la distance AB soit la plus grande possible. Le nœud A du satellite troublé va et vient ainsi périodiquement de chaque côté du nœud B du satellite troublant. Or la

plus grande valeur de AB est ce qu'il est question de déterminer.

Lorsqu'un triangle a deux parties constantes, les questions *de maximis* et *de minimis* des parties variables se résolvent immédiatement par la Trigonométrie, (on en verra (831, 832) d'autres exemples) sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours aux opérations quelquefois pénibles du calcul différentiel qu'exige la regle (141).

En effet dans le triangle ABC on a sin.B : sin.C :: sin.AC : sin.AB. Mais les angles B et C sont constants (777) : il est donc évident, par les tables des sinus, que sin.AB sera le plus grand possible quand on aura AC = 90°, et que si alors AB est < 90°, ce sera aussi le moment du *maximum* de AB. Mais lorsque AC = 90°, en premier lieu AB ne peut être de 90°, parceque (417) B seroit aussi de 90°, ce qui n'est pas, puisqu'il s'en faut qu'aucun des satellites de Jupiter ait son orbite perpendiculaire sur l'orbite de cette planete : en second lieu AB ne peut être plus grand que 90°; car (VII 16°), comme AC = 90°, cot.B = — cos.AB cot.A, ou cos.AB = — tang.A cot.B, et les deux angles A et B du triangle ABC étant évidemment et nécessairement d'especes différentes, il s'ensuit que cos.AB est toujours positif. Donc la distance qu'apporte entre les nœuds de deux satellites l'attraction de l'un des deux (abstraction faite de la réaction du satellite troublé) est la plus grande possible, lorsque l'intersection commune de leurs orbites est à 90° du nœud du satellite troublé.

La derniere équation, cos.AB = — tang.A cot.B, fera donc connoître aisément la plus grande valeur de AB.

781. M. de la Lande a le premier reconnu que *les perturbations doivent altérer l'inclinaison des orbites planétaires sur l'écliptique;* découverte très importante, sur-tout par son application aux changements d'inclinaison des orbites des satellites sur l'orbite de Jupiter. Comme je ne crois pas que pour déterminer ces changements on puisse rien ajouter à la formule et à la regle données par ce célebre Astronome (*Astr.* 1377 à 1381), je me contente de les indiquer au Lecteur.

782. *Trouver le changement de l'ascension droite, de la longitude, de la latitude et de l'angle de position des astres, et celui de l'obliquité de l'écliptique, occasionnés par l'attraction des planetes sur la Terre.*

Fig.72 Soit AC l'écliptique, l'ordre des signes de A en C, AB l'équateur, A le premier point du belier, BC l'orbite d'une planete dont l'attraction sur la Terre déplace l'écliptique de AC en *ac*. Les angles B, C étant constants (777), et la théorie de l'attraction donnant la quantité C*c* que nous avons appellée *m*, on demande d'abord la valeur de A*a*, variation de AB ou de l'ascension droite des astres, qui se compte du point A, et la valeur de (CAB — *ca*B), variation de l'angle A ou de l'obliquité de l'écliptique. Or (673, 664), δBC : δAB :: sin.A : sin.C cos.AC, et δBC : δA :: 1 : sin.AC sin.C. Donc, nommant *PP* la planete troublante, ☊ la longitude de son nœud ascendant, et remarquant que δBC est négative (778), d'où s'ensuit la diminution de AB ainsi que de A, lorsque cos.AC et sin.AC sont respectivement positifs (42); on a

(K)... dimin. *asc. dr.* = *m* cos.☊ × $\frac{\text{sin.}incl.PP}{\text{sin.}obliq.}$.

(L)... dimin. *obliq.* = *m* sin.☊ sin. *incl.PP*.

La *diminution* devient *augmentation* dans ces formules, lorsque le second membre est négatif.

En appliquant ces formules à chacune des planetes successivement, et prenant la somme des résultats de chaque formule, on a l'effet total des perturbations planétaires sur l'ascension droite des astres et sur l'obliquité de l'écliptique.

Fig.73 Soit maintenant P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, S le lieu d'un astre, L la situation nouvelle du pôle de l'écliptique troublée par la somme des attractions des planetes. On connoît par les formules précédentes le petit angle EPL qui est la diminution de l'ascension droite, commune à tous les astres, et (PE — PL) qui est la diminution de l'obliquité : on demande la variation qui a lieu, à raison de ces diminutions, sur l'angle E ou sur les longitudes des

des astres, sur le côté ES ou sur leurs latitudes, et sur l'angle S de position.

En se changeant en PLS, le triangle PES conserve comme constant le seul côté PS (d'où il suit, pour le remarquer en passant, que les déclinaisons des astres ne sont point altérées par les perturbations planétaires). J'emploierai donc la méthode que j'ai donnée (284). Je suppose d'abord que l'angle EPS est de même constant; puis faisant P = A, S = B, E = C, et changeant les signes dans le premier rapport des analogies infinitésimales (545, 550, 541), ces analogies me donnent

$$\begin{aligned} \delta E &: -\delta PE :: \sin.E : \tang.ES \\ -\delta ES &: -\delta PE :: \cos.E : 1 \\ -\delta S &: -\delta PE :: \sin.E : \sin.ES. \end{aligned}$$

Je suppose actuellement qu'indépendamment de PS, PE soit constant. J'aurai (642, 631, 635),

$$\begin{aligned} \delta E &: -\delta P :: \cos.PE - \sin.PE \cos.E \cot.ES : 1 \\ -\delta ES &: -\delta P :: \sin.PE \sin.E : 1 \\ \delta S &: -\delta P :: \sin.PE \cos.E : \sin.ES. \end{aligned}$$

Prenant les sommes des deux valeurs partielles de δE, de δES et de δS données par ces six analogies, je trouve

$$\delta E = -\delta PE \sin.E \cot.ES - \delta P(\cos.PE - \sin.PE \cos.E \cot.ES),$$

$$-\delta ES = -\delta PE \cos.E - \delta P \sin.PE \sin.E,$$

$$-\delta S = -\frac{\delta PE \sin.E - \delta P \sin.PE \cos.E}{\sin.ES}.$$

La diminution de la longitude, correspondante à la quantité $-\delta P \cos.PE$, est commune à tous les astres, ensorte qu'on peut la négliger ici et la laisser confondue avec la précession des équinoxes (784); car l'objet des formules précédentes est de connoître et de distinguer des variations communes à tous les astres la variation propre et particuliere que les perturbations occasionnent sur la

Fig.73 position [illegible] n astre donné. Cela posé, rappellons-nous que l'on a (740), E = 90° — *long.*, ES = 90° — *lat.*, P = 90° + *asc.dr.*, PE = [illegible]; par conséquent ∂E = — ∂*long.* = — var.*long.*, ∂ES [illegible] — ∂*lat.* = — var.*lat.*, ∂P = ∂*asc.dr.* = — dim.[illegible]*dr.*, et ∂PE = ∂*obl.* = — dim.*obl.* (Je donne le signe [illegible] *asc.dr.* et à dim.*obl.*, parcequ'on auroit leurs valeurs [illegible] les équations (K), (L), si on y faisoit *m* négatif, comme [illegible]st réellement). Les dénominations ou valeurs que nous venons [illegible]ouver, étant substituées dans les trois équations précédentes qui nous ont donné les valeurs de ∂E, de ∂ES, et de ∂S, n[illegible]

long. = — ta[illegible].*lat.* [illegible].*obl.* cos.*long.* — dim.*asc.dr.* sin.*obl.* sin.*long.*)

.*lat.* = dim.*obl.* sin.[illegible] — dim.*asc.dr.* sin.*obl.* cos.*long.*

ang.posit. = $-\frac{1}{\cos.lat.}$(dim.*obl.* cos.*long.* — dim.*asc.dr.* sin.*obl.* sin.*long.*)

Quand on a en nombres les coëfficients de sin.*long.* et de cos.*long.*, le second membre de chacune de ces équations se réduit à un seul terme par la méthode (369).

Si la latitude est australe, on fera négatif le second membre de l'avant-derniere équation; car alors + ∂ES = + var.*lat.*

Si l'astre est dans le second ou dans le troisieme quart de l'écliptique, on changera le signe du second membre de la derniere équation; car l'angle de position passant par zéro à 90° de la longitude de l'astre, devient ensuite négatif (16), et par conséquent sa variation change de signe.

783. *Trouver la correction de l'ascension droite et de la déclinaison d'un point quelconque de l'écliptique, relativement à la diminution de l'obliquité.*

Fig.55 Soit BC un arc de l'écliptique auquel corresponde l'arc AB de l'équateur quand l'obliquité est ABC, et l'arc BD de l'équateur si l'obliquité devient CBD. Le côté BC et l'angle droit opposé étant

constants, on a (610, 593), δAB : — δB :: sin.2AB : 2cot.B, et — δAC : — δB :: tang.AC : tang.B. Donc

augmentat. *asc.dr.* = $\frac{1}{2}$dim.*obl.* cot.*obl.* sin.2 *asc.dr.*

dim.*décl.* = dim.*obl.* cot.*obl.* tang.*décl.*

La premiere de ces formules est plus commode que celle qui se trouve dans la *Conn. des Temps* pour l'année 1766, pag. 188, sur-tout pour le calcul d'une table telle que la table XIX de M. de la Lande (*Astr.* Tom. I).

784. *Trouver les changements de l'ascension droite, de la déclinaison, et de l'angle de position des astres, causés par la précession des équinoxes,* ou par les attractions qu'exercent le soleil et la lune sur le sphéroïde terrestre.

Soit S un astre, E le pôle de l'écliptique, P le pôle de l'équateur, lequel, à cause des attractions solaire et lunaire, change de position, passe en L, et continue de se déplacer successivement, en accomplissant sa révolution autour du pôle E dans l'intervalle de 25750 années environ. Il est visible que le côté ES, et par conséquent la latitude de l'astre ne souffre point d'altération. Mais dans ce problême on regarde encore le côté PE comme constant, ou comme égal à LE, parceque l'altération qu'éprouve l'obliquité PE de l'écliptique dépend uniquement de l'inégalité périodique de l'attraction lunaire, et se considere séparément dans le problême (785). Ainsi dans le triangle PES qui se convertit en ELS et conserve comme constants les côtés EL, ES, étant donné PEL ou la précession en longitude, on demande la variation correspondante des angles P, S, et du côté PS. Faisant E = A, S = B, P = C, on a (642, 631, 635) Fig. 74

δP : — δE :: cos.PE — sin.PE cos.P cot.PS : 1,

— δPS : — δE :: sin.PE sin.P : 1,

δS : — δE :: sin.PE cos.P : sin.PS.

Fig. 74 Or comme nous l'avons vu (740), $E = 90° - long.$, $P = 90° + asc.dr.$, $PS = 90° - décl.$; par conséquent $-\partial E = +\partial long. = +$ précess. *long.*, $\partial P = +$ préc. *asc.dr.*, cos. P = — sin. *asc.dr.*, et $-\partial PS = +$ précess. *décl.* De plus en employant la méthode (722), on trouve que pour avoir les précessions avec une grande exactitude, il faut écrire dans le second rapport des analogies précédentes, $P + \frac{1}{2}\partial P$ au lieu de P, et $PS - \frac{1}{2}\partial PS$ au lieu de PS; ce qui importe sur-tout lorsqu'on cherche le mouvement de précession pour un intervalle de plusieurs années. Appellant donc *asc.dr. intermédiaire*, *décl. intermédiaire* l'ascension droite et la déclinaison de l'astre dans l'année qui tient le milieu entre la premiere et la derniere des années qu'embrasse le calcul, on a

préc. *asc.dr.* = préc. *long.* (cos. *obl.* + sin. *obl.* sin. *asc.dr. int.* tang. *décl. int.*)

préc. *décl.* = préc. *long.* sin. *obl.* cos. *asc.dr. interm.*

préc. *ang. posit.* = — préc. *long.* sin. *obl.* $\times \frac{\text{sin. asc. dr. interm.}}{\text{cos. décl. interm.}}$

Lorsque la déclinaison sera australe, on fera négatif le second membre de la seconde équation; car alors $-\partial PS =$ — préc. *décl.*

Si l'astre est dans les signes descendans, on fera positif le second membre de la troisieme équation; car alors $-\partial E =$ — préc. *long.*

785. Trouver les changements de l'ascension droite et de la déclinaison d'un astre, produits par la nutation de l'axe de la Terre.

Dans le problême précédent nous avons supposé constante l'obliquité de l'écliptique; ce qui n'est pas rigoureusement vrai, puisque les observations ont appris au célebre Bradley que les changements considérables de l'inclinaison de l'orbite de la lune relativement à l'équateur, causés par la rapidité du mouvement de son nœud sur l'écliptique, rendent les effets de son attraction périodiquement inégaux, ainsi que l'exigeoit la théorie de Newton.

Voici en quoi consiste l'inégalité : le pôle P, au lieu de rester toujours à égale distance du pôle E, décrit, à-peu-près en 18 ans et demi, une ellipse dont le grand axe est de 18″, et le petit axe de 13″, 4 : la direction du grand axe est vers le pôle de l'écliptique, et par conséquent la plus grande variation que subit l'obliquité à raison de ce mouvement du pôle P, mouvement qu'on nomme *nutation*, s'étend à 9″ en plus et à 9″ en moins. Les variations intermédiaires sont proportionnelles au cosinus de la longitude du nœud de la lune, comme le démontre M. de la Lande (*Astr.* 2861). Et en général la formule suivante

$$\text{nut.}\,obl. = 9'' \cos.\Omega$$

donne la correction de l'obliquité moyenne ou uniformément décroissante (782), pour avoir l'obliquité apparente dans un temps donné.

Je suppose que la nutation transporte le pôle de L en P, et qu'on ait PES > LES et PE > EL, ainsi qu'il arrive dans le premier quart de la longitude du nœud. Le triangle ELS en se changeant en PES ne conserve comme constant que le côté ES : la formule précédente donne la variation du côté PE ; on a celle de l'angle E par celle qui suit, (*Astr.* la Lande, 2863, 2874)

$$\text{nut.}\,long. = -\frac{6'',7}{\sin.obl.} \times \sin.\Omega = -16'',8 \sin.\Omega.$$

Or ayant deux variations, je trouve les autres facilement par la méthode (284). Je suppose d'abord constant, outre le côté ES, l'angle E, et j'ai (545, 550), en faisant A = E, B = S, C = L,

$$-\delta L : \delta EL :: \sin.L : \text{tang.}SL ;$$
$$\delta SL : \delta EL :: \cos.L : 1.$$

Faisant ensuite constant, outre le côté ES, le côté EL, j'ai, en changeant les signes dans le premier rapport (642, 631) afin d'avoir δE positive, conformément à la figure,

$$-\delta L : \delta E :: \cos.EL - \sin.EL \cos.L \cot.SL : 1,$$
$$\delta SL : \delta E :: \sin.EL \sin.L : 1 ;$$

Fig. 74

puis, en [illegible]nant les sommes des deux valeurs de ☊L et de ☊SL,

— ☊[illegible]EL sin.L cot.SL + ☊E(cos.EL — sin.EL cos.L cot.SL);

☊[illegible] ☊EL cos.L + ☊E sin.EL sin.L.

Or — [illegible] = — ☊*asc. dr.* = — nut.*asc. dr.*, ☊SL = — nut[illegible] ☊EL = nut.*obl.* = 9″ cos.☊, et ☊E = — [illegible] = $\frac{6'',7}{\text{sin.}obl.}$ × sin.☊. Substituant ces valeurs dans les [illegible]x [illegible]ons précédentes, observant que ☊E cos.EL = 6″,7 cot.[illegible]in.[illegible] = 15″,4 sin.☊, et nous rappellant que cos.L = — sin.*asc. dr.*, nous aurons par la premiere des deux équations, nut.*asc. dr.* = — tang.*décl.*(9″ cos.☊ cos.*asc. dr.* + 6″,7 sin.☊ sin.*asc. dr.*) — 15″,4 sin.☊. Mais (II. 17°, 16°), 9″ cos.☊ cos.*asc. dr.* + 6″,7 sin.☊ sin.*asc. dr.* = 4″,5 cos.(☊ + *asc. dr.*) + 4″,5 cos.(☊ ∽ *asc. dr.*) — 3″,35 cos.(☊ + *asc. dr.*) + 3″,35 cos.(☊ ∽ *asc. dr.*). Donc

nut.*asc. dr.* = — 15″,4 sin.☊ — tang.*déclinaison* × (7″,85 cos.$\overline{\textit{asc. dr.} \backsim ☊}$ + 1″,15 cos.$\overline{\textit{asc. dr.} + ☊}$).

En traitant de même la seconde équation, elle donnera

nut.*décl.* = 7″,85 sin.(*asc. dr.* — ☊) + 1″,15 sin.(*asc. dr.* + ☊).

Lorsque la déclinaison sera australe, on fera négatif le second membre de cette formule; car alors + ☊SL = + nut.*décl.*

Les tables très commodes de Lambert pour la nutation en ascension droite et en déclinaison, ont été construites d'après les deux formules que nous venons de donner.

Ces mêmes formules et celle de la nutation en longitude servent à convertir en position apparente la position moyenne de l'astre.

786. *Trouver l'effet de l'aberration de la lumiere sur l'ascension droite et la déclinaison des étoiles fixes.*

Soit ✷ la longitude d'une étoile, ☉ la longitude du soleil.

M. de la Lande (*Astr.* 2818, 2823) démontre avec autant de facilité que de clarté les deux équations suivantes :

$$\text{aber.}\textit{long.} = -\frac{20'' \cos.(\bigstar - \odot)}{\cos.\textit{lat.}},$$
$$\text{aber.}\textit{lat.} = 20'' \sin.(\text{☀} - \odot) \sin.\textit{lat.}$$

La derniere de ces formules exige que dans tous les cas sin.*lat.* soit pris avec le signe positif.

Connoissant par ces équations les changements de la longitude et de la latitude d'une étoile, produits par l'aberration, nous trouverons facilement par la méthode (284) les changements de l'ascension droite et de la déclinaison.

Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, S un astre vu en T par l'effet de l'aberration de la lumiere. Les formules précédentes donnent la variation de l'angle E et celle du côté ES; on cherche la variation de l'angle P et celle du côté PS. Le triangle PES, en se changeant en PTE, conserve comme constant le seul côté PE. Donc si on suppose encore que le côté ES soit constant, on aura (635, 631) en faisant A = E, B = P, C = S, et changeant les signes dans le premier rapport, comme l'indique la figure qui est relative à ce qui arrive dans le premier quart de l'argument (☀ — ⊙) des formules précédentes ; Fig. 75

$$-\delta P : \delta E :: \sin.ES \cos.S : \sin.PS.$$
$$\delta PS : \delta E :: \sin.ES \sin.S : 1.$$

En supposant constant, outre le côté PE, l'angle E, on a (541, 550)

$$-\delta P : -\delta ES :: \sin.S : \sin.PS,$$
$$-\delta PS : -\delta ES :: \cos.S : 1.$$

Puis, en prenant les sommes des deux valeurs de δP et de δPS,

$$-\delta P = \frac{\delta E \sin.ES \cos.S - \delta ES \sin.S}{\sin.PS},$$
$$-\delta PS = -\delta E \sin.ES \sin.S - \delta ES \cos.S.$$

Mais $-\delta P = -\delta \textit{asc.dr.} = -$ aber.*asc.dr.* ; $-\delta PS =$

Fig. 75 aber. *décl.*, $\delta E = -$ aber. *long.* $= \frac{20'' \cos.(\bigstar - \odot)}{\cos. lat.}$, et $-\delta ES$ $=$ aber. *lat.* $= 20'' \sin.(\text{✱} - \odot) \sin. lat.$ Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et appellant p l'angle de position, d la déclinaison et l la latitude de l'astre, on a

$$(M)\ldots \text{aber. } asc.\,dr. = \frac{-20'' \cos.(\bigstar - \odot) \cos. p - 20'' \sin.(\bigstar - \odot) \sin. p \sin. l}{\cos. d}$$

$$(N)\ldots \text{aber. } décl. = -20'' \cos.(\text{✱} - \odot) \sin. p + 20'' \sin.(\text{✱} - \odot) \cos. p \sin. l$$

Lorsque la déclinaison sera australe, on changera les signes des deux termes du second membre de l'équation (N); car alors $-\delta PS = -$ aber. *décl.* Du reste on observera dans le calcul des deux formules (M), (N) les regles (42, 744) des signes. Mais de plus on fera attention que sin. p est négatif dans le second et dans le troisieme quart de l'ascension droite; car sin. S : sin. PE :: sin. P : sin. ES, d'où il suit qu'on a sin. $p = \frac{\sin. obl. \cos. asc.\,dr.}{\cos. lat.}$, et que par conséquent sin. p et cos. *asc. dr.* doivent avoir le même signe.

787. Les formules (M), (N) qui servent à convertir en position apparente la position moyenne d'une étoile, deviennent très commodes pour le calcul, en y introduisant la plus grande aberration respective, laquelle se trouve facilement au moyen de la regle (141). En différentiant d'abord l'équation (M), dans laquelle $\odot$ ou la longitude du soleil est la seule quantité variable, puis multipliant l'équation différentielle par cos. d, on a $o = -20''$ sin.$(\text{✱} - \odot)$ cos. $p\ \delta\odot + 20''$ cos.$(\text{✱} - \odot)$ sin. p sin. $l\ \delta\odot$. D'où l'on tire, en divisant par $20''$ cos.$(\text{✱} - \odot)$ cos. $p\ \delta\odot$,

$$(P)\ldots \text{tang.}(\text{✱} - \odot') = \sin. lat. \text{ tang. } ang. posit.$$

Par $\odot'$ je désigne la *longitude du soleil* au temps de la *plus grande aberration en ascension droite;* et comme $(\text{✱} - \odot)$ est l'élongation de l'étoile pour un temps quelconque, cette formule donne donc l'élongation de l'étoile, et par conséquent la longitude du soleil, au temps de la plus grande aberration soustractive en ascension

ascension droite. Je dis *soustractive*, ce qui se déduit du signe négatif de l'équation (Q) ci-après.

Je dois observer sur l'emploi de la formule (P), 1°. que tang.*ang.posit.* est négative dans le second et dans le troisieme quart de la longitude, comme nous l'avons vu (786) pour le sinus; 2°. que toutes les fois que le calcul de la formule donnera tang.(☀ — ⊙′) négative, il faudra rendre cette tangente positive en écrivant tang.(⊙′ — ☀), (154); 3°. enfin qu'en changeant à l'ordinaire le signe de tang.*ang.posit.* lorsque cet angle sera obtus, il faudra dans ce cas, pour avoir le lieu cherché du soleil, ajouter 180° au lieu donné par la formule.

Si on substitue ⊙′ à ⊙ dans la formule (M), cette formule donnera la valeur de la plus grande aberration en ascension droite. Dans ce cas la formule (M) peut se simplifier beaucoup au moyen de la formule (P). Celle-ci donne $\sin.p \sin.l = \frac{\sin.(\bigstar - \odot') \cos.p}{\cos.(\bigstar - \odot')}$. En substituant dans l'équation (M) cette valeur de $\sin.p \sin.l$, réduisant les deux termes du second membre au même dénominateur $\cos.d \cos.(☀ - \odot')$, et observant que $\cos.^2(☀ - \odot') + \sin.^2(☀ - \odot') = 1$, (28), on trouvera

(Q)... la plus grande aber. en *asc.dr.* $= - \frac{20'' \cos.p}{\cos.d \cos.(\bigstar - \odot')}$.

Actuellement nommons a la valeur en secondes, et prise avec le signe positif, de la plus grande aberration en ascension droite; cette formule nous donnera $\frac{20''}{\cos.d} = \frac{a \cos.(\bigstar - \odot')}{\cos p}$. Substituant dans la formule (M) cette valeur de $\frac{20''}{\cos.d}$, nous aurons, pour l'aberration dans un moment donné, aber.*asc.dr.* $= - a \cos.(☀ - \odot) \cos.(☀ - \odot') - a \sin.(☀ - \odot) \text{tang.}p \sin.l \cos.(☀ - \odot')$. Mais, par l'équation (P), tang.p sin.l = tang.$(☀ - \odot')$. Donc aber. *asc. dr.* $= - a \cos.(☀ - \odot) \cos.(☀ - \odot') - a \sin.(☀ - \odot) \sin.(☀ - \odot')$. Et par conséquent (II. 4°)...

(R)... aber.*asc.dr.* = — la plus grande aber.*asc.dr.* cos.(⊙′ ∽ ⊙)

Après avoir déterminé par les formules (Q), (P) la plus grande aberration, et la longitude correspondante du soleil, il est donc facile de trouver par la formule (R) l'aberration pour un moment donné. La différence ($\odot' \backsim \odot$) entre la longitude du soleil dans un moment donné et sa longitude au moment de la plus grande aberration, se nomme *l'argument annuel* de l'aberration.

La table XIX donnée par La Caille dans l'excellent Ouvrage intitulé *Astronomiæ fundamenta*, est construite sur la formule très expéditive (R) : cette table est singulièrement utile pour composer des tables particulieres d'aberration.

788. On peut se dispenser de calculer la formule (P). En effet
Fig. 67 soit LQ l'équateur, P son pôle, TL l'écliptique, E son pôle, S l'étoile, H le soleil. Dans le triangle SNH, rectangle en N, on a (VI. 11e), tang.NH = sin.NS tang.NSH. Mais NH est l'élongation de l'étoile, NS la latitude, NSH l'angle de position. L'équation que nous venons de donner est donc la même que l'équation (P). Donc au moment de la plus grande aberration en ascension droite, l'étoile et le soleil ont la même ascension droite : et par conséquent la longitude du soleil pour ce même instant peut se tirer ou d'une Éphéméride ou d'une table de réduction de l'équateur à l'écliptique, telle que la table XV de La Caille. J'observe que cette table contient des erreurs de 4′, et peut-être de plus fortes, je n'en ai vérifié que deux équations : mais on peut calculer une table semblable plus exactement en moins de deux heures.

789. En procédant pour la formule (N) comme nous avons fait pour la formule (M), et nommant $\odot''$ la longitude du soleil au temps de la plus grande aberration *soustractive* en déclinaison, on trouvera les équations suivantes :

(S)... tang.($\odot'' - \star$) = sin. *lat.* cot. *ang. posit.*

(T)... la plus grande aber. en *décl.* = $-\frac{20'' \sin.p}{\cos.(\odot'' \backsim \star)}$.

(U)... aber. *décl.* = — la plus grande aber. *décl.* cos.($\odot'' \backsim \odot$).

La différentiation de la formule (N) donne négative la valeur de tang.(☀ — ⊙″). Mais — tang.(☀ — ⊙″) = + tang.(⊙″ — ☀), (154). Ce changement fait, si l'on veut arriver aux formules (T), (U), il faut, par la même raison (154), substituer — sin.(⊙″ — ☀) à sin.(☀ — ⊙″), dans la formule (N).

La cotangente et le sinus de l'angle de position sont négatifs dans le second et dans le troisieme quart de la longitude, (786, 787).

Si l'angle de position est obtus, on sait que la cotangente doit changer de signe. De plus, soit dans ce cas, soit dans celui où l'étoile sera entre l'équateur et l'écliptique, on ajoutera 180° à l'arc (⊙″ — ☀) trouvé par la formule (S). Enfin toutes les fois que cette formule donne tang.(⊙″ — ☀) négative, l'arc (⊙″ — ☀) est > 90°, comme à l'ordinaire.

Si la déclinaison est australe, on change le signe du second membre de l'équation (T), comme nous l'avons dit (786) pour l'équation (N).

790. M. l'Abbé de Lambre, amateur aussi habile que zélé de l'Astronomie, a construit des tables générales qui viennent de paroître dans la *Conn. des Temps* pour 1788, pag. 226, lesquelles n'exigent que la connoissance du lieu du soleil, de l'ascension droite d'une étoile et de sa déclinaison, pour donner l'aberration en ascension droite et en déclinaison de cette même étoile. Il est en effet très avantageux et très commode, lorsqu'on cherche des corrections, de pouvoir les obtenir sans autres données que celles auxquelles ces corrections sont relatives. Dans les formules données par La Caille et généralement en usage, cet avantage est presque nul, à cause de la complication et de la multiplicité des regles et des opérations. Les formules précédentes (P), (Q), &c. sont, il est vrai, très expéditives pour calculer des tables particulieres d'aberration; mais elles exigent que l'on connoisse la longitude, la latitude et l'angle de position, et ces éléments ne se trouvent pas toujours dans les catalogues d'étoiles. Je crois donc à propos de rechercher comment ces formules pourront se transformer en

celles qui ont servi à la construction des tables nouvelles de M. l'Abbé *de Lambre*.

Fig. 67 Nous avons vu (788) que H est le lieu du soleil au moment de la plus grande aberration en ascension droite de l'étoile S. Or le triangle LMH rectangle en M donne (VI. 10°), cot.LH = cos.MLH cot.ML, ou

(A)... cot.$\odot'$ = cos.*obl.* cot.*asc.dr.* de l'étoile;

formule qui donne la longitude du soleil au temps de la plus grande aberration soustractive en ascension droite.

Le triangle LMH donne encore (VI. 6°), $\sin.H = \frac{\sin.ML}{\sin.LH}$, et le triangle SNH rectangle en N donne (VI. 9°), $\sin.H = \frac{\cos.NSH}{\cos.NH}$. Mais NSH est l'angle de position de l'étoile, NH l'élongation. Donc $\frac{\cos.p}{\cos.(\bigstar - \odot')} = \frac{\sin.ML}{\sin.LH} = \frac{\sin.asc.dr.}{\sin.\odot'}$. En substituant cette valeur dans la formule (Q), on a

(B)... la plus grande aber. en *asc.dr.* = $-\frac{20''\ \sin.asc.dr.}{\cos.décl.\ \sin.\odot'}$.

Cette valeur, prise avec le signe positif, comme nous l'avons fait (787), et mise dans la formule (R), donne aber.*asc.dr.* = $-\frac{20''}{\cos.décl.} \times \frac{\sin.asc.dr.\ \cos.(\odot' \backsim \odot)}{\sin.\odot'}$. Mais $\frac{\cos.(\odot' \backsim \odot)}{\sin.\odot'}$ = cot.$\odot'$ cos.$\odot$ + sin.$\odot$, (II. 4°). Que l'on prenne dans la formule (A) la valeur de cot.$\odot'$, et on aura aber.*asc.dr.* = $-\frac{1}{\cos.décl.} \times$ (20″ cos.*obl.* cos.*asc.dr.* cos.$\odot$ + 20″ sin.*asc.dr.* sin.$\odot$). Mais 20″ cos.*obl.* = 18″,346 : donc en procédant comme nous avons fait (785) pour parvenir à la formule de la nutation en ascension droite, et appellant A l'ascension droite de l'étoile, on aura

(C)... aber.*asc.dr.* = $-\frac{19'',17\ \cos.(A \backsim \odot) - 0'',83\ \cos.(A + \odot)}{\cos.décl.}$.

791. Cherchons maintenant les formules correspondantes pour l'aberration en déclinaison. Soit élevé du point S un arc STQ perpendiculaire sur MP; ce qui donne QS = 90° = QM, et Q =

SM, (390, 386) : Q est donc la déclinaison de l'étoile S, et QL $=$ 90° $+$ ML $=$ 90° $+$ *asc.dr.* Le triangle TNS, rectangle en N, donne (VI. 11°), tang.TN $=$ sin.SN tang.TSN. Mais SN est la latitude de l'étoile, et TSN $=$ 90° $-$ NSH est le complément de l'angle de position. Donc tang.TN $=$ tang.($\odot''$ $-$ ✱), suivant la formule (S); et par conséquent T est le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration soustractive en déclinaison. Pour connoître la longitude du soleil pour ce temps, il faut donc trouver l'arc LT. Or le triangle TLQ donne (VII. 31°), cot.TL $=$ $\frac{\text{sin.TLQ cot.Q} + \text{cos.TLQ cos.QL}}{\text{sin.QL}}$, et par conséquent cot.$\odot''$ $=$ $\frac{\text{sin.}obl.\ \text{cot.}décl. - \text{cos.}obl.\ \text{sin.}asc.dr.}{\text{cos.}asc.dr.}$, ou, pour plus de commodité dans le calcul,

(D)... cot.$\odot''$ $=$ cos.*obl.* tang.*asc.dr.* $\left(\frac{\text{tang.}obl.\ \text{cot.}décl.}{\text{sin.}asc.dr.} - 1\right)$,

formule qu'on peut calculer avec les seules tables trigonométriques en logarithmes, en suivant l'exemple donné (741).

Les regles des signes observées, si cot.$\odot''$ se trouve positive, le soleil sera dans le premier ou dans le troisieme quart de l'écliptique, et dans le second ou dans le quatrieme, si cot.$\odot''$ se trouve négative. La regle suivante détermine quel est celui des deux quarts que l'on doit choisir : *la longitude du soleil est dans le premier ou dans le second quart, si l'ascension droite de l'étoile est dans le premier ou dans le dernier; la longitude du soleil est dans le troisieme ou dans le dernier quart, si l'ascension droite de l'étoile est dans le second ou dans le troisieme.* La raison de cette regle se tire de la formule (E) ci-après, dont le but est de donner la valeur de la plus grande aberration *soustractive*, ensorte que cette valeur devant toujours être négative, le cosinus de l'ascension droite de l'étoile et le sinus de la longitude du soleil ont nécessairement le même signe dans la formule (E).

Cette seule regle et la seule formule (D) me semblent devoir être préférées aux regles et aux formules multipliées qu'on a employées jusqu'à présent.

Fig. 67 M. de la Lande a donné dans le septieme volume des *Éphémérides de Paris* une table très ample pour trouver le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en déclinaison. La table XVII de La Caille est trop abrégée, et souvent les parties proportionnelles y sont sujettes à des erreurs sensibles.

Le triangle TLQ donne $\sin.T = \frac{\sin.LQ \sin.Q}{\sin.TL} = \frac{\cos.asc.dr. \sin.décl.}{\sin.\odot''}$. Le triangle TNS, rectangle en N, donne (VI. 9e), $\sin.T = \frac{\cos.TSN}{\cos.TN}$. Mais TSN est le complément de l'angle de position, et TN est l'élongation. Donc $\frac{\sin.p}{\cos.(\odot'' \backsim \star)} = \frac{\cos.asc.dr. \sin.décl.}{\sin.\odot''}$. En substituant cette valeur dans la formule (T) (789), nous aurons

(E)... la plus grande aber. en *décl.* $= - \frac{20'' \cos.asc.dr. \sin.décl.}{\sin.\odot''}$.

Lorsque la déclinaison est australe, il seroit à propos de changer le signe du second membre de cette équation, par la raison que nous avons déjà donnée relativement à l'équation (N). Mais comme alors sin.*décl.* seroit négatif, il est plus court de laisser au second membre le signe négatif, et de faire sin.*décl.* positif dans tous les cas.

Prenons le second membre de cette équation (E) avec le signe positif, comme à l'ordinaire, pour le substituer dans la formule (U); développons cos.($\odot'' \backsim \odot$), (II. 4e), et substituons à cot. $\odot''$ sa valeur prise de la formule (D) : nous trouverons aber.*décl.* $= -$ 20″ sin.*obl.* cos.$\odot$ cos.*décl.* $+$ sin.*décl.*(20″ cos.*obl.* sin.A cos.$\odot$ $-$ 20″ cos.A sin.$\odot$) $= -$ 7″, 96 cos.$\odot$ cos.*décl.* $+$ sin.*décl.*(18″, 346 sin.A cos.$\odot$ $-$ 20″ cos.A sin.$\odot$). Au moyen des formules (II. 17e, 14e, 15e), cette valeur se réduit comme il suit, en appellant D la déclinaison de l'étoile :

aber.*décl.* $=$ sin.D (19″, 17 sin.$\overline{A - \odot}$ $-$ 0″, 83 sin.$\overline{A + \odot}$) $-$ 3″, 98 (cos.$\overline{\odot + D}$ $+$ cos.$\overline{\odot \backsim D}$).

Lorsque la déclinaison est australe, il faut faire positif le facteur 3″, 98, par la raison citée déjà plus d'une fois, raison qui n'influe

pas sur le facteur binôme de sin.D, pourvu qu'on fasse sin.D toujours positif.

Les tables de M. de Lambre sont construites sur cette formule et sur la formule (C). S'il s'agissoit, non de construire des tables, mais seulement de calculer l'aberration pour un temps donné, au lieu du dernier terme — 3″, 98, &c. de la formule ci-dessus, il seroit plus commode d'employer — 7″, 96 cos.⊙ cos.D.

L'Astronome que nous venons de citer a aussi donné, dans le Tom. VIII des *Éphémérides de Paris* de M. de la Lande, des tables nouvelles et très exactes de l'*aberration des planetes en longitude.*

792. Nous avons déterminé les effets de la nutation et de l'aberration sur l'ascension droite et sur la déclinaison : la même marche nous conduiroit à la détermination des changements de l'angle de position, produits par les mêmes causes. Nous avons omis cette recherche, parce qu'il nous a paru qu'on n'avoit jamais besoin d'employer l'angle de position apparent, c'est-à-dire corrigé des petites variations périodiques dépendantes de la nutation et de l'aberration. Dans l'usage même des formules (786 à 789), il n'y a point de motif pour employer l'angle de position apparent plutôt que le vrai, quand la différence de ces deux angles ne seroit pas tout-à-fait insensible; parce que ces formules sont fondées sur le calcul infinitésimal dans lequel on confond perpétuellement la valeur primitive de toute quantité variable avec la valeur de cette quantité après sa variation.

793. *Déterminer les dimensions de la Terre, en la supposant de figure elliptique.*

Le rapport entre les deux axes de la Terre se détermine par la mesure de deux degrés. Appellons d un degré de latitude, l la latitude du point de la Terre situé au milieu de ce degré, D un autre degré de latitude, L la latitude de son point-milieu, b le demi-petit-axe terrestre, et faisons égal à l'unité le demi-grand-axe, c'est-à-dire le demi-diametre de l'équateur. Les Sections

coniques nous donneront cette analogie d'approximation, (*Astr.* la Lande, 2676),

$$d^{\frac{2}{3}} : D^{\frac{2}{3}} :: 1 - \sin.^2 L\,(1 - bb) : 1 - \sin.^2 l\,(1 - bb),$$

de laquelle on tire

$$1 - bb = \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sin.^2 L - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \sin.^2 l}.$$

Cette valeur est celle du quarré de l'excentricité ou de ee, (767, 6°).

Maintenant appellons c l'aplatissement de la Terre, ou la différence des deux demi-axes; on aura $b = 1 - c$, $bb = 1 - 2c + cc$, et $\frac{1}{2}(1 - bb) = c - \frac{1}{2}cc = c\,(1 - \frac{1}{2}c)$. Donc

$$(F)\ldots\ c\,(1 - \tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sin.^2 L - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \sin.^2 l}.$$

Le second membre de cette équation donne une valeur de e beaucoup plus approchée que celle qu'on peut obtenir en comparant entre elles des mesures de degrés; de sorte que dans cette recherche on peut négliger sans scrupule le facteur $(1 - \frac{1}{2}c)$.

794. Si d est un degré partagé en deux par l'équateur, de maniere qu'on ait $l = 0$, alors $\sin. l = 0$, et par conséquent

$$(H)\ldots\ c\,(1 - \tfrac{1}{2}c) = \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}}}{2 \sin.^2 L}.$$

Au lieu de cette équation, on a adopté la suivante qui est plus commode, mais un peu moins exacte, comme nous le verrons bientôt:

$$(K)\ldots\ c = \frac{D - d}{3d \sin.^2 L}.$$

D'où l'on a conclu que les accroissements des degrés, représentés par $D - d$, sont à très peu près proportionnels aux quarrés des sinus des latitudes.

795.

795. Lorsqu'après avoir comparé deux à deux plusieurs degrés mesurés, on a déterminé la valeur de c au moyen des formules (F) ou (H), il en coûte peu pour former avec exactitude une table des degrés de latitude exprimés par exemple en toises. En faisant $c(1-\frac{1}{2}c)=m$, l'équation (H) donne $D=d(1-2m\sin.^2L)^{-\frac{1}{2}}=d(1+3m\sin.^2L+\frac{15}{2}m^2\sin.^4L+$ &c.). Les termes ultérieurs de cette série peuvent se négliger sans qu'il en résulte une erreur d'un demi-pied; et l'on aura

$$(M)\ldots\quad D-d=3md\sin.^2L+\tfrac{15}{2}m^2d\sin.^4L.$$

Si dans le second membre on néglige le second terme, et qu'on écrive c au lieu de m, on retrouve l'équation (K).

La plus grande erreur de l'équation (K) est de $6\frac{1}{2}$ toises, et elle a lieu lorsque $L=90°$. En effet soit $d=56700$ toises, et soit $c=\frac{1}{230}$, selon la théorie de Newton. La formule (K) donne alors $D-d=3cd=739\frac{1}{2}$ toises. Mais par l'équation (M), on a 1°. $m=c(1-\frac{1}{2}c)=\frac{459}{105800}$; 2°. la quantité constante $3md=737,96$; 3°. l'autre quantité constante $\frac{15}{2}m^2d=8,00$: donc le degré de latitude sous le pôle est plus long de 746 toises que le degré sous l'équateur. Tel est aussi la différence entre ces degrés, que donne M. Schulze (*Tables astronomiques* de Berlin, Tom. III, pag. 164).

M. Schulze ne donnant point de valeur pour le degré de latitude dans le cas où $L=90°$, j'en infere qu'il a pris pour le degré de 56700 toises non celui que l'équateur divise également, mais celui qui s'étend de 0° de latitude à 1°; observation au moyen de laquelle j'ai trouvé ses résultats d'accord avec la formule (M), dans les épreuves que j'ai faites sur les latitudes où les variations des degrés sont les plus sensibles, par exemple à 45° de l'équateur. En effet soit $L=45°$; on a $\sin.^2 45°=\frac{1}{2}$, et par conséquent $737,96\sin.^2 45°=368,98$, et $8\sin.^4 45°=2$. Donc $D=d+371=57071$. Cette quantité correspond à $L=44°\,30'$ dans la table de Berlin : ce qui s'explique par la

remarque ci-dessus. Je n'entre dans cette explication de la table de M. Schulze, que parcequ'il me semble qu'elle a échappé à M. Trembley (*Essai de Trigonom. sphér.* pag. 226).

Fig. 76 796. Soit actuellement NS l'axe de la Terre, C le centre, AD le diametre de l'équateur, ANDS le méridien elliptique d'un lieu quelconque B, pour lequel la tangente BT est l'horizon sensible: VBR perpendiculaire à BT est la ligne verticale, BC la distance au centre, ou le rayon de la Terre, BW = CE le rayon du parallele, CBL l'angle de la ligne verticale avec le rayon de la Terre, BLA la latitude, BCA l'angle au centre.

Quand on connoît le rapport entre les deux axes, la premiere chose qu'il importe de déterminer est l'angle CBL qui se nomme *l'angle de la verticale*. Or CBL = BLE — BCE, et dans les triangles rectangles CEB, LEB, qui ont un côté commun BE, on a (450, 425), CE : LE :: tang.BLE : tang.BCE. De plus CE est l'abscisse, LE la sous-normale, et dans la théorie des sections coniques on démontre que CE : LE :: a^2 : b^2. Donc

(N)... tang.*ang. au centre* = $\frac{b^2}{a^2}$ × tang. *latit.*

Or la différence entre la latitude et l'angle au centre est l'angle cherché.

Pour l'avoir plus directement, soit L la latitude, v l'angle de la verticale, et $a = 1$; la formule (N) donne $1 : b^2 :: \text{tang.}L : \text{tang.}(L - v)$, et par conséquent $1 : 1 - b^2 :: \text{tang.}L : \text{tang.}L - \text{tang.}(L - v) :: \text{tang.}L : \frac{\text{sin.}v}{\cos.L \cos.(L - v)}$, (II. 24°). Mais $1 - b^2 = e^2$. Donc $\text{sin.}v = e^2 \text{ sin.}L \cos.(L - v)$, ou *angle de la verticale* = R″ × *excentr.*² sin. *lat.* cos.(*lat.* — *ang. de la verticale*). En calculant par cette formule les angles de la verticale de la table (807), je trouve que la formule dont on se sert communément, $v = cR'' \text{ sin.}2L$, produit des erreurs qui vont quelquefois jusqu'à 4″. Ma formule est donc préférable, quoique ces erreurs soient à-peu-près insensibles, et que l'incertitude où nous

sommes sur l'homogénéité du globe et sur la vraie quantité de son aplatissement, puisse en occasionner de plus grandes.

797. Soit décrit le démi-cercle AFD; soit FCE $= x$, comme dans la théorie des planetes (767) : celle des sections coniques donne, tang.$x = \frac{a}{b} \times$ tang. *ang. au centre*, ou (796), (N),

(O)... tang.$x = \frac{b}{a} \times$ tang. *lat.*

La connoissance de l'angle x aide à résoudre très promptement les équations suivantes, qui n'ont pas besoin de démonstration, et qui, avec les précédentes (M), (N), donnent toutes les quantités contenues dans la table de M. Schulze.

(P)... *rayon du parallele* $= a$ cos.$x =$ CE.

(Q)... *degré de longitude* $= \frac{a \text{ cos.} x}{R^\circ}$, (262).

(R)... *rayon de la Terre* $= \frac{a \text{ cos.} x}{\text{cos. } ang. \text{ au centre}} =$ BC.

(S)... BT $= \frac{a \text{ cos.} x}{\text{sin. } lat.}$.

(T)... BR $= \frac{a \text{ cos } x}{\text{cos. } lat.}$.

(U)... BQ $=$ BC $\times$ cos. *ang. de la verticale.*

(Y)... CQ $=$ BC $\times$ sin. *ang. de la verticale.*

798. Le rayon BC de la Terre peut s'obtenir facilement d'une autre maniere que par la seule formule (R), avec plus de décimales exactes qu'on n'en auroit en la calculant par les tables ordinaires des logarithmes. En effet, si l'on fait $a = 1$, cette formule donne BC $= \frac{\text{cos.} x}{\text{cos.}(L - v)} = \sqrt{\frac{1 + \text{tang.}^2(L - v)}{1 + \text{tang.}^2 x}}$, (I. 19°); ou, en substituant les valeurs de tang.$(L - v)$ et de tang.x, données par les formules (N), (O), BC $= \sqrt{\frac{1 + b^4 \text{ tang.}^2 L}{1 + b^2 \text{ tang.}^2 L}}$. Mais $b^2 = 1 - e^2$, et $b^4 = 1 - 2e^2 + e^4$. Substituons ces valeurs, multiplions la fraction par cos.$^2 L$, et nous trouverons BC $= \sqrt{\frac{1 - e^2 \text{ sin.}^2 L - e^2 \text{ sin.}^2 L (1 - e^2)}{1 - e^2 \text{ sin.}^2 L}} = \sqrt{\left(1 - \frac{e^2 b^2 \text{ sin.}^2 L}{1 - e^2 \text{ sin.}^2 L}\right)}$. En

réduisant ce binôme en série, négligeant les puissances de l'excentricité au-delà de la quatrieme, et faisant les divisions, nous aurons

(Z)... $BC = 1 - \frac{1}{2}e^2\, b^2 \sin.^2 L - \frac{5}{8}e^4 \sin.^4 L.$

Le calcul des deux derniers termes donnera les différences du rayon de l'équateur à celui d'une latitude quelconque ; si on veut cette différence en toises, il suffit de la multiplier par le rayon de l'équateur exprimé en toises. Pour avoir la différence des logarithmes, on multipliera les deux termes ci-dessus par $\frac{M}{BC + \frac{1}{3}BC}$, comme le prescrit le premier terme de la série (F), (175) : c'est cette marche que j'ai adoptée, comme la plus prompte et la plus sûre, pour calculer les logarithmes de la table (807).

En négligeant comme très petit le dernier terme du second membre de l'équation (Z), on voit que les diminutions des rayons de la Terre sont à-peu-près proportionnelles aux quarrés des sinus des latitudes, et par conséquent aux accroissements en longueur des degrés de latitude (794).

799. Pour donner quelques exemples de la briéveté et de l'exactitude des formules (N), (O), &c., soit *lat.* $= 46°$, $\frac{b}{a} = \frac{229}{230}$, et soit $a = 3277123$ toises, comme dans les tables de Berlin.

On aura par la formule (O), tang.$x = \frac{229}{230}$ tang.$46°$; ce qui donne $x = 45° 52' 30'', 85$.

Le calcul de la formule (N) se réduit à ce qui suit : tang. *angle au centre* $= \frac{229}{230}$ tang.x, ce qui donne *ang. au centre* $= 45° 45' 1'', 66$.

Donc l'*angle de la verticale* ou (*lat.* $+$ *angle au centre*) $= 14' 58'', 3$. Les tables de Berlin le font en effet de $14' 58''$; d'où il suit que M. Schulze n'a point employé la formule ordinaire (796), $v = cR'' \sin.2L$, ou $\sin.v = c \sin.2L$, laquelle donne dans ce cas $2''$ de moins. C'est par erreur que M. Trembley a cru cette formule exacte ; le logarithme qu'il trouve est celui de $\sin. 14' 56'', 3$, et non celui de $\sin. 14' 58''$, comme il l'avance. Mais

M. Schulze ne s'est pas servi non plus de la formule rigoureuse (N), puisque la différence entre les angles de sa table et les angles de la mienne (807) va jusqu'à $5''$ pour d'autres latitudes.

Si l'on calcule maintenant la formule (P), on a $a \cos.x = 3277123 \cos.45° 52' 30'', 85 = 2281609$: tel est en effet dans les tables de Berlin la valeur du rayon du parallele de 46°. M. Trembley trouve 32 toises de moins, parce que c'est du degré de longitude qu'il conclud ce rayon, c'est-à-dire qu'il déduit la grande quantité de la petite. D'où résulte ce dont nous avons prévenu (279) : l'erreur du degré de longitude employé par M. Trembley n'est, comme nous allons le voir, que de $\frac{3}{5}$ de toise, et cette erreur si légere en produit une de 32 toises sur le rayon du parallele.

En divisant par R°, (262), la quantité trouvée $a \cos.x$, nous aurons exactement par la formule (Q) *le degré de longitude* = 39821, 6. M. Trembley l'emploie de 39821 toises.

Il est inutile de nous étendre davantage pour faire voir combien la quantité constante $a \cos.x$ abrege le calcul des formules (797). Nous allons prouver qu'on peut se dispenser d'employer les valeurs des quantités BR, BQ, CQ, (données par les trois dernieres de ces formules et dont M. Schulze fait usage dans la correction à faire aux parallaxes à cause de l'aplatissement de la Terre), et que pour calculer le lieu apparent des astres dans la supposition du sphéroïde aplati, on peut suppléer par une correction très simple à toutes celles qui ont été employées dans ce cas.

800. Conservons toujours les explications de la fig. 76 ; de plus soit BM le prolongement du rayon CB de la Terre, ℂ un astre dont la position est donnée par les tables astronomiques comme s'il étoit vu du centre C de la Terre. Enfin qu'on imagine une ligne droite C ℂ ; cette ligne se dirigera vers le point du Ciel où se trouve l'astre selon le calcul fait d'après les tables. Fig. 76

L'angle B ℂ C que forme la ligne supposée C ℂ avec la ligne B ℂ sur la direction de laquelle l'observateur en B apperçoit l'astre, se nomme la *parallaxe;* c'est la différence de la position observée

à la position calculée. Pour comparer le calcul avec l'observation, il est nécessaire de corriger l'un ou l'autre, de la quantité de la parallaxe. Pour cet effet on réduit la distance vraie de l'astre au pôle, ou l'angle NC℄, à l'angle NR℄ que feroit avec l'axe NS de la Terre une ligne supposée R℄. Ayant ainsi la position de l'astre sur la ligne R℄, on a ensuite la position cherchée de cet astre sur la ligne B℄, en réduisant par le moyen de la parallaxe de hauteur (BR étant prise pour la parallaxe horizontale), l'angle VR℄ à l'angle VB℄, qui est la distance apparente de l'astre au zénith de l'observateur. C'est pour ces réductions et autres analogues que sont utiles les quantités données par les trois dernieres formules (797). Mais on peut s'épargner tous ces circuits, puisque pour trouver par le calcul la position de l'astre sur la ligne B℄, il est facile de rendre l'ellipticité de la Terre absolument indifférente.

801. En effet imaginons un cercle décrit du rayon BC et qui coupe l'axe NS prolongé. Supposer que ce soit un cercle de la surface du Globe considérée comme sphérique, ce n'est point altérer la distance vraie NC℄ de l'astre au pôle. Mais alors M devient le zénith, CBM la ligne verticale, et BCA la latitude du point B de la Terre. Si on emploie cette latitude dans les calculs, MC℄ sera la distance vraie au zénith supposé M, et on la trouvera en se servant des éléments donnés par les tables. Si donc, au moyen de la parallaxe de hauteur, comme à l'ordinaire, en prenant le rayon BC pour la parallaxe horizontale, on réduit l'angle MC℄ à l'angle MB℄, cet angle fera connoître le point du Ciel auquel correspond la position apparente de l'astre sur la ligne B℄, avec autant d'exactitude et plus de facilité que si on suivoit la méthode en usage.

802. Toutes les équations des parallaxes pour le sphéroïde aplati deviennent donc inutiles, pourvu qu'on emploie dans les calculs *la latitude diminuée de l'angle de la verticale;* c'est ainsi que l'a employée le célebre Géometre M. de la Grange, en composant ses formules pour trouver la distance apparente de deux astres sujets à la parallaxe, (*Éphém. de Berlin*, 1782). Peut-être a-t-on

pensé que c'étoit une propriété particulière de sa méthode aussi profonde que laborieuse ; de même que c'est une propriété particulière de la méthode de M. du Séjour, que d'employer la hauteur du pôle diminuée de la moitié seulement de l'angle de la verticale. En effet l'usage des équations des parallaxes dans le sphéroïde aplati paroît adopté communément en Astronomie, et je ne crois pas qu'aucun Astronome ait démontré qu'on peut se les épargner pour quelque parallaxe que ce soit, et dans toutes les méthodes. M. Trembley lui-même, qui a cherché (*Essai de Trigon. sphérique*, pag. 164 à 176) la démonstration des formules de M. de la Grange, et qui a appliqué la correction de la hauteur du pôle au calcul des parallaxes de longitude et de latitude, s'exprime de maniere que je n'ai pu parvenir à entendre la raison qu'il donne (pag. 150) de cette correction : il considere seulement l'astre au zénith, et confond l'angle de la verticale avec l'angle très différent que forment au centre de l'astre la ligne verticale et la ligne menée du centre de la Terre.

Pour calculer les parallaxes, il suffit donc de connoître le rayon de la Terre elliptique, lequel doit servir à la parallaxe horizontale, et l'angle de la verticale, lequel doit se soustraire de la latitude. J'ai calculé pour cet effet avec tout le soin possible la table (807). Il est à propos de voir combien actuellement les calculs des parallaxes et des éclipses deviendront expéditifs.

803. *Trouver les parallaxes de longitude, de latitude, d'ascension droite et de déclinaison.*

Toutes ces parallaxes dépendent de la parallaxe de hauteur, qui elle-même dépend de la parallaxe horizontale. Or (*Astronomie* de la Lande, 1624, 1628)

$$\sin.par.horiz. = \frac{\text{rayon de la Terre}}{\text{dist. de l'astre au centre de la Terre}}.$$

(A)... $\sin.par.hauteur = \sin.par.hor. \times \cos.hauteur\ appar.$

Et, avec une approximation suffisante dans tous les cas,

(B)... $par.\ hauteur = par.horiz. \times \cos.hauteur\ appar.$

Fig.69 Cela posé, soit Z le zénith de la Terre sphérique (801), P le pôle de l'écliptique, T une planete vue du centre de la Terre, et qui, vue de la surface du globe, paroît plus bas, en S : TS est la *parallaxe de hauteur;* PZ est la distance du zénith au pôle de l'écliptique ; c'est ce qu'on appelle la *hauteur du nonagésime*, c'est-à-dire du point de l'écliptique qui marque la longitude du zénith de l'observateur : ZPT est la *distance vraie de l'astre au nonagésime,* ou la différence de longitude entre l'astre et le nonagésime; ZPS est la *distance apparente de l'astre au nonagésime*, et TPS la *parallaxe de longitude*, de laquelle nous chercherons d'abord la valeur.

Le côté PZ et l'angle adjacent Z sont communs aux triangles ZPT, ZPS, et par conséquent, en faisant (542), A = Z, B = P, C = T, on a sin.∂ZT : sin.∂ZPT :: sin.PT sin.(PT + ∂PT) : sin.PZ sin.Z. Or PT + ∂PT = PS, et sin.PS : sin.Z :: sin.ZS : sin.ZPS. Donc (723), ∂ZT : ∂ZPT, ou TS : TPS :: sin.PT sin.ZS : sin.PZ sin.ZPS. Mais sin.ZS = cos.*haut.appar.* = $\frac{\text{paral. hauteur}}{\text{paral. horiz.}}$, suivant la formule (B); donc

(C)... *par.long.* = *par.horiz.* × $\frac{\sin \textit{haut.nonag.} \times \sin \textit{dist.appar.nonag.}}{\cos \textit{lat.vraie}}$.

Pour avoir la longitude apparente de l'astre, on ajoute la parallaxe à la longitude vraie, si l'astre est à l'orient du nonagésime ; on la soustrait, s'il est à l'occident.

Comme le second membre de la formule (C) renferme la parallaxe cherchée, puisque *dist.appar.nonag.* = *dist.vr.nonag.* + *par.long.,* il faudra faire le calcul par la méthode (281); nous en donnerons un exemple (809).

Si, au lieu des parallaxes, on emploie leurs sinus, la formule (C) sera rigoureuse.

On chassera, si l'on veut, du second membre la parallaxe de longitude, en suivant la méthode (282). Car puisque $\frac{\text{sin.TPS sin.PT}}{\text{sin.}\textit{par.hor.}\text{ sin.PZ}}$ = sin.(TPZ + TPS) = sin.TPZ cos.TPS + cos.TPZ sin.TPS;

on

on aura, en divisant par cos.TPS la premiere et la derniere de ces trois valeurs égales,

$$\text{tang.TPS} = \frac{\text{sin.}\textit{par.hor.}\ \text{sin.PZ}\ \text{sin.TPZ}}{\text{sin.PT} - \text{sin.}\textit{par.hor.}\ \text{sin.PZ}\ \text{cos.TPZ}}.$$

Telle est la formule de M. Lexell, démontrée par M. Trembley, pag. 141 à 144 de son *Essai de Trigonométrie.*

804. La *parallaxe de latitude* est δPT, ou PT — PS. Pour la déduire de la parallaxe horizontale en n'employant, des parties du triangle PTZ, que PZ, PT et TPZ, on ne peut se servir avec succès d'aucune des analogies (550, 551, 552), qui sont celles qui correspondent au cas dont il s'agit. On a fait usage, pour le résoudre, de l'analogie infinitésimale (551), en substituant à cos.AC sa valeur (VII. 28e), et sin.(AC + δAC) au lieu de sin.AC : mais cette analogie peut produire des erreurs de quelques secondes. Aussi M. Lexell a-t-il donné une formule plus exacte, mais composée de trois termes dans le second membre; on en peut voir la démonstration pag. 144 à 148 de l'Ouvrage de M. Trembley, cité ci-dessus. Pour moi, comme on ne cherche pas ordinairement la parallaxe de latitude que l'on ne cherche aussi celle de longitude, je me contenterai de déduire la premiere de la seconde, d'autant plus que j'y parviens par une formule rigoureuse et commode.

Je substitue $\frac{\text{sin.}\delta\text{B}}{2\,\text{cos.}\frac{1}{2}\delta\text{B}}$ à sin.$\frac{1}{2}\delta$B dans la 1e analogie (556), et appliquant cette analogie au triangle PTZ, j'ai sin.δPT : sin.δP :: $\left(\text{sin.PT cot.PZ} - \frac{\text{cos.}(\text{P} + \frac{1}{2}\delta\text{P})\ \text{cos.PT}}{\text{cos.}\frac{1}{2}\delta\text{P}}\right)$ sin.(PT + δPT) : sin.P, formule rigoureuse, et dont on pourroit se servir. Mais on peut employer à l'ordinaire, et sans qu'il en résulte jamais une erreur sensible, les arcs au lieu des sinus dans le premier rapport, et supposer cos.$\frac{1}{2}\delta$P = 1 : on a alors

(D)... *par.lat.* = *par.longitude* cos. *lat.vraie* cos. *lat.appar.* $\times$

$$\frac{\text{cot.}\textit{haut.nonag.} - \text{cos.}(\textit{dist.vr.nonag.} + \frac{1}{2}\textit{par.long.})\ \text{tang.}\textit{lat.vraie}}{\text{sin.}\textit{distance vraie au nonagésime}}.$$

La parallaxe de latitude s'ajoute toujours à la distance vraie de l'astre au pôle visible de l'écliptique, à moins que par le résultat de la formule cette parallaxe ne soit négative.

805. Si P est le pôle de l'équateur, on écrira dans les formules (C), (D), *par. asc. droite* au lieu de *par. long.*, *compl. hauteur du pôle* au lieu de *haut. nonag.*, *angle horaire* au lieu de *distance au nonag.*, *déclin.* au lieu de *lat.*; et on aura

$$(E)\ldots\ par.asc.dr. = par.horiz. \times \frac{\cos.haut.du\ pôle \sin.ang.horaire\ appar.}{\cos.décl.vraie},$$

$$(F)\ldots\ par.décl. = par.asc.droite \cos.décl.vr. \cos.décl.appar. \times \frac{\tang.haut.du\ pôle - \cos.(ang.hor.vr. + \frac{1}{2}\ par.asc.dr.) \tang.décl.vr.}{\sin.angle\ horaire\ vrai},$$

806. *Trouver la distance apparente des centres de deux astres.*

Il y a trois cas principaux et très importants dans lesquels on cherche la distance apparente des centres de deux astres; ou, ce qui revient au même, dans lesquels on conclud de la distance apparente la distance vraie, c'est-à-dire celle qui seroit observée du centre de la Terre: 1°. dans les éclipses et dans les occultations; 2°. dans les passages sur le disque du soleil; 3°. sur mer, pour en déduire la longitude du vaisseau.

Je ne connois rien de mieux que la méthode de M. de la Lande pour le second cas; et celle de M. le Chevalier de Borda pour le troisieme, quand on n'a point les grandes tables angloises, ou celles qui servent à la méthode de M. Dunthorn. Pour le premier cas, la méthode la plus expéditive est certainement celle du nonagésime (si on veut l'appeller ainsi), mais en s'y prenant comme il suit.

Fig. 77 Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, Z le zénith de la Terre supposée sphérique (801), L le lieu vrai de celui des deux astres qui souffre la plus grande parallaxe. Dans le triangle PEZ (je dois à M. Trembley, *Essai de Trig. sphér.* pag. 151, l'idée de me servir de ce triangle) on connoît toujours trois parties;

savoir PE ou l'obliquité apparente de l'écliptique, PZ ou le complément de la hauteur du pôle diminuée de l'angle de la verticale (802), et ZPE qui est l'angle horaire du pôle de l'écliptique, ou la différence entre l'ascension droite du zénith et celle du pôle de l'écliptique. L'ascension droite de ce pôle est toujours de 270°; celle du zénith, qu'on nomme *l'ascension droite du milieu du Ciel,* est égale à la somme de l'ascension droite du soleil et du temps vrai (au moment pour lequel on fait le calcul) réduit en degrés ou en parties de l'équateur, soustraction faite de 360°, lorsque cette somme est $> 360°$. On cherchera EZ, ou la *hauteur du nonagésime;* et PEZ, ou la différence entre la longitude du pôle de l'équateur et celle du zénith : et comme la longitude de ce pôle est toujours de 90°, on aura ensuite la longitude du zénith ou *la longitude du nonagésime,* par l'équation *long.nonag.* $= 90° \pm$ PEZ. Dans l'hémisphere septentrional, toutes les fois que le complément de la hauteur du pôle est plus grand que l'obliquité de l'écliptique (ce qui embrasse presque tous les cas, les observations astronomiques en dedans des cercles polaires étant très rares), le signe $+$ a lieu quand l'ascension droite du milieu du Ciel est $>$ 90° et $<$ 270° : pour toute autre valeur de cette ascension droite, le signe $-$ aura lieu, et on observera que si PEZ est $> 90°$, il faut prendre le supplément à 360° de l'arc négatif (90° — PEZ). Connoissant ainsi la longitude du nonagésime, on prendra la différence entre cette longitude et celle de l'astre L du côté où cette différence est moindre que de 180°, et on aura l'angle ZEL, ou (803) *la distance vraie au nonagésime.*

Dans le triangle PEZ, connoissant deux côtés PE, PZ et l'angle intercepté ZPE, on peut trouver le côté EZ et l'angle PEZ par le moyen des formules (VIII. 7°, 8°) : mais on a un logarithme de moins à chercher en se servant de celles de Neper (IX. 2°, 5°), auxquelles je donne la préférence. De l'angle PEZ on déduit, comme nous l'avons dit, l'angle ZEL; et quand on a trouvé la valeur de cet angle et celle du côté EZ, on a tout ce qu'il faut pour

calculer les parallaxes de longitude et de latitude de l'astre L au moyen des formules (C), (D), dans lesquelles on emploiera pour parallaxe horizontale la différence des parallaxes horizontales des deux astres; ce qui est, non pas rigoureux, mais d'une exactitude plus que suffisante dans tous les cas.

Ayant ainsi appliqué l'effet des deux parallaxes au seul astre L, et connoissant, dans cette hypothese, la longitude et la latitude apparentes de cet astre; si l'on suppose à présent que l'autre astre
Fig.78 soit S, et que le triangle zEV soit le même que le triangle ZEL de la fig.77, on connoîtra, dans le triangle ELS, le côté LE distance apparente de l'astre L au pôle de l'écliptique, le côté ES distance vraie de l'astre S à ce pôle, et l'angle LES qui est la différence entre la longitude vraie de l'astre S et la longitude apparente de l'astre L. Avec ces données il reste à chercher le côté LS qui est la distance apparente des centres des deux astres, et dont la détermination est le but du problême. La derniere équation (VIII. 8°) ne peut donner ce côté avec précision à cause de sa petitesse, et il faut avoir recours à la solution (478).

807. Pour faciliter les opérations précédentes, je les réduirai (808) en une espece de tableau. Je donne d'abord la table qui suit, que j'ai annoncée (796, 798), et de laquelle on a besoin pour ces mêmes opérations.

Voici quel est l'usage de cette table. Pour avoir la parallaxe horizontale d'un astre pour un lieu de la Terre, on prendra dans la table le logarithme du rayon terrestre de ce lieu, et on l'ajoutera au logarithme de la parallaxe horizontale de l'astre sous l'équateur. Si au lieu de cette parallaxe on avoit la parallaxe pour un lieu hors de l'équateur, comme il arrive lorsqu'on fait usage des *Tables de la Lune* de M. de la Lande, qui donnent la parallaxe pour Paris; alors on auroit la parallaxe horizontale pour l'équateur, en retranchant de la parallaxe donnée le logarithme du rayon terrestre du lieu pour lequel elle est donnée.

TABLE des angles de la verticale, et des logarithmes des rayons de la Terre.

Hauteur du pôle.	Angle de la vertic.	Logarithme du rayon de la Terre.	Différ. des logarit.	Hauteur du pôle.	Angle de la vertic.	Logarithme du rayon de la Terre.	Différ. des logar.
0°	0′ 0″	0, 0000000		39°	14′ 38″	9, 9992564	
1	0 31	9, 9999994	6	40	14 44	9, 9992241	323
2	1 2	9, 9999977	17	41	14 49	9, 9991915	326
3	1 34	9, 9999949	28	42	14 53	9, 9991588	327
4	2 5	9, 9999909	40	43	14 56	9, 9991260	328
5	2 35	9, 9999858	51	44	14 58	9, 9990930	330
6	3 6	9, 9999796	62	45	14 59	9, 9990600	330
7	3 37	9, 9999723	73	46	14 58	9, 9990270	330
8	4 7	9, 9999638	85	47	14 57	9, 9989939	331
9	4 37	9, 9999543	95	48	14 54	9, 9989610	329
10	5 6	9, 9999437	106	49	14 51	9, 9989282	328
11	5 35	9, 9999320	117	50	14 46	9, 9988955	327
12	6 4	9, 9999192	128	51	14 40	9, 9988630	325
13	6 32	9, 9999054	138	52	14 33	9, 9988307	323
14	7 0	9, 9998906	148	53	14 25	9, 9987987	320
15	7 28	9, 9998748	158	54	14 16	9, 9987670	317
16	7 55	9, 9998580	168	55	14 6	9, 9987357	313
17	8 21	9, 9998402	178	56	13 55	9, 9987047	310
18	8 46	9, 9998214	188	57	13 43	9, 9986741	306
19	9 11	9, 9998017	197	58	13 29	9, 9986440	301
20	9 35	9, 9997812	205	59	13 15	9, 9986144	296
21	9 59	9, 9997597	215	60	13 0	9, 9985854	290
22	10 22	9, 9997374	223	61	12 44	9, 9985569	285
23	10 44	9, 9997143	231	62	12 27	9, 9985290	279
24	11 6	9, 9996903	240	63	12 9	9, 9985017	273
25	11 27	9, 9996656	247	64	11 50	9, 9984751	266
26	11 46	9, 9996402	254	65	11 30	9, 9984493	258
27	12 5	9, 9996140	262	66	11 10	9, 9984241	252
28	12 23	9, 9995871	269	67	10 48	9, 9983998	243
29	12 40	9, 9995596	275	68	10 26	9, 9983762	236
30	12 57	9, 9995315	281	69	10 3	9, 9983534	228
31	13 12	9, 9995028	287	70	9 39	9, 9983316	218
32	13 26	9, 9994736	292	71	9 15	9, 9983106	210
33	13 39	9, 9994438	298	72	8 50	9, 9982905	201
34	13 52	9, 9994136	302	73	8 24	9, 9982713	192
35	14 3	9, 9993829	307	74	7 58	9, 9982532	181
36	14 14	9, 9993518	311	75	7 31	9, 9982360	172
37	14 23	9, 9993203	315	80	5 9	9, 9981654	
38	14 31	9, 9992885	318	85	2 37	9, 9981222	
39	14 38	9, 9992564	321	90	0 0	9, 9981076	

808. *TABLEAU DU CALCUL pour trouver la distance apparente des centres de deux astres*, S, L, en supposant connues les parallaxes horizontales équatoriales, et les longitudes et latitudes *vraies*, c'est-à-dire telles qu'on les auroit si on voyoit les deux astres du centre de la Terre, et en tenant compte de l'aberration et de la nutation. Je suppose de plus que la parallaxe horizontale de l'astre L soit plus grande que celle de l'astre S. On comprendra facilement qu'il est inutile d'indiquer ce que sont les arcs A, B, &c., qui ne sont ici que des arcs subsidiaires.

$A =$ ascens. dr. $\odot +$ temps vrai en parties de l'équateur.

Si A est $> 360°$, on prendra $A - 360°$ au lieu de A.

$B = A \backsim 270°$; *et si la hauteur du pôle est australe*, $B = A \backsim 90°$.

Si B est $> 180°$, on prendra $360° - B$ au lieu de B.

$C =$ hauteur du pôle $-$ angle de la verticale.

$D = 90° - C -$ obliquité apparente de l'écliptique.

$E = 90° - C +$ obliquité apparente de l'écliptique.

$$\text{tang. } F = \text{cot.} \tfrac{1}{2} B \times \frac{\text{sin.} \tfrac{1}{2} D}{\text{sin.} \tfrac{1}{2} E}.$$

$$\text{tang. } G = \text{cot.} \tfrac{1}{2} B \times \frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2} D}{\text{cos.} \tfrac{1}{2} E}.$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} H = \text{tang.} \tfrac{1}{2} D \times \frac{\text{sin. } G}{\text{sin. } F}.$$

$M = 90° \pm (F + G) =$ longitude du nonagésime.

Le signe $+$ a lieu quand A est $> 90°$ et $< 270°$: le signe $-$ a lieu dans les autres cas; mais alors si $(F + G)$ est $> 90°$, on ajoute $360°$ au second membre.

Si la hauteur du pôle est australe, $M = 270° \mp (F + G)$.

Le signe $-$ a lieu quand A *est* $> 90°$ *et* $< 270°$: *le signe* $+$ *a lieu dans les autres cas; mais alors si* M *est* $> 360°$, *on prend* M $- 360°$ *au lieu de* M.

$N =$ M $\backsim$ longitude vraie de l'astre L.

Si N est $> 180°$, on prendra $360° -$ N au lieu de N.

$O =$ rayon de la Terre $\times$ (par. hor. équat. L $-$ par. hor. équat. S).

$$P = O \times \frac{\sin.H \sin.(N + P)}{\cos.\textit{lat. vraie}\,L}.$$

Longitude apparente de l'astre L = longitude vraie $\pm$ P.

Le signe + a lieu si le point de l'écliptique qui marque la longitude vraie de l'astre est à l'orient du nonagésime ; le signe — s'il est à l'occident.

$$Q = \frac{P \times \cos.\textit{lat.vr.}L}{\sin.N}(\cot.H - \cos.\overline{N + \tfrac{1}{2}P}\ \text{tang.}\ \textit{lat.vr.}L)\cos.\textit{lat.ap.}L.$$

Latitude apparente de l'astre L = latitude vraie $\pm$ Q.

Le signe + a lieu si la latitude vraie est australe ; le signe — si elle est boréale : c'est le contraire lorsque Q est négatif.

Si la hauteur du pôle est australe, on changera dans cette regle + en — et — en +.

T = long.app. de l'astre L $\backsim$ long. vraie de l'astre S.

U = lat.app. de l'astre L $\backsim$ lat. vraie de l'astre S.

$$\text{tang.}Z = \frac{\sin.\frac{1}{2}T}{\sin.\frac{1}{2}U}\sqrt{\cos.\textit{lat.appar.}L\ \cos.\textit{lat.vr.}S}.$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}\textit{dist. appar. des centres} = \frac{\sin.\frac{1}{2}U}{\cos.Z}.$$

Si les valeurs de T et de U sont moindres l'une et l'autre que de $45'$, comme il arrive dans les éclipses et les occultations ; au lieu des deux dernieres équations, on peut sans scrupule faire usage des suivantes :

Y = lat.appar. de l'astre L + lat. vraie de l'astre S.

$$\text{tang.}Z = \frac{T \times \cos.\frac{1}{2}Y}{U}.$$

$$\textit{Distance apparente des centres} = \frac{U}{\cos.Z}.$$

809. La promptitude de la méthode précédente a pour causes principales le petit nombre et la simplicité des regles, l'avantage de ne point avoir besoin de construire une figure, et sur-tout celui de pouvoir faire les calculs des dix premieres équations en négligeant les secondes, ou au plus en tenant compte seulement des dixaines de secondes, sans que l'exactitude du dernier résultat en soit nullement altérée : d'où il suit encore qu'on peut de même négliger les secondes, en prenant les lignes trigonométriques contenues dans les équations qui donnent la valeur de P et celle de Q.

Appliquons cette méthode à la recherche de la distance appa-

rente d'Antarès au centre de la lune, au moment de l'immersion observée à Paris par M. de la Lande le 6 Avril 1749 : je prendrai les éléments dans le calcul de cette observation, fait avec le plus grand soin par M. Carouge, et rapporté dans l'*Astronomie* de M. de la Lande, Tom. IV, pag. 644.

$$A = 15^\circ\ 58' + 195^\circ\ 20' = 211^\circ\ 18'$$
$$B = 211^\circ\ 18' \backsim 270^\circ = 58^\circ\ 42'.$$

L'angle de la verticale donné par la table (807) pour la latitude $48^\circ\ 50'$ est $14'\ 51''\frac{1}{2}$, et par conséquent

$$C = 48^\circ\ 50'\ 10'' - 14'\ 50'' = 48^\circ\ 35'\ 20''.$$

L'obliquité apparente de l'écliptique pour le commencement d'Avril 1749, selon la Table de M. de la Lande (Tom. IV, p. 763), est $23^\circ\ 28'\ 22''$. Donc

$$D = 90^\circ - 48^\circ\ 35'\ 20'' - 23^\circ\ 28'\ 20'' = 17^\circ\ 56'\ 20''$$
$$E = 90^\circ - 48^\circ\ 35'\ 20'' + 23^\circ\ 28'\ 20'' = 64^\circ\ 53'.$$

$$\begin{array}{rlrl}
\text{log.cot.}\ 29^\circ\ 21' = & 0{,}250015 & \ldots\ldots\ldots & 0{,}250015 \\
\text{log.sin.}\ 8^\circ\ 58'\ 10'' = & 9{,}192868 & \ldots\ \text{log.cos.} & 9{,}994656 \\
\text{comp.log.sin.}\ 32^\circ 26' 30'' = & 0{,}270478 & \ldots\ \text{comp.log.cos.} & 0{,}073689 \\
\hline
\text{log.tang.}\ F = & 9{,}713361 & \text{log.tang.}\ G = & 0{,}318360
\end{array}$$

$$\text{Donc } F = 27^\circ 19' 55'', \quad G = 64^\circ 20' 20''.$$

$$\text{log.tang.}\tfrac{1}{2}D = \left\{\begin{array}{rl} \text{log.sin.}\ 8^\circ\ 58'\ 10'' = & 9{,}192868 \\ \text{complém.log.cos.} = & 0{,}005344 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rl}
\text{log.sin.}\ 64^\circ\ 20'\ 20'' = & 9{,}954904 \\
\text{compl.log.sin.}\ 27^\circ\ 19'\ 55'' = & 0{,}338050 \\
\hline
\text{log.tang.}\tfrac{1}{2}H = & 9{,}491166
\end{array}$$

Donc $H = 34^\circ\ 26'$.

$$M = 90^\circ + 27^\circ\ 19'\ 55'' + 64^\circ\ 20'\ 20'' = 181^\circ\ 40'\ 15''.$$

$$N = M \backsim \text{long.vr.}\ ☾ = M \backsim 245^\circ\ 31'\ 42'' = 63^\circ\ 51'\ 30''.$$

Dans

Dans ce cas-ci, *parall.horiz.* S = o, puisqu'Antarès n'a point de parallaxe.

M. Carouge donne la parallaxe horizontale pôlaire de la lune; en la réduisant à la parallaxe pour Paris, nous aurons (807)

log.O = { log.(parall.horiz. au pôle = 57′ 9″, 8) = 3,535269
compl.log. du rayon au pôle. . . . = 0,001892
log. du rayon pour Paris . . . . . = 9,998934

log.sin.34° 26′ = 9,752392
compl.log.cos.(*lat.vr.* ☾ = 3° 48′) = 0,000956
Somme ou log. constant 3,289443
log.sin.(N = 63° 51′ 30″) = 9,953135
log.(29′ 8″ = P à-peu-près) = 3,242578

et, pour avoir la valeur exacte de P,

log.sin.(N + P = 64° 20′ 40″) = 9,954924
log. constant ci-dessus = 3,289443
log.P = 3,244367

Je prends ci-dessus { log.cos. 3° 48′ = 9,999044
compl.log.sin.N = 0,046865

Second log. constant = 3,290276
log.cot.(H = 34° 26′) = 0,163949
log.(47′ 26″ = 1ᵉ partie de la valeur de Q à-peu-près) = 3,454225

et, pour avoir exactement la 1ᵉ partie de la valeur de Q,

log.cos.(*lat.appar.* ☾ = 3° 48′ + 47′ ½) = 9,998604
log. 1ᵉ partie de la valeur de Q = 3,452829
Second log. constant ci-dessus = 3,29028
log.cos.(N + ½P = 64° 6′) = 9,64028
log.tang.(*lat.vr.* ☾ = 3° 48′) = 8,82230
log.cos. *lat.appar.* pris ci-dessus = 9,99860
log. 2ᵉ partie de la valeur de Q = 1,75146

Cette seconde partie devient positive, parceque la latitude de la lune étant australe, tang. *lat.* est négative (744).

Les calculs précédents donnent pour valeurs exactes,

$P = 29' 15'',4$, et $Q = 47' 16'',8 + 56'',4 = 48' 13'',2$.

On a donc 1°., parce que la lune étoit à l'orient du nonagésime,

long.appar. $\mathbb{C} = 245° 31' 42'' + 29' 15'',4 = 246° 0' 57'',4$.

2°.lat.appar. $\mathbb{C} = 3° 47' 58'',1 + 48' 13'',2 = 4° 36' 11'',3$.

En prenant le milieu entre les positions d'Antarès déterminées par Bradley, Mayer et La Caille, et réduites au 6 Avril 1749, et en tenant compte de l'aberration et de la nutation, je trouve *long.vr.* Antarès $= 246° 16' 19'',2$, et *lat.vr.* Antarès $= 4° 32' 16'',5$ *austr.* Donc

$T = 246° 0' 57'',4 \backsim 246° 16' 19'',2 = 15' 21'',8$

$U = 4° 36' 11'',3 \backsim 4° 32' 16'',5 = 3' 54'',8$

$Y = 4° 36' 11'',3 + 4° 32' 16'',5 = 9° 8' 28''$.

log.T =	2,964637
log.cos.($\frac{1}{2}$Y = 4° 34') =	9,998619
compl.log.U =	7,629302
log.tang.Z =	0,592558
compl.log.cos.Z =	0,606293
J'ajoute log.U =	2,370698
Somme	2,976991

Ce logarithme donne, pour la *distance apparente des centres*, $15' 48'',4$.

810. Le calcul que nous venons de faire exige la recherche de trente logarithmes. Je ne connois point de méthode où il ne soit nécessaire d'en chercher un plus grand nombre, et avec une perte de temps bien plus considérable, attendu qu'il faut tenir compte des dixiemes de seconde dans tout le calcul, si on veut obtenir dans le dernier résultat la précision que j'obtiens par la méthode que je viens d'exposer. On observera de plus, si on compare cette

méthode à d'autres, qu'elle ne demande pas que l'on connoisse l'ascension droite et la déclinaison des deux astres, ou de l'un des deux, ni leur hauteur, ni l'angle parallactique, ni celui de position, et qu'elle permet de prendre l'ascension droite du soleil dans des Éphémérides, au lieu de la calculer rigoureusement.

Pour ne laisser aucun doute sur l'exactitude de mon calcul, je dois prévenir que M. Carouge trouve, pour la valeur de P ou de la parallaxe de longitude, 1″, 7 de plus que moi; mais j'ai vérifié que cette différence provient de ce que M. Carouge, pour calculer cette valeur, a employé, au lieu du cosinus de la latitude vraie, le cosinus de la latitude apparente, selon la formule de La Caille (*Éléments d'Astr.* 658). Mes analogies différentielles finies garantissent de toute erreur sur ce point, qui en général a été traité jusqu'ici pour ainsi dire arbitrairement, dans l'usage qu'on a fait des analogies infinitésimales. De même si la valeur de Q ou de la parallaxe de latitude, telle que je l'ai donnée, excede de 0″, 6 celle qu'a trouvée M. Carouge, c'est qu'il a employé de la maniere que j'ai indiquée (804) l'analogie infinitésimale (551). Ce Géometre a depuis examiné attentivement la question des parallaxes, et a composé des formules dont il a bien voulu me communiquer la démonstration synthétique : celle de la parallaxe de longitude est absolument conforme à la mienne (C) : celle de la parallaxe de latitude est composée de trois termes dans le second membre ; j'ai éprouvé dans plus d'une occasion qu'elle est très exacte.

811. Pour comparer avec l'observation la distance apparente des centres, donnée par le calcul (808), il faut augmenter le diamètre de la lune en raison de la hauteur, et de plus, s'il s'agit d'une éclipse de soleil, tenir compte de l'accourcissement produit par la réfraction sur les phases mesurées avec le micrometre. Pour la premiere de ces corrections, il suffiroit de prendre la hauteur de la lune au moyen d'un globe : pour la seconde, il est nécessaire de connoître l'angle formé par le cercle vertical avec la ligne des centres. Voyons comment, au moyen des éléments du calcul (808),

nous pourrons trouver une valeur suffisamment approchée soit pour cet angle, soit pour la hauteur de la lune.

Fig. 78 Soit E le pôle de l'écliptique, z le zénith, V le lieu vrai de la lune, L son lieu apparent, S le lieu vrai de l'autre astre; SL est la distance apparente des centres, donnée par le calcul (808). Qu'on prolonge EL de maniere qu'on ait $Em = ES$; que l'on mene mS, et qu'on prolonge zL jusqu'en n : on aura $Lm = U$, (808), et (498, 1°.), $mS = mES \times \text{sin.ES} = T \times \text{cos.}\frac{1}{2}Y$, à-peu-près. D'où l'on aura $mLS = Z$, (808), en considérant, ainsi qu'on le peut sans scrupule, le petit triangle LmS comme rectiligne et rectangle en m.

Cela posé, on observera que le triangle zVE, en se changeant en zLE, conserve comme constants le côté zE et l'angle z. Donc, en faisant (555, 541), A $= z$, B $=$ E, C $=$ V, on a 1°. δEV : δE :: sin.EV : tang.zLE, en supposant, par approximation, que l'on ait, sin.(EV $+ \frac{1}{2}\delta$V) : tang.(V $- \frac{1}{2}\delta$V) :: sin.EV : tang.(V $- \delta$V); 2°. δzV : δE :: sin.EV : sin.zLE. Mais δzV $=$ *parall.hauteur* $=$ *parall.horiz.* cos.*haut.appar.*, (803), (B). En mettant cette valeur dans la derniere analogie, et δEV $\times$ tang.zLE au lieu de δE $\times$ sin.EV, d'après la premiere, ces deux analogies donneront

$$\text{tang.}\textit{ang.parallact. appar.} = \frac{\textit{par.long.}\ \text{cos.}\textit{lat.vr.}}{\textit{par.lat.}} = \frac{\text{P}}{\text{Q}} \times \text{cos.}\textit{lat.vr.}$$

$$\text{cos.}\textit{hauteur appar.} = \frac{\textit{par.lat.}}{\textit{par.horiz.}\ \text{cos.}\textit{ang.parallac.appar.}} = \frac{\text{Q}}{\text{O} \times \text{cos.}\textit{ang.par.app.}}.$$

Dans les éclipses de soleil on peut toujours mettre 1 au lieu de cos.lat. ☾. L'angle parallactique apparent (zLE $= m$Ln) soustrait de l'angle (Z $= m$LS), ou ajouté à cet angle, selon les cas, donne l'angle cherché SLn, que fait la ligne des centres avec le cercle vertical.

812. Comme l'infatigable Calculateur M. Levêque a donné des *Tables générales* de la longitude et de la hauteur du nonagésime pour tous les pays de la Terre (à Paris, *chez Laporte*), je crois

qu'il n'est pas inutile de faire voir combien il est facile d'introduire dans ces tables la correction relative à l'aplatissement de la Terre.

Soit P le pôle du Monde, E celui de l'écliptique, Z le zénith pour la Terre aplatie, M le zénith de la Terre sphérique. Les tables de M. Levêque sont construites sur le triangle PZE ; elles ont pour arguments la hauteur du pôle ou le complément de PZ, et l'ascension droite du milieu du Ciel ou du zénith Z. J'ai démontré dans les articles précédents combien il est plus avantageux de se servir du triangle PME. Or on peut observer que l'augmentation ZM égale à l'angle de la verticale ne change point l'ascension droite du zénith ou du milieu du Ciel ; ainsi cet argument reste constant. Le second argument, c'est-à-dire PZ, varie seul ; et par conséquent si l'on fait usage de ces tables en diminuant de l'angle de la verticale l'argument de la hauteur du pôle, elles donneront pour la hauteur ME du nonagésime, et pour la longitude du nonagésime ou du zénith M, des valeurs telles qu'on obtiendra par mes formules (C), (D) les parallaxes de longitude et de latitude pour le sphéroïde aplati, avec toute l'exactitude qu'on peut desirer. Fig. 79

813. *Trouver la longitude d'un lieu de la Terre.*

Les éclipses de soleil et les occultations d'étoiles par la lune sont les phénomenes les plus sûrs pour déterminer avec précision les longitudes terrestres. On calculera la distance apparente des centres (808) pour le moment de l'observation, en supposant la longitude telle qu'on l'estime à-peu-près, et prenant dans les tables, d'après cette supposition, les lieux du soleil et de la lune. Et si la distance calculée ne se trouve pas égale à la distance observée, je vais démontrer que de cette erreur du calcul on peut déduire, avec autant d'exactitude que de facilité, la longitude cherchée.

Soit E le pôle de l'écliptique, L la lune, S le soleil ou l'étoile, LS la distance apparente des centres donnée par le calcul (808). Je n'attribue l'erreur sur la distance des centres qu'au lieu de la lune employé dans ce calcul ; car l'étoile est immobile, et le soleil Fig. 78

Fig. 78 peut se regarder comme tel si on emploie, lorsque je le prescrirai, le *mouvement relatif*, c'est-à-dire la différence des mouvements du soleil et de la lune. Considérant donc ES comme constant, il s'agit de déterminer dans le triangle LES les erreurs de l'angle E et du côté EL correspondantes à l'erreur du côté LS. Je procéde comme il a été dit (284); je suppose d'abord que j'ai de plus comme constant le côté EL, et faisant (631), A = E, B = S, C = L, j'ai ∂SL : ∂E :: sin.EL sin.L : 1. Faisant ensuite l'angle E constant avec le côté ES, j'ai (550), ∂SL : ∂EL :: cos.L : 1. En prenant la somme des deux valeurs partielles que donnent pour ∂SL ces deux analogies, je trouve ∂SL = ∂E sin.L sin.EL + ∂EL cos.L.

Je nomme D la distance LS des centres donnée par le calcul (808), L la longitude apparente de la lune, l sa latitude apparente, de sorte que dans la derniere formule ci-dessus je substituerai ∂L à ∂E, et ∂l à ∂EL; l'angle L ou ELS est le supplément de l'angle Z, que l'avant-derniere formule (808) donne toujours aigu, et dont on doit employer le supplément dans l'équation (G) ci-après, toutes les fois que la distance de la lune au pôle de l'écliptique sera moindre que la distance de l'étoile ou du soleil au même pôle. On aura donc

(G)... $\partial D = \partial L$ sin.Z cos.l + ∂l cos.Z.

Si au lieu de ∂D, on met dans cette équation l'erreur donnée par le calcul sur la distance des centres, ∂L et ∂l seront les erreurs sur la longitude et la latitude apparentes de la lune employées dans le calcul, erreurs qui ont donné lieu à l'erreur ∂D. Il s'agit de déterminer la valeur de ∂L et celle de ∂l.

814. 1°. *Si on suppose exact le lieu de la lune donné par les tables*, les erreurs ∂L et ∂l dépendent alors uniquement de l'hypothese de la longitude terrestre. Ces erreurs, dans ce cas, sont entre elles en raison des mouvements horaires vrais de la lune en longitude et en latitude. Je dis des mouvements horaires *vrais*,

parceque, s'ils different des mouvements horaires apparents, cette différence n'influe que très peu dans la recherche dont il s'agit, à moins que δD ne soit $\frac{1}{5}$ plusieurs minutes, auquel cas nous verrons (816) ce qu'il convient de faire. Cela posé, si l'on appelle M le mouvement horaire vrai relatif en longitude, m ce mouvement en latitude, r le rapport $\frac{m}{M}$ entre ces mouvements, on aura $M : m :: \delta L : \delta l = \frac{m\delta L}{M} = r\delta L$. En substituant cette valeur de δl dans l'équation (G), on en tirera

$$(H) \ldots \delta L = \frac{\delta D}{\sin.Z \cos.l + r \cos.Z}.$$

Après avoir déterminé par cette équation l'erreur sur la différence des longitudes, on aura par le mouvement horaire relatif la correction en temps qu'il faut faire à l'hypothese de la longitude terrestre, et cette longitude sera ainsi connue et déterminée.

815. Pour savoir en quel sens on doit corriger la longitude de la lune, ou l'hypothese de la longitude terrestre, il suffit de réfléchir que si le calcul a donné la distance des centres trop grande, la lune doit être rapprochée de l'étoile ou du soleil, et qu'au contraire elle en doit être éloignée lorsque le calcul a donné la distance des centres trop petite.

816. Si l'erreur δD est de plusieurs minutes, l'équation (H) ne donnera pas exactement la valeur de δL; mais par cette valeur on aura toujours une correction approchée de la longitude. Avec cette longitude ainsi corrigée, on recommencera le calcul (808); on aura une autre erreur δD, mais très petite, et l'on tirera de l'équation (H) une seconde correction très exacte de la longitude.

817. 2°. *Quand on veut tenir compte de l'erreur qui peut se trouver dans le lieu de la lune donnée par les tables, et déterminer cette erreur,* une observation ne suffit pas; il est nécessaire d'en avoir trois, l'une desquelles au moins ait été faite d'un lieu dont on connoisse la longitude. Dans une éclipse de soleil il est facile d'en réunir plusieurs, ce qui donne un résultat moyen d'autant

plus sûr qu'on a rassemblé plus d'observations. Je suppose donc qu'on ait trois observations, et que deux de ces observations aient été faites sous le méridien qu'on cherche à déterminer. Pour chacune de ces observations, on aura une équation de la forme (G). J'appelle E l'erreur des tables sur la longitude de la lune, e l'erreur en latitude, et j'ai, pour les trois observations,

(N)... $\delta D = E \sin.Z \cos.l + e \cos.Z.$

(O)... $\delta D' = \delta L \sin.Z' \cos.l + \delta l \cos.Z'.$

(P)... $\delta D'' = \delta L \sin.Z'' \cos.l + \delta l \cos.Z''.$

L'équation (N) est visiblement celle qui répond à l'observation faite sous un méridien connu; puisque dans cette équation l'erreur δD dépend uniquement des erreurs des tables. Dans les deux autres équations, chacune des expressions δL et δl contient deux erreurs qu'il faut démêler et distinguer l'une de l'autre, l'erreur des tables et celle de l'hypothese pour la longitude terrestre. Ces erreurs sont les mêmes dans les deux équations, parceque l'erreur des tables ne change pas dans le court intervalle entre les deux observations, et parceque les calculs pour l'une et pour l'autre sont faits d'après la même hypothese pour la longitude terrestre. La quantité cos.l suppose que la latitude apparente de la lune est la même dans les trois observations; ce qui n'est pas exact : mais le changement de cette latitude ne peut faire varier sensiblement son cosinus. Au surplus il sera facile, lorsqu'on le voudra, d'employer dans chaque équation la latitude correspondante.

Nommons K l'erreur sur la longitude de la lune, provenant de l'hypothese : l'erreur que cette hypothese produira sur la latitude de la lune sera rK, en faisant toujours $r = \frac{m}{M}$, (814); et on aura

(Q)... $\delta L = E + K.$

(R)... $\delta l = e + rK.$

D'où l'on déduit

(S)... $r\delta L - \delta l = rE - e.$

Substituant

Substituant les valeurs (Q), (R) dans les équations (O), (P), et combinant ces équations avec la précédente (N), pour les résoudre toutes trois par les méthodes ordinaires, on trouvera la valeur de chacune des trois inconnues, E, e, K.

818. Il sera plus commode de diviser l'opération comme l'indiquent les équations suivantes :

$$1^{e} \quad \delta L = \frac{\delta D' \cos.Z'' - \delta D'' \cos.Z'}{\cos.l \sin.(Z' \pm Z'')}.$$

$$2^{e} \quad \delta l = \frac{\delta D'' \sin.Z' \pm \delta D' \sin.Z''}{\sin.(Z' \pm Z'')}.$$

$$3^{e} \quad E = \frac{\delta D + \cos.Z\,(r\delta L - \delta l)}{\sin.Z \cos.l + r \cos.Z}.$$

$$4^{e} \quad e = \frac{r\delta D - \sin.Z \cos.l\,(r\delta L - \delta l)}{\sin.Z \cos.l + r \cos.Z}.$$

$$5^{e} \quad K = \delta L - E.$$

Les équations 1e et 2e sont tirées des équations (O), (P). On emploiera les signes supérieurs lorsque les deux observations auront été faites, comme il arrive le plus souvent, l'une avant et l'autre après la conjonction apparente ; parcequ'alors l'erreur δL, que nous avons substituée (813) à δE, augmente l'angle LES dans un Fig. 78
cas et le diminue dans l'autre ; de sorte que cette erreur doit être négative dans l'une ou dans l'autre des équations (O), (P). Quand on emploiera les signes inférieurs, on se souviendra que sin.$(Z' - Z'')$ doit être négatif (154), si Z'' est $> Z'$.

Les équations 3e et 4e sont tirées des équations (N), (S) ; la 5e, de l'équation (Q).

Il nous reste à prévenir, relativement aux équations 1e... 4e, que lorsque la distance des centres calculée est moindre que la distance observée, on doit faire négative l'erreur correspondante δD ou $\delta D'$, &c. Je crois d'ailleurs à propos de répéter ici ce que j'ai dit (813), que lorsque la lune sera plus voisine que l'étoile ou que le soleil, du pôle de l'écliptique, il faudra employer dans les équations 1e... 4e le supplément de l'angle Z ou Z', &c., donné

par le calcul (808). Il est inutile d'indiquer comment on reconnoîtra en quel sens devront se corriger les erreurs E, e, K dans les différentes circonstances, puisque cela se distingue à la seule inspection des deux dernieres équations (808), lesquelles, après les corrections faites, doivent donner la distance apparente des centres absolument égale à la distance observée.

819. Pour donner un exemple de l'application de mes formules, je prends les éléments que donne M. de la Lande (*Astron.* Tom. II, pag. 565, 566, et Tom. IV, pag. 644), et, par les deux dernieres équations (808), j'ai,

pour l'immersion d'Antarès observée à Paris, $D = 15'\,48'',41$;
pour cette immersion observée à Berlin, $D' = 15'\,48'',86$;
pour l'émersion observée à Berlin, $D'' = 15'\,43'',13$.

Ces trois distances sont toutes trop grandes, et par conséquent les erreurs δD, $\delta D'$, $\delta D''$ conservent les signes qu'elles se trouvent avoir dans les équations (818). En effet ces distances, comparées avec les demi-diametres apparents respectifs de la lune, tels qu'ils sont déterminés dans l'*Astronomie* de M. de la Lande par les calculs de M. Carouge, donnent $\delta D = 11'',8$; $\delta D' = 11'',99$; $\delta D'' = 5'',79$. On a de plus $Z = 75°\,25'$, $Z' = 59°\,44'$, $Z'' = 58°\,26'$, $l = 4°\,38'$ pour valeur moyenne, et $\log.r = 8,76150$. Avec ces éléments, je trouve par les formules (818), en adoptant les signes supérieurs dans la premiere et dans la seconde, ainsi que la question l'exige, $\delta L = 3'',823$; $\delta l = 17'',26$: puis $E = 7'',67$; $e = 17'',485$; $K = -3'',85$. Il est aisé de voir, en examinant le calcul de la distance des centres fait pour Paris, en quel sens doivent s'appliquer les corrections des erreurs E, e, pour faire disparoître l'erreur δD. On reconnoîtra alors que la longitude de la lune, donnée par les tables, est trop petite de $7'',7$; sa latitude trop grande de $17'',5$; et comme la valeur de K a un signe contraire à celui de E, il en

résulte que la longitude de la lune donnée par l'hypothese de la longitude de Berlin, est trop grande de $3''$, 85. Pour diminuer de cette quantité la longitude de la lune, on trouve par le moyen du mouvement horaire, qu'il faut augmenter l'hypothese de $7''$ de temps ; ensorte que l'on a $44'\ 13''$ pour la différence entre les méridiens des Observatoires royaux de Paris et de Berlin, déduite rigoureusement de ces observations et des calculs de M. Carouge.

820. Si deux observations eussent été faites sous le méridien connu, et la troisieme seulement sous le méridien qu'on veut déterminer, on appliqueroit alors aux deux premieres les équations (818, 1° et 2°). La 1° donneroit la valeur de E, la 2° celle de e. On corrigeroit de ces erreurs le lieu de la lune donné par les tables ; puis on calculeroit (808) la distance des centres relativement à la troisieme observation ; et l'erreur de l'hypothese pour la longitude terrestre se trouveroit par le moyen de l'équation (H), (814).

821. *Corriger les observations faites en employant un réticule de 45° non situé dans la direction exacte du mouvement diurne.*

Soient CB, CA, CD les trois fils du réticule, qui devroient se trouver dans les positions Cb, Ca, Cd ; et soit BAD le parallele d'un astre, perpendiculaire au cercle horaire vrai Ca. Les passages de l'astre, observés en B, A, D, donnent en temps les intervalles BA, AD, desquels il s'agit de déduire la valeur de Aa et celle de Ca. Fig. 80

Le fil AC partageant également l'angle BCD, on a (244), BA + AD : BA ∽ AD :: tang.$\frac{1}{2}$(D + B) : tang.$\frac{1}{2}$(D ∽ B). Mais BCD = 90°, et par conséquent tang.$\frac{1}{2}$(D + B) = tang. 45° = 1 ; D ∽ B = 90° − 2B = 2 aCA ; parceque B = 90° − BCa, et que BCa = 45° + aCA. Donc

$$\text{tang.}\, a\text{CA} = \frac{\text{BA} \backsim \text{AD}}{\text{BA} + \text{AD}},$$

formule qui fait connoître l'angle de déviation des fils.

L'hypothénuse BD, divisée en deux segments par la perpendi-

culaire Ca, donne (221, 2°.), BD : Ba ∽ Da :: 1 : sin.(D ∽ B). Donc

$$Ba \backsim Da = (BA + AD) \sin.2aCA.$$

Au moyen de cette formule, on aura la valeur absolue des segments Ba, Da, et on connoîtra par conséquent le moment auquel on devoit observer le passage de l'astre en a. La différence entre Ba et BA donne la valeur de aA. Or

$$Ca = aA \cot.aCA,$$

et Ca est la différence cherchée de déclinaison entre l'astre et le centre du réticule : pour la calculer, on multipliera la valeur en temps de aA trouvée ci-dessus, par 15 cos. *décl.* de l'astre.

822. *Corriger les erreurs auxquelles les observations sont sujettes, à raison de la différence entre le parallele vrai et le parallele apparent.*

Il y a trois causes de différence entre le parallele vrai et le parallele apparent; 1°. le changement de déclinaison de l'astre; 2°. le changement de la parallaxe de déclinaison; 3°. le changement de la réfraction. Il est à propos d'évaluer séparément l'erreur qui provient de chacune de ces trois causes. On ne doit tenir compte des deux premieres que pour les observations qui concernent la lune.

823. Quand on observe avec la lunette parallatique la différence d'ascension droite et de déclinaison entre la lune et une étoile qui la suit, on est obligé de placer le micrometre de maniere que le bord de la lune rase le fil. Soit P le pôle du Monde, BC le fil horaire du micrometre, FM un autre fil perpendiculaire au fil horaire; et soit LU le mouvement du bord de la lune, qui, en traversant la lunette, s'approche ou s'éloigne du pôle par l'une des trois causes (822). Comme il faut mettre le fil MF dans la direction LU, le fil horaire se trouve dans la position CS; et par conséquent si AN est le parallele de l'étoile, le passage de cette étoile, qu'on auroit dû observer en B, s'observera en S. Comme il est clair que la route

Fig. 81

du centre de la lune est parallele à celle du bord qui a rasé le fil, et comme les observations des bords de la lune se réduisent toujours à son centre, supposons maintenant que LU soit la ligne suivie par le centre de la lune, et l'angle BPS sera l'erreur sur la différence des passages observés. Or le triangle CPS donne sin.PS : sin.PCS :: sin.CS : sin.CPS ou :: CS : CPS, vu la petitesse de ces quantités. Mais PCS = MCL est l'angle formé par le parallèle apparent avec le parallele vrai; CS est la différence observée de déclinaison, entre l'étoile et le centre de la lune. Donc on aura par l'équation suivante la correction, en temps, du passage observé.

$$\text{(T)... la correction cherchée} = \frac{\text{diff.appar.}\textit{décl.} \times \text{sin.}\textit{ang.des parallèles}}{15\ \text{cos.}\textit{décl.}\ \text{de l'étoile}}.$$

Cette correction s'ajoutera au passage observé de l'étoile, lorsque la lune, plus éloignée du pôle que l'étoile, s'en rapprochera, ou que, plus voisine du pôle que l'étoile, elle s'en éloignera. Dans les autres cas, la correction se retranchera.

L'erreur en déclinaison, ou la différence de CS à BC, peut se négliger dans les deux premiers cas (822). Au surplus on a BC = CS × cos.PCS.

Pour calculer l'équation (T), il faut connoître l'angle que forment entre eux les paralleles. Nous allons le déterminer relativement à chacune des trois causes (822).

824. Appellons m le mouvement diurne de la lune en déclinaison, pris en minutes; la formule suivante que donne M. de la Lande (*Astr.* 2543) fait connoître promptement, et avec l'exactitude suffisante, la valeur en minutes de *l'angle des paralleles produit par le changement de la lune en déclinaison.*

$$\text{angle des paralleles} = \frac{\frac{1}{4}m}{\text{cos.}\textit{décl.}\ \text{de la lune}}.$$

825. Cherchons maintenant *l'angle des paralleles produit par le changement de la parallaxe de la lune en déclinaison.* Le seul énoncé de cette question fait naître l'idée de différentier la formule

qui donne la valeur de la parallaxe en déclinaison : il est surprenant que cette voie qui se présente d'elle-même n'ait été saisie par aucun Auteur, et sur-tout qu'elle ait échappé à de très habiles Géometres qui ont épuisé cette matiere, en discutant la solution donnée par M. de la Lande.

Fig.82 Soit Z le zénith, P le pôle, LU le parallele apparent de la lune; soit PA = PL; AU sera par conséquent le changement de la parallaxe de déclinaison. Si l'on appelle d cette parallaxe, p la parallaxe horizontale, on a $d = p$ sin.ZL cos.PLZ, (*Astr.* la Lande, Tom. IV, pag. 634). Mais $\text{sin.ZL} = \frac{\text{sin.ZPL sin.PZ}}{\text{sin.PLZ}}$. Donc $d = p$ sin.ZPL sin.PZ cot.PLZ. Or $\text{cot.PLZ} = \frac{\text{cot.PZ sin.PL}}{\text{sin.ZPL}} - \text{cos.PL}$ cot.ZPL, (VII. 13e). Donc $d = p$ cos.PZ sin.PL $- p$ cos.PL sin.PZ cos.ZPL. En différentiant cette équation, et observant qu'indépendamment de p et de PZ, PL est encore une quantité constante, parcequ'ici l'on ne considere pas le mouvement de la lune en déclinaison, on a $\delta d = p$ cos.PL sin.PZ sin.ZPL δZPL. Mais δZPL = APL, δd = AU = AL tang.ALU = APL sin.PL tang.ALU $= p$ cos.PL sin.PZ sin.ZPL $\times$ APL. De cette derniere équation on déduit tang.ALU $= p$ cot.PL sin.PZ sin.ZPL. Et par conséquent on aura en minutes l'angle des paralleles par l'équation suivante :

$$\text{angle des paralleles} = \frac{\text{R}' \times \textit{parall.horiz.}\ \text{cos.}\textit{haut. du pôle}\ \text{sin.}\textit{ang.hor.app.}\ \text{de la lune}}{\text{cot.}\textit{décl.appar.}\ \text{de la lune}}.$$

826. Il nous reste à chercher *l'angle des paralleles produit par le changement de la réfraction.*

Fig.83 Soit AS le fil qu'un astre a parcouru, AE, FS la quantité de la réfraction dans les deux points A, S. Si on prend FR = AE, RS sera la différence des deux réfractions, et AR le parallele que l'astre auroit suivi, si l'effet de la réfraction eût été uniforme et constant. L'angle cherché des paralleles est donc RAS.

Comme il suffit de trouver sa valeur en minutes, j'emploierai indifféremment dans cette recherche les angles de variation (753)

ZRP, ZSP, ZAP, que je regarderai comme égaux ; et prenant ZB = ZA, ce qui donne BS pour différence des hauteurs apparentes, je considérerai comme droits les angles B et C, parceque dans les cas où ce problême se présente à résoudre, ZA et PA ne different jamais assez de 90°, pour que l'erreur (534) puisse être sensible.

Je fais RS = δr, BS = δh, APR = δP, sin.PA = cos.*décl.* = cos.D, RAS = a, ZRP = ZSP = ZAP = V.

Or tang.a = $\frac{CS}{AC}$ = $\frac{RS \cos.ZSP}{AR - CR}$ = $\frac{\delta r \cos.V}{\delta P \cos.D - \delta r \sin.V}$; et cette derniere valeur de tang.a est celle que donne M. Lexell, (Trembley, *Essai de Trigonométrie sphérique*, pag. 198). Mais cette formule ne me paroît pas la plus commode, parceque les tables des réfractions ne contiennent pas le rapport $\frac{\delta r}{\delta P}$, mais le rapport $\frac{\delta r}{\delta h}$.

Pour employer ce dernier rapport qui me semble préférable, je considere que si des angles droits BAZ, RAP je retranche la partie commune RAZ, il reste BAR = PAZ = V. Or AR = $\frac{BR}{\sin.BAR}$: donc AR = $\frac{\delta h + \delta r}{\sin.V}$. Mais on a aussi AR = $\frac{SR \sin.ASR}{\sin.RAS}$ = $\frac{SR \cos.BAS}{\sin.RAS}$ = $\frac{\delta r \cos.(V - a)}{\sin.a}$ = $\delta r \cos.V \cot.a + \delta r \sin.V$. Donc $\frac{\delta h + \delta r}{\sin.V}$ = $\delta r \cos.V \cot.a + \delta r \sin.V$; donc enfin

$$\text{tang.}a = \frac{\delta r \sin.V \cos.V}{\delta h + \delta r \cos.^2 V},$$

ou, en négligeant le terme insensible $\delta r \cos.^2 V$,

$$\text{(U)}\ldots\ \text{tang.}a = \frac{\delta r}{\delta h} \times \sin.V \cos.V = \frac{\delta r}{\delta h} \times \tfrac{1}{2}\sin.2V.$$

Au lieu de tang.a, on peut sans scrupule mettre sin.a, et substituer la valeur que donne cette formule, au lieu de *sin. ang. des paralleles* dans la formule (T), (823). Mais de plus il faut observer qu'en construisant la formule (T), nous avons supposé sans déviation le chemin apparent de l'un des deux astres, c'est-à-dire de l'étoile qu'il s'agissoit de comparer à la lune : or la réfraction influe sur le chemin apparent de l'un et de l'autre des deux astres ; d'où il suit qu'*on doit prendre le double de la correction donnée par la*

formule (T). Alors, et en faisant la substitution dont je viens de parler, la formule (T) sera la même que celle de M. de la Lande (*Astr.* 2547).

827. Pour que l'on sache en quel sens la correction doit se faire, il suffit que nous prévenions qu'à l'occident le changement de la réfraction rapproche les astres du pôle, et qu'à l'orient il les en éloigne. On fera donc usage de la regle que nous avons donnée immédiatement après la formule (T), en appliquant à l'astre qui passera le premier ce que nous avons dit de la lune, et faisant la correction sur le passage du second astre.

828. J'ai dit qu'on doit prendre *le double de la correction donnée par la formule* (T); c'est ce qu'il est à propos de démontrer : car M. Lexell, dont la formule équivalente à la formule (T) prise une seule fois, a été adoptée par M. Trembley (pag. 202), dit positivement dans les Mémoires de Pétersbourg pour 1774, que la formule de M. de la Lande n'est pas exacte, *nequaquam cum veritate consistere posse.*

De ce qui a été dit (827), il est facile de conclure que dans tous les cas le fil horaire de la lunette est toujours entre le cercle horaire vrai et le vertical. Cela posé, soit NQ le fil horaire de la lunette, P le pôle, Z le zénith; RR' le fil parcouru par le premier astre, MN le fil parcouru par le second; ZS, CA, deux verticaux; SE la réfraction de l'astre le plus bas, MA la réfraction de l'autre; enfin soient les petits arcs AB, EU perpendiculaires à PU, et le petit arc MF sensiblement perpendiculaire à CA et à ZS.

Fig. 84

On a PSN $= a$, PSZ $= V =$ PMC sensiblement, NS $=$ diff.appar.*décl.*, quantité que je nommerai δD; SE $= r$. Je fais MA $= r'$. Par D j'entends toujours la déclinaison, mais de l'un ou de l'autre astre indifféremment. On pourra, si l'on veut, pour plus d'exactitude, employer dans le calcul la quantité moyenne entre les deux déclinaisons, et faire la même chose pour l'angle de variation V.

Lors de l'observation du premier astre en S, son lieu vrai ou dégagé

dégagé de la réfraction, étoit en E. Donc, pour avoir son passage vrai par le cercle horaire vrai PU, il falloit ajouter à son passage apparent un intervalle de temps $\frac{EU}{15\cos.D} = \frac{SE\ \sin.ESU}{15\cos.D} = \frac{r\sin.V}{15\cos.D}$. En nommant T le temps du passage observé en S, le passage dégagé de la réfraction sera donc $T + \frac{r\sin.V}{15\cos.D}$.

Lorsque le passage du second astre a été observé en N, son passage apparent sur le cercle horaire vrai avoit déjà eu lieu en M. La différence en temps, entre ces deux passages, est $\frac{MN}{15\cos.D} = \frac{NS\ tang.NSM}{15\cos.D} = \frac{\delta D}{15\cos.D} \times \frac{\delta r}{\delta h}\sin.V\cos.V$, (826) (U). Cette différence doit se soustraire du passage observé en N, pour avoir le passage en M. Mais lorsqu'on a vu l'astre au point M, son lieu, dégagé de la réfraction, étoit en A. Pour qu'il atteignît le cercle horaire vrai PU, il s'en falloit donc d'un intervalle de temps $\frac{AB}{15\cos.D} = \frac{AM\ \sin.AMB}{15\cos.D} = \frac{r'\sin.V}{15\cos.D}$. Donc, en appellant T' le temps du passage observé en N, le moment du vrai passage qu'on auroit dû observer en B, sera $T' - \frac{\delta D}{15\cos.D} \times \frac{\delta r}{\delta h}\sin.V\cos.V + \frac{r'\sin.V}{15\cos.D}$. La différence d'ascension droite en temps, entre les deux astres, dégagée des effets de la réfraction, sera donc $T' - \frac{\sin.V}{15\cos.D} \times \left(\frac{\delta r}{\delta h} \times \delta D\cos.V - r'\right) - T - \frac{r\sin.V}{15\cos.D}$, ou $T' - T - \frac{\sin.V}{15\cos.D}\left(\frac{\delta r}{\delta h} \times \delta D\cos.V + r - r'\right)$. Mais $r - r'$ est la différence de réfraction correspondante à la différence de hauteur des deux astres; de sorte que $r - r' : FS :: \delta r : \delta h$. De plus $FS = MS\cos.V = \delta D\cos.V$, parcequ'au lieu de MS on peut sans scrupule mettre NS. La derniere analogie donne donc $r - r' = \frac{\delta r}{\delta h} \times \delta D\cos.V$. Donc l'erreur de la différence $T' - T$ des passages observés se réduit à $\frac{\delta r}{\delta h} \times \frac{2\delta D\ \sin.V\cos.V}{15\cos.D}$; ce qui est précisément le double de la formule (T), dans laquelle on auroit d'abord substitué la valeur de sin.a prise de la formule (U). C'est

donc M. Lexell qui lui-même est tombé dans l'erreur sur ce point, et non M. de la Lande.

La fig. 84 suppose l'astre à l'orient; le résultat seroit le même en supposant l'astre à l'occident.

829. La vraie différence de déclinaison est BU = MS — BM + SU. En mettant NS au lieu de MS, on aura, pour la correction de la différence observée NS, SU — BM = SE cos.ESU — MA cos.BMA = r cos.V — r' cos.V; et prenant ci-dessus la valeur de $r - r'$, on aura $\frac{\delta r}{\delta h} \times \delta D \cos.^2 V$, pour *la correction de la différence observée de déclinaison*, correction qui dans tous les cas doit s'ajouter.

830. Pour avoir par les tables de réfraction le rapport $\frac{\delta r}{\delta h}$, il suffit de connoître à-peu-près, par le moyen d'un globe, la hauteur moyenne entre les hauteurs des deux astres. En employant cette hauteur, on aura encore l'angle de variation avec une exactitude suffisante par la formule $\sin.V = \frac{\cos.haut.du\ pôle \sin.ang.horaire}{\cos.hauteur}$.

831. *Trouver le moment où le mouvement d'un astre en hauteur est le plus rapide.*

Fig. 68 Soit P le pôle, Z le zénith, RS le parallèle d'un astre. Je fais PR = PS; ce qui suppose que l'astre ne change point en déclinaison, parcequ'en effet ce changement, quand il a lieu, est infiniment petit pour l'intervalle d'un instant, du moins en comparaison du mouvement en hauteur. Le triangle PZR, en se convertissant en PZS, conserve donc comme constants les deux côtés PZ, PR; et par conséquent, en appellant Z l'angle PZR, R l'angle PRZ, et faisant (630, 631), A = P, B = Z, C = R, on a

$$\delta ZR = \delta P \sin.PZ \sin.Z = \delta P \sin.PR \sin.R.$$

D'où il suit que la plus grande valeur de δZR ou le plus grand mouvement en hauteur dans l'intervalle d'un instant δP, a lieu lorsque sin.Z ou sin.R est le plus grand possible, c'est-à-dire quand l'azimuth ou l'angle de variation (753) est de 90°.

832. Ces deux angles ne peuvent être tous deux droits en même temps, si ce n'est quand RS est l'équateur (417). Alors ils sont constants (si la déclinaison ne change pas), et par conséquent le mouvement en hauteur est uniforme.

Si RS n'est pas l'équateur, PR sera ou plus grand ou plus petit que 90°; quant à PZ, il ne peut jamais excéder 90°.

Supposons d'abord PR $<$ 90°; celui-là seul des deux angles Z, R pourra être un angle droit, qui sera opposé au plus grand côté (475, 3°.), (413). Donc si la déclinaison boréale de l'astre est moindre que la hauteur du pôle, le mouvement le plus rapide en hauteur aura lieu lorsque l'azimuth sera de 90°; et si la déclinaison boréale est plus grande que la hauteur du pôle, le moment du plus grand mouvement en hauteur sera celui où l'angle de variation sera de 90°.

Soit maintenant PR $>$ 90°. Alors ni l'un ni l'autre des angles Z, R ne peut être droit. En effet si on avoit Z $=$ 90°, on auroit cos.PR $=$ cos.PZ cos.ZR, (VI. 13°). Mais on a ZR $<$ 90°, puisqu'ici l'on considere l'astre au-dessus de l'horizon : donc l'équation précédente donne une valeur positive de cos.PR; ce qui est absurde, puisqu'on suppose PR $>$ 90°. De même si l'on avoit R $=$ 90°, on auroit cos.PZ $=$ cos.PR cos.ZR, équation qui donneroit une valeur négative de cos.PZ, tandis qu'on ne peut jamais avoir PZ $>$ 90°.

Pour déterminer le moment de la plus grande valeur de sin.Z ou de sin.R, quand PR est $>$ 90°; je prends l'équation (VII. 9°) qui donne $\cos.Z = \frac{\cos.PR - \cos.PZ \cos.ZR}{\sin.PZ \sin.ZR}$. Par la supposition, cos.PR est négatif; Z sera donc $>$ 90°, et cet angle sera d'autant moindre, c'est-à-dire d'autant plus proche de 90°, que la valeur de cos.Z donnée par cette équation sera plus petite. Or la moindre valeur de cos.Z, pour une valeur donnée de PZ et de PR, a lieu visiblement lorsque cos.ZR $=$ 0.

En raisonnant de même sur l'équation (VII. 11°) qui dans ce

Fig.68 cas donne positif le rectangle cos.PR cos.ZR, on trouvera que la moindre valeur de cos.R a lieu dans la même circonstance, c'est-dire lorsque cos.ZR = 0.

Donc le mouvement le plus rapide en hauteur, des astres qui ont une déclinaison méridionale, a lieu lorsque ZR = 90°, c'est-à-dire au lever de l'astre.

833. *Déduire la hauteur méridienne, des hauteurs observées près du méridien.*

Soient ZR, ZS deux distances au zénith observées peu avant ou peu après le passage de l'astre au méridien. On demande la distance ZT.

Le triangle PZS, converti en PZR, conserve comme constants les côtés PZ, et PS = PR. Par conséquent appellant P l'angle ZPS, on a (629) en changeant les signes des différentielles et faisant A = P, B = Z, C = S,

$$(A)\ldots\ \sin.\tfrac{1}{2}\eth ZS = \sin.\tfrac{1}{2}\eth P \times \frac{\sin.PZ\ \sin.PS\ \sin.(P + \frac{1}{2}\eth P)}{\sin.(ZS + \frac{1}{2}\eth ZS)}.$$

Or $\eth ZS$ est la différence des deux hauteurs observées; $\eth P$ est l'intervalle de temps entre les deux observations, compté en parties de l'équateur; $P + \frac{1}{2}\eth P$ et $ZS + \frac{1}{2}\eth ZS$ sont l'angle horaire moyen et la distance au zénith moyenne, entre l'une et l'autre observation. On peut donc par la formule (A) vérifier très exactement la différence entre les deux hauteurs observées, et réduire successivement un nombre quelconque d'observations à une seule, en prenant le milieu entre les divers résultats. Je suppose toutes les observations réduites au point S, c'est-à-dire à l'observation la plus prochaine du méridien. Pour appliquer à cette observation la formule (A), il suffit de faire $\eth P = ZPS$, et $P = 0$; et on a

$$\sin.\tfrac{1}{2}(ZS - ZT) = \sin.^2\tfrac{1}{2}ZPS \times \frac{\sin.PZ\ \sin.PS}{\sin.\frac{1}{2}(ZS + ZT)};$$

et quand on a $ZPS < 2°$, (259),

$$ZS - ZT = \frac{(ZPS)^2}{2R''} \times \frac{\sin.PZ\ \sin.PS}{\sin.\frac{1}{2}(ZS + ZT)}:$$

équations qui font connoître ZT ou la distance au zénith, que l'on cherche.

Ces équations et la formule (A) m'ont paru très commodes pour conclure, avec une grande exactitude, de plusieurs observations, la hauteur méridienne du soleil dans les jours voisins du solstice. Je prends ordinairement six hauteurs d'un bord avant le midi, et six du bord opposé après le midi; ce qui de plus me fait connoître avec grande précision le diametre du soleil tel que la lunette le donne. D'autres observations ou la marche réglée de la pendule m'apprenant le moment juste du midi vrai, j'ai les angles horaires correspondants à chacune des observations. J'emploie dans le calcul du second membre des équations ci-dessus la déclinaison et la distance au zénith du bord observé, en négligeant les secondes.

834. *Ayant trois hauteurs d'un astre, et connoissant le temps où chacune de ces hauteurs a été observée, trouver l'angle horaire et la déclinaison de l'astre, et la hauteur du pôle.*

Ce problême dont la solution est assez pénible par les méthodes employées jusqu'à présent, se résout immédiatement par mes analogies différentielles finies.

Soient A', A'', A''' les trois hauteurs observées, A' étant la plus petite, A''' la plus grande. Soit T l'intervalle de temps, réduit en parties de l'équateur, entre les observations des deux moindres hauteurs A', A''; T' l'intervalle de temps entre les deux plus grandes A'', A'''; O''' *l'angle horaire* correspondant à la plus grande hauteur A''', L *la latitude terrestre*, D *la déclinaison de l'astre.*

En comparant la 1e et la 3e observation, la formule (A), (833), donne $\sin.\frac{1}{2}(A''' - A') : \sin.\frac{1}{2}(T + T') :: \cos.L \cos.D \sin.(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T') : \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')$, et en comparant les observations des deux plus grandes hauteurs, $\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'') : \sin.\frac{1}{2}T' :: \cos.L \cos.D \sin.(O''' + \frac{1}{2}T') : \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')$. Donc $\cos.L \cos.D = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A')}{\sin.\frac{1}{2}(T + T') \sin.(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T')} = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'') \cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\sin.\frac{1}{2}T' \sin.(O''' + \frac{1}{2}T')}$. Mais $\sin.(O''' + \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T') = \sin.(O''' + \frac{1}{2}T') \cos.\frac{1}{2}T + \cos.(O''' + \frac{1}{2}T') \sin.\frac{1}{2}T$. En substi-

tuant cette valeur dans l'équation précédente, et multipliant cette équation par $\sin.(O''' + \frac{1}{2}T')$, on en déduit

$$\cot.(O''' + \tfrac{1}{2}T') = \cot.\tfrac{1}{2}T\left(\frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A')\sin.\frac{1}{2}T'}{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')\sin.\frac{1}{2}(T + T')\cos.\frac{1}{2}T} - 1\right),$$

équation qui fait connoître l'angle horaire, puisque O''' est la seule quantité inconnue.

Faisons, pour abréger, $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\sin.\frac{1}{2}T'\sin.(O''' + \frac{1}{2}T')} = m$; nous
Fig.68 aurons $\cos.L\cos.D = m$. Mais $\cos.L\cos.D = \sin.PZ\sin.PS = \frac{\cos.ZS - \cos.PZ\cos.PS}{\cos.ZPS}$ (VII. 7°) $= \frac{\sin.A''' - \sin.L\sin.D}{\cos.O'''} = m$. Donc $\sin.L\sin.D = \sin.A''' - m\cos.O'''$. La somme et la différence de cette équation et de l'équation $\cos.L\cos.D = m$ donneront (II. 4°, 3°)

$$\cos.(L \backsim D) = \sin.A''' + m\ (1 - \cos.O''')$$
$$\cos.(L + D) = m\ (1 + \cos.O''') - \sin.A''',$$

ou, (I. 7°, 24°), pour employer les logarithmes plus commodément,

$$\cos.(L \backsim D) = \sin.A'''\left(1 + \frac{2m\sin.^2\frac{1}{2}O'''}{\sin.A'''}\right)$$
$$\cos.(L + D) = \sin.A'''\left(\frac{2m\cos.^2\frac{1}{2}O'''}{\sin.A'''} - 1\right).$$

Au moyen de ces deux équations, on aura les valeurs absolues de L et de D, c'est-à-dire de la latitude et de la déclinaison. Il est vrai qu'il faut savoir d'ailleurs quelle est la plus grande de ces deux quantités; mais il est bien rare qu'on ne le sache pas d'avance.

Les équations suivantes, déduites de celles que nous venons de donner, par les méthodes exposées (202, 198), rendront le calcul de cette solution prompt et facile, et n'exigent que des tables trigonométriques en logarithmes.

$$n = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A'')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A'')}{\sin.\frac{1}{2}T'}$$
$$\cos.x = \sqrt{\frac{n\cos.\frac{1}{2}T\sin.\frac{1}{2}(T + T')}{\sin.\frac{1}{2}(A''' - A')\cos.\frac{1}{2}(A''' + A')}}$$
$$\tan.(Q''' + \tfrac{1}{2}T') = \tan.\tfrac{1}{2}T\cot.^2 x$$

$$m = \frac{n}{\sin.(O''' + \frac{1}{2}T')}$$

$$\text{tang.}y = \sin.\tfrac{1}{2}O''' \sqrt{\frac{2m}{\sin.A'''}}$$

$$\cos.z = \text{tang.}\tfrac{1}{2}O''' \cot.y$$

$$\cos.(L \backsim D) = \frac{\sin.A'''}{\cos.^2 y}$$

$$\cos.(L + D) = \sin.A''' \text{ tang.}^2 z.$$

Il est facile de reconnoître que plus les intervalles seront grands entre les observations successives, plus on aura d'exactitude dans les résultats : car il est clair que les erreurs commises dans les observations seront d'autant plus sensibles dans le calcul que les sinus de $\frac{1}{2}(A''' - A'')$ et de $\frac{1}{2}T'$ seront plus petits, et que cot.$\frac{1}{2}T$ sera plus grande.

Cette solution est analogue à celle de M. Bezout; mais la démonstration en est moins pénible : et quant au calcul numérique, mes formules exigent la recherche de 21 logarithmes, celles de M. Bezout la recherche de 27. Toutes les solutions qui me sont connues demandent encore plus de travail.

835. *Connoissant la déclinaison et deux hauteurs d'un astre, et les moments des observations des hauteurs, trouver l'angle horaire de l'astre et la hauteur du pôle.*

Dans le triangle isoscele SPR, les côtés et l'angle vertical étant connus, on trouvera la base RS et les angles sur la base. Dans le triangle RSZ, connoissant les trois côtés, on cherchera l'un des angles adjacents à RS, par exemple ZSR. On aura alors ZSP ou (ZSR — PSR). Enfin dans le triangle PZS, connoissant ZS et PS, et l'angle compris, on trouvera PZ et l'angle ZPS. Fig.68

Si on connoissoit la hauteur du pôle, et qu'on cherchât la déclinaison de l'astre, on suivroit la même méthode ; mais on écriroit Z au lieu de R et de S, et S au lieu de Z, dans la démonstration et dans la figure.

836. *Ayant la hauteur du pôle, la déclinaison et deux hau-*

solution immédiate, beaucoup plus simple et plus facile que celles qu'on en a trouvées jusqu'à présent.

Soit E le point du globe solaire ou lunaire qui correspond au pôle de l'écliptique; P le pôle de rotation de l'astre, T, A, C les trois lieux observés de la tache. Fig.85

Les trois distances TE, AE, CE de la tache au pôle de l'écliptique, et les différences de longitude, TEA, AEC, sont données par l'observation.

On cherche PE distance des deux pôles, la longitude du pôle P qui est à 90° de celle des nœuds, et la distance TP = AP = CP de la tache au même pôle, en la supposant adhérente au disque de l'astre, et dans une même situation pendant l'intervalle des observations.

Je décris trois arcs de grand cercle, TA, AC, TC: j'observe que le triangle PET converti en PEA conserve comme constants les côtés PE, PT; ce qui me donne, en faisant (619) A = P, B = E, C = T, et changeant les signes des différentielles dans l'analogie,

$$\sin.\tfrac{1}{2}\delta ET : -\tang.\tfrac{1}{2}\delta PET :: \sin.(ET+\tfrac{1}{2}\delta ET) : \cot.(PTE-\tfrac{1}{2}\delta PTE).$$

Mais $\delta ET = EA - ET$, $\delta PET = TEA$, $(ET + \frac{1}{2}\delta ET) = \frac{1}{2}(ET + EA)$, et $PTE - \frac{1}{2}\delta PTE = \frac{1}{2}(PTE + PAE)$, comme on le reconnoîtra d'autant mieux en recourant à la démonstration (711) de l'analogie (619). Donc, en supprimant le signe négatif de $\tang.\frac{1}{2}\delta PET$, lequel ne fait qu'indiquer que PET diminue quand ET augmente (726), on a

$$\sin.\tfrac{1}{2}(EA - ET) : \tang.\tfrac{1}{2}TEA :: \sin.\tfrac{1}{2}(EA + ET) : \cot.\tfrac{1}{2}(PTE + PAE).$$

Dans cette analogie tout est donné, à l'exception du dernier terme. Mais la considération du triangle TPE converti en CPE fournira de même une analogie qui donnera la valeur de $\cot.\frac{1}{2}(PTE+PCE)$; et, le triangle APE converti en CPE conduira à une analogie qui donnera la valeur de $\cot.\frac{1}{2}(PAE + PCE)$. Connoissant par ces trois

analogies les demi-sommes des trois angles de position, PTE, PAE, PCE, pris deux à deux, on en déduira la valeur de chacun de ces angles.

Maintenant, l'un quelconque des trois triangles que nous venons de considérer, par exemple le triangle PCE converti en PAE, nous donnera (614)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta\text{PEC} : \text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta\text{PCE} :: \text{tang.}(\text{PEC}+\tfrac{1}{2}\delta\text{PEC}) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{PCE}+\tfrac{1}{2}\delta\text{PCE}),$$

ou, en ayant recours, si l'on veut, à la démonstration (710) de l'analogie (614),

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\text{CEA} : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{PAE}-\text{PCE}) :: \text{tang.}(\text{PEC}+\tfrac{1}{2}\text{CEA}) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{PAE}+\text{PCE})$$

Le troisieme terme de cette analogie est le seul inconnu ; elle donnera donc la valeur de l'angle PEC, et par conséquent la longitude cherchée du pôle P.

Alors connoissant un côté et les angles adjacents dans l'un des triangles PEC, PEA, PET, connoissant, par exemple, dans le premier, CE, PEC, PCE, on trouvera à la fois, par l'élégante solution de Neper (IX. 4°), les deux côtés cherchés PE, PC.

On n'a que 21 logarithmes à chercher pour résoudre de cette maniere le problême dont nous venons de nous occuper. La solution du P. Pezenas, l'une des moins pénibles de celles qu'on a données jusqu'à présent, demande 46 recherches dans deux tables. J'observe de plus que ma méthode a l'avantage de donner dans le calcul la plus grande précision, attendu qu'on détermine toutes les inconnues par les tangentes.

838. La solution qu'on vient de lire se trouve dans le Tome X des Mémoires présentés à l'Académie Royale des Sciences de Paris : j'y donne en même temps des regles relatives au cas où le cercle des limites se trouve entre les longitudes observées ; parcequ'alors les premieres analogies, au lieu de donner trois demi-sommes des angles de position, en donnent une seule et deux demi-différences. Mais si l'on observe les regles des signes (42, 154), on peut faire

usage, dans tous les cas, des analogies que j'ai données ci-dessus, sans qu'il soit besoin ni de figure ni d'aucune attention à la situation du cercle des limites.

Voici le détail du calcul réduit à la simplicité et à la généralité la plus grande.

Soit L′ la premiere longitude observée de la tache, L″ la seconde, L‴ la troisieme; D′, D″, D‴ les trois distances respectives au pôle de l'écliptique; *L* la longitude cherchée du pôle de l'équateur de l'astre; *O* l'obliquité de l'écliptique relativement à cet équateur; *D* la distance de la tache à ce pôle.

$$\text{tang.}a = \frac{\sin.\frac{1}{2}(D'' - D')\ \cot.\frac{1}{2}(L'' - L')}{\sin.\frac{1}{2}(D'' + D')}$$

$$\text{tang.}b = \frac{\sin.\frac{1}{2}(D''' - D')\ \cot.\frac{1}{2}(L''' - L')}{\sin.\frac{1}{2}(D''' + D')}$$

$$\text{tang.}c = \frac{\sin.\frac{1}{2}(D''' - D'')\ \cot.\frac{1}{2}(L''' - L'')}{\sin.\frac{1}{2}(D''' + D'')}$$

$$\text{tang.}x = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(L''' - L'')\ \text{tang.}c\ \cot.(a - b)$$

$$L = x + \tfrac{1}{2}(L''' + L'')$$

$$m = L \backsim L''' \qquad n = (b + c) \backsim a$$

Si m est $> 180°$, on prendra $360° - m$ au lieu de m. De même si n est $> 180°$, on prendra $360° - n$ au lieu de n.

$$\text{tang.}y = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}D'''\ \sin.\frac{1}{2}(m \backsim n)}{\sin.\frac{1}{2}(m + n)}$$

$$\text{tang.}z = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}D'''\ \cos.\frac{1}{2}(m \backsim n)}{\cos.\frac{1}{2}(m + n)}$$

$$O = z \backsim y \qquad D = z + y$$

Mais si n est $> 90°$, alors

$$O = 180° - (z + y) \qquad D = 180° - (z \backsim y).$$

CHAPITRE XXII.

Des projections, et des planispheres géographiques et astronomiques.

La Trigonométrie est d'une grande utilité pour la construction des planispheres et pour toute espece de projections ; et nous croyons ne pas devoir terminer cet Ouvrage sans donner au moins une idée de cette application importante de la science dont nous traitons.

839. On entend par la *projection* d'un objet, la représentation ou l'apparence de cet objet sur le plan de perspective. Si des différents points d'une figure on tire des lignes, suivant une même loi donnée, sur un plan donné autre que celui dans lequel est la figure, les points de ce plan donné auxquels aboutiront ces lignes, formeront la projection de la figure. Les cartes célestes et géographiques, par exemple, ne peuvent être que des projections, puisqu'elles ont pour but de représenter une surface sphérique sur la surface plane du papier, c'est-à-dire de réduire à un seul plan tous les points d'une surface sphérique, lesquels appartiennent, dans cette surface, à une infinité de plans différents.

De ces notions il résulte que l'art des projections n'est pas sans difficulté. Il est d'ailleurs impossible de conserver avec exactitude sur une carte géographique les distances respectives des pays, et de donner aux degrés de longitude et de latitude les grandeurs relatives qu'ils ont sur le globe : on ne peut que se rapprocher plus ou moins de la vérité.

840. Dans les anciennes cartes on faisoit les méridiens paralleles entre eux, et les degrés de longitude tous égaux à ceux de latitude. Ces cartes se nomment *cartes plates :* elles sont absolument défectueuses, si ce n'est pour une très petite étendue. En

effet soit P le pôle de la Terre, EQ un arc de l'équateur, de 12° par exemple. Soit A la ville de Paris, D celle de Dublin, M celle de Maroc. Je suppose ces deux dernieres villes sous le même méridien, leur différence en longitude étant très petite et peut-être nulle; car la longitude de Maroc n'est pas encore déterminée avec précision. Au lieu de faire sur la carte les méridiens PE, PQ convergents, de sorte qu'ils aillent se rencontrer au pôle, conformément à leur position sur le globe et à la vérité; si on les décrit parallelement, comme FQ, GE, Paris se trouvera sur la carte au point H, Dublin en K et Maroc en L. C'en est assez pour faire comprendre combien, dans les cartes de cette espece, on peut errer sur les distances réciproques. Fig.86

841. Il est à propos de remarquer avant tout, que les degrés de longitude different de grandeur sur le globe, suivant les distances au pôle. L'arc de parallele AR est (394) du même nombre de degrés que l'arc EQ : mais la longueur de AR comparée à celle de EQ, est d'autant moindre que AR est plus voisin du pôle; parceque la longueur des degrés de longitude diminue (392) en proportion du sinus de leur distance au pôle.

842. Pour remédier aux inconvénients et aux difficultés que j'ai exposés, et pour approcher de la vérité dans la construction des cartes géographiques et célestes, on a eu recours à différentes sortes de projections.

La projection la plus simple est celle qu'on nomme *orthographique*. Elle est fondée sur cette loi, que les lignes tirées des divers points de la figure dont on demande la projection, doivent tomber à angle droit sur le plan de projection. Pour avoir, par exemple, la projection orthographique d'une ligne AB sur un plan représenté par la ligne PI, on menera des différents points de AB les lignes BC, FH, &c. perpendiculaires à PI : la partie AC de la ligne PI, comprise entre les perpendiculaires, sera la projection de AB. Quelque distante du plan de projection que soit la ligne AB, les perpendiculaires BE, FG, &c. donneront de même sur un plan NO Fig.87

la projection DE = AC de la ligne AB. Mais DE ou AC = AB cos. A, (211). Donc *la projection orthographique d'une ligne est égale à cette ligne multipliée par le cosinus de son angle d'inclinaison sur le plan de projection.*

843. Si la figure dont on demande la projection est un arc de cercle, et si le plan de l'arc est perpendiculaire au plan de projection, alors le *sinus est la projection orthographique de l'arc*, pourvu que l'origine de cet arc soit le point de la circonférence duquel part celle des perpendiculaires qui passe par le centre. Concevons que
Fig. 88 le demi-cercle DFH soit élevé perpendiculairement sur le plan du papier, le diametre DH restant seul dans ce même plan. Si l'on abaisse, de tous les points de la circonférence, des perpendiculaires FC, IE, &c., la suite des points auxquels elles aboutiront sur le plan du papier, formera le diametre DH. Or si le point C est le centre, l'arc FH sera de 90°, et sa projection CH sera égale au rayon, c'est-à-dire au sinus de 90°. De même CE = LI = sin. FI sera la projection de l'arc FI. Donc, &c.

844. Si le plan du cercle, au lieu d'être perpendiculaire, est incliné au plan de projection; alors les ordonnées FC, IE, &c. qui tombent sur celui des diametres qui est dans le plan de projection, feront toutes avec leurs projections (842) respectives CG, EK, &c., un angle égal à l'inclinaison des deux plans, (387). On aura donc (842), *cos. incl.* $= \frac{CG}{FC} = \frac{EK}{EI}$, &c.; et par conséquent FC : CG :: EI : EK :: &c. Mais une des propriétés de l'ellipse, c'est que ses ordonnées sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes du cercle dont le diametre est égal à son grand axe. Donc DGKH, ou la projection du demi-cercle DFH, est une demi-ellipse. Mais ce qui se démontre pour une moitié se prouveroit de même pour l'autre moitié. *La projection orthographique d'un cercle incliné est donc une ellipse.*

Quelle que soit la distance du cercle au plan de projection, l'effet sera toujours le même. Car on peut toujours concevoir un

autre plan parallele et passant par le centre du cercle, sur lequel plan la projection sera une ellipse, comme nous venons de le voir; or la projection sur ce plan ne peut différer en rien de la projection sur le plan donné : les lignes qui détermineront l'une et l'autre différeront seulement en longueur.

845. Un cercle vu obliquement et de quelque distance paroît donc être une ellipse, parceque les objets inclinés et éloignés se représentent à nos yeux suivant la projection orthographique, c'est-à-dire comme s'ils étoient dans un plan perpendiculaire aux rayons visuels. La ligne BC vue obliquement d'un point O, à une Fig.89. distance telle que l'angle O puisse se considérer comme infiniment petit, paroîtra de la grandeur de AB = BC cos. ABC = BC sin. C. La premiere de ces deux valeurs de AB est celle déjà trouvée (842). La seconde fait voir que la grandeur apparente d'un objet incliné diminue proportionnellement au sinus de l'inclinaison de cet objet au rayon visuel. Si donc on suppose que DGH soit la projection Fig.90. orthographique d'un demi-cercle DFH vu obliquement, toutes les ordonnées CF, EI paroîtront diminuées dans la proportion que nous venons d'indiquer. Ce rapport constant démontre encore que la projection d'un cercle incliné est une ellipse dont le grand axe DH est égal au diametre du cercle, et dont le petit axe est moindre que ce diametre suivant le rapport inverse du sinus total au sinus de l'angle d'inclinaison du cercle sur le rayon visuel.

846. Tels sont les éléments de la projection orthographique, projection peu en usage pour les cartes géographiques, parcequ'elle donne lieu nécessairement à des erreurs très graves, lorsque les cartes ont de l'étendue. La différence d'un petit arc FI à sa pro- Fig.88. jection CE est peu importante, et dès-lors la distance FI de deux villes F, I sur le globe terrestre, peut sans une erreur sensible être représentée sur la carte par la distance CE. Mais plus le point I se rapprocheroit du point H, plus les accroissements de l'arc FI surpasseroient les accroissements correspondants de CE, et les erreurs sur les distances respectives des lieux en deviendroient

d'autant plus considérables. Supposons IH = 60° = 2FI : alors CE ou LI = sin.30° = $\frac{1}{2}$CH. Donc CE = EH ; et par conséquent les distances IH, FI, dont la premiere est double de la seconde sur le globe, seront représentées sur la carte par des lignes égales.

Quelque grave que soit cet inconvénient, les Astronomes se servent utilement de la projection orthographique pour représenter et prédire les circonstances des éclipses, parceque dans ce cas il ne s'agit pas des distances respectives des lieux, mais seulement de décrire sur une carte géographique les courbes et les zones qui comprennent à-peu-près soit les contrées qui seront plongées dans l'ombre, soit les lieux d'où l'on pourra voir ou les mêmes phases, ou des phases différentes entre elles. Les principes de ces opérations astronomiques n'appartiennent point à ce Traité : on les trouvera exposés avec tous les détails, toute la clarté qu'on peut desirer, dans le Livre X de l'Astronomie de M. de la Lande.

847. La projection la plus commode pour les cartes qui embrassent une grande partie du globe, et sur-tout pour les mappemondes, celle qui défigure le moins la forme naturelle des continents, c'est la projection *stéréographique*. Dans la projection orthographique, la surface d'une demi-sphere, par exemple, est représentée sur le plan du grand cercle qui lui sert de base, et auquel tous les rayons visuels sont censés être perpendiculaires, parcequ'on suppose l'œil à une distance infinie de ce plan : dans la projection stéréographique, la même surface est représentée sur le plan du même cercle, mais en supposant l'œil au pôle de ce cercle ; ensorte qu'un seul rayon visuel, celui qui passe par le centre, est perpendiculaire au cercle.

Fig. 91 848. Si BFD représente l'hémisphere dont on veut avoir la projection, le diametre BD représentera le plan de projection, et l'œil sera supposé au point Q également distant des points B et D. La projection de chaque point de l'hémisphere BFD sera sur le point respectif du plan BCD, par lequel passe le rayon visuel partant

partant du point Q et terminé à la surface de l'hémisphere. Par exemple le point S est la projection du point H, le point T celle du point U, la ligne ST celle de l'arc HU, et ainsi de suite. Prenons l'origine des arcs au point F dont la projection est au centre; comme CT = tang. CQT = tang. $\frac{1}{2}$FU, il s'ensuit que *la projection stéréographique d'un arc commençant au point dont la projection est au centre, est égale à la tangente de la moitié de cet arc.*

849. La plus belle propriété de la projection stéréographique est de représenter par des cercles tous les cercles de la sphere, grands ou petits, à l'exception de ceux dans le plan desquels l'œil se trouve (852, 860, &c.). Par exemple, le cercle qui a pour diametre la corde UH, a pour projection un cercle dont ST est le diametre. Pour bien comprendre cette assertion, il faut d'abord considérer que les rayons visuels qui vont du point Q à chaque point du cercle ayant pour diametre la corde UH, forment un cône que coupe le plan BCD de projection. Cela posé, il s'agit de prouver que la section représentée par ST est un cercle.

Or l'angle QST = $\frac{1}{2}$DQ + $\frac{1}{2}$BH = $\frac{1}{2}$BQ + $\frac{1}{2}$BH = $\frac{1}{2}$QH = QUH. On démontreroit de même l'égalité des angles T, H. Donc les triangles QST, QUH sont semblables. Mais QUH est le triangle par l'axe du cône ayant pour base le cercle auquel appartient la droite UH comme diamètre : donc aussi la base du cône dont le triangle par l'axe est QST, doit être circulaire; puisque ces deux cônes sont semblables, ayant leurs dimensions homologues proportionnelles, ou, ce qui revient au même, leurs triangles par l'axe étant semblables entre eux.

850. Si Q est l'un des pôles de la Terre, le plan de projection BCD sera l'équateur. Alors les projections des paralleles sont des cercles concentriques, celles des méridiens sont des lignes droites.

En effet 1°. que l'on prenne FG = FU; la projection du parallele qui passe par les points G, U sera, comme nous venons de le voir (849), un cercle décrit du centre C et d'un rayon CT = CE. De même la projection du parallele qui passe par les points K, H,

Fig. 91 en supposant FK = FH, sera un cercle qui aura CS pour rayon et C pour centre. On voit que le point C, projection du point F, est le centre de tous les cercles qui sont les projections des paralleles de l'équateur.

851. Pour décrire un parallele sur le plan de projection, on prendra donc pour rayon (848) la tangente de la demi-distance du parallele au pôle : ou pour décrire graphiquement les paralleles de degré en degré, ou de cinq en cinq degrés, &c., on divisera le quart de cercle BF en 90 parties, ou en 18 parties, &c. ; par chaque division on menera une droite au point Q, et les intersections de ces lignes sur BD donneront les points T, S, &c., et par conséquent les rayons CT, CS, &c. des projections respectives des paralleles.

852. 2°. J'ai dit (850) que les projections des méridiens sont des lignes droites. En effet puisqu'on suppose l'œil à l'un des pôles, il est dans le plan de tout méridien, le pôle étant un point commun à tous les méridiens. L'œil ne peut donc appercevoir la courbure de ces cercles.

Pour décrire les projections des méridiens, que l'on considere BFDQB comme représentant l'équateur ou le plan de projection. Chacun des diametres de ce cercle dont le centre C est la projection (850) de l'un des pôles, sera la projection de l'un des méridiens.

853. Les méridiens et les paralleles décrits, plus de difficulté pour placer les villes ou les étoiles sur un planisphere terrestre ou céleste, selon leurs longitudes et latitudes respectives.

C'est de cette projection *polaire* que Ptolomée a fait usage pour la construction de son Astrolabe, et Robert de Vaugondy pour certaines cartes de la Russie. Elle est adoptée dans les planispheres célestes plus que dans les planispheres terrestres ; on s'en sert surtout pour les cartes qui renferment la moitié du Ciel.

854. Pour décrire l'écliptique sur ces cartes, imaginons que BQDFB soit le colure des solstices, BCD le plan de projection, F

et Q les deux pôles de l'équateur. Soit BU un arc égal à l'obliquité de l'écliptique : menons le diametre RU ; R, U seront les deux points solstitiaux, et leurs projections sur le plan BCD seront les points T, P. Le diametre de l'écliptique sur le plan de projection est donc PT. Mais $PT = CT + CP = \text{tang.}CQT + \text{tang.}CQP = \text{tang.}\frac{1}{2}FU + \text{tang.}\frac{1}{2}FR = \text{tang.}\frac{1}{2}FU + \text{cot.}\frac{1}{2}FU = \frac{2}{\text{sin.}FU}$, (I. 9°). Donc $\frac{1}{2}PT = \text{coséc.}FU = \text{séc.}BU$. Et par conséquent *pour décrire l'écliptique sur le plan de projection, on doit prendre pour rayon la sécante de l'obliquité de l'écliptique.*

Soit maintenant BFDQB l'équateur ou le plan de projection, et soient Q, F les points marqués 0° et 180°, c'est-à-dire ceux où l'écliptique doit couper l'équateur. Si on prend pour centre chacun de ces points successivement, et pour rayon la sécante de l'obliquité, il sera facile de trouver le point *m*, qui est le centre de l'écliptique qu'il s'agit de décrire.

855. On raisonnera de la même maniere, lorsqu'on voudra tracer sur un planisphere céleste la projection de l'horizon d'un lieu quelconque. Soient par exemple RU le diametre de cet horizon, Q et F les pôles de l'équateur : QR ou FU sera la hauteur du pôle ou la latitude du lieu dont il s'agit. Le rayon du cercle destiné à représenter l'horizon sera donc la cosécante de la latitude. Ce cercle se fait ordinairement en carton, et sert à déterminer sur les planispheres mobiles le lever et le coucher des astres.

856. La projection polaire, dont nous venons de donner une idée, est de toutes la plus facile. Mais la plus usitée, sur-tout pour les mappemondes, est celle qui suppose l'œil dans l'équateur, au point de 270° si l'on veut décrire notre hémisphere, et au point de 90° s'il est question de décrire l'hémisphere opposé.

857. Dans cette projection, que je nommerai *équatoriale*, les méridiens sont des cercles ainsi que les paralleles, et leurs rayons sur le plan de projection se déterminent comme il suit.

Soit BFDQB l'équateur, D le point duquel on commence à

Fig. 91 compter les longitudes, Q le point de 90° où l'on suppose l'œil placé, et UR le diametre d'un méridien dont on cherche la projection sur le plan représenté par la ligne BD, qui dans ce cas est le plan du premier méridien. Nous avons vu (854) que le cercle qui a pour diametre UR, a pour projection un cercle qui a pour rayon $\frac{1}{2}$PT = coséc.FU. Mais FU = QR = 90° — DR, et DR est la longitude du méridien dont il s'agit. Donc *dans la projection équatoriale, le rayon d'un méridien est égal à la sécante de la longitude de ce méridien.*

Tout méridien passant par les pôles, il sera toujours facile de trouver sur la carte, de la maniere indiquée (854), le centre d'un méridien quelconque.

858. Pour trouver la projection des paralleles; soit représenté par la ligne QF le plan de l'équateur, l'œil étant toujours supposé au point Q, à 90° de longitude. Le plan de projection BCD sera encore le premier méridien; mais dans la supposition actuelle, B, D seront les pôles de la Terre. Les diametres des paralleles seront des lignes telles que GR, perpendiculaires à BD. Or, en supposant toujours l'œil au point Q, la projection stéréographique de GR est PE = CP — CE = tang.$\frac{1}{2}$FR — tang.$\frac{1}{2}$FG. Mais FR = 180° — QR = 180° — FG, et FG est la latitude du parallele dont GR est le diametre. Donc PE = cot.$\frac{1}{2}$*lat.* — tang.$\frac{1}{2}$*lat.* = 2 cot.*lat.*, (I. 38°). Ainsi, *dans la projection équatoriale, le rayon d'un parallele est égal à la cotangente de la latitude de ce parallele.*

Cette regle jointe à la précédente (857) dispense les Géographes de tout calcul. L'une et l'autre sont plus simples que celles qu'on a données jusqu'à présent.

Il y a toujours sur la circonférence du premier méridien ou du plan de projection, deux points par lesquels passe un parallele quelconque : de sorte que connoissant le rayon d'un parallele, il sera toujours facile d'en déterminer le centre sur le plan de projection.

859. Si on veut tracer sur une mappemonde la projection d'un horizon; soit Z le zénith ou le pôle de cet horizon, UR le diametre du même cercle, Q le point de 90° sur l'équateur, ou le pôle du premier méridien BCD; on aura ZR = 90° = DQ, et par conséquent QZ = DR. Mais QZ est (391) l'inclinaison de l'horizon sur le plan de projection BCD. Donc (857) la sécante de cette inclinaison est le rayon du même horizon projetté. Pour connoître cette inclinaison; soit P le pôle, PH son élévation sur l'horizon proposé MH, PM le premier méridien, et par conséquent l'angle P la longitude du lieu dont on veut projetter l'horizon; l'angle M sera l'inclinaison cherchée. Or dans le triangle PMH rectangle en H, on a (VI. 12°), cos.M = sin.P cos.PH, ou cos.*incl.* = sin.*long.* cos.*lat.* = $\frac{1}{2}$sin.(*long.* + *lat.*) + $\frac{1}{2}$sin.(*long.* — *lat.*), (II. 14°). Fig. 92

860. Pour faire voir combien les regles précédentes sont commodes dans les applications; soit AFR le premier méridien vu du point marqué 270° sur la circonférence de l'équateur, et TCN ce même premier méridien vu du point diamétralement opposé, c'est-à-dire du point marqué 90° sur la circonférence de l'équateur: et soit proposé de tracer et de représenter les deux hémispheres sur les cercles AFR, TCN. Que par le point de contact de ces deux cercles, on mene la droite *mn* formée de leurs diametres; que l'on conçoive que cette ligne soit la projection de l'équateur, laquelle doit être une ligne droite, puisque l'œil ne peut voir la courbure de ce cercle dans le plan duquel nous le supposons placé. Menons ensuite les deux diametres AR, TN, perpendiculaires à *mn*; ils seront les projections des méridiens de 90° et de 270°, et leurs extrémités seront les pôles de la Terre. Si A est le pôle arctique, T sera le même pôle. Le pôle antarctique sera au point R ou N. Fig. 93

861. Cela posé; pour placer convenablement les différents pays sur la mappemonde, il faut tracer les cercles de longitude et de latitude. Veut-on, par exemple, décrire le méridien de 50°? le rayon de ce cercle est (857) la sécante de 50°, qui dans les tables

Fig. 93 est de 1,5557 : je suppose que le diametre AR de la projection soit de 400 parties sur une échelle de parties égales ; on multipliera (25) par 200 les lignes trigonométriques prises dans les tables, et on aura séc. 50° = 311 $\frac{1}{7}$ environ. Cette distance prise sur l'échelle et portée de l'un des pôles sur l'équateur, donnera le point *r*, qui doit servir de centre pour décrire du rayon 311 $\frac{1}{7}$ le cercle de projection du méridien de 50°. Dans la figure, ADR est la projection de la moitié de ce méridien. Les tables donneront de la même maniere le rayon de tout autre méridien ; et on n'aura aucun calcul à faire si on prend pour rayon de la projection une ligne qui sur l'échelle des parties égales soit exprimée par un nombre tel qu'il soit une puissance de 10.

862. Pour décrire les cercles de latitude, si on veut les avoir par exemple de dix en dix degrés, on divisera en 18 parties égales chaque demi-cercle terminé par les diametres AR, TN. Je suppose l'arc CN = BN = 30°, c'est-à-dire égal à trois de ces parties ; le parallele qui passera par les points B, C sera le parallele de 60° de latitude. Le rayon de ce parallele sur le plan de projection est (858) la cotangente de 60°, laquelle prise dans les tables et multipliée par 200 (en supposant toujours de 400 parties le diametre AR de la projection), donne 115 $\frac{1}{2}$. Cette ouverture de compas prise sur l'échelle, et portée de l'un des points B ou C sur le diametre TN prolongé, donnera le centre du parallele BPC de 60° de latitude qu'il s'agissoit de décrire.

On décrira de même les projections des autres paralleles.

863. Nous avons vu comment on peut tracer les mappemondes : actuellement soit proposé de marquer sur ces cartes l'horizon de l'hémisphere éclairé par le soleil à un moment donné, par exemple au moment où Vénus sortit de dessus le disque du soleil lors de son passage sur cet astre en 1769. Le soleil étoit alors dans le plan du méridien de 174° et avoit 22° 36′ de déclinaison boréale : il s'ensuit (859) que l'inclinaison de l'horizon demandé sur le plan de projection est de 84° 28′ ; la sécante de 84° 28′ est donc le rayon du

cercle projetté. De plus on voit par les données que ce même cercle doit couper l'équateur aux points de 84° et de 264°, et le méridien de 174° à 67° 24′ de latitude australe. On déterminera les points de 84° et de 264° par la méthode (861), qu'il suffira même d'employer pour trouver seulement l'un *s* de ces points, puisque l'autre S sera à la même distance du centre de projection, mais dans l'autre hémisphere. On décrira aussi le méridien de 174° et le parallele (862) de 67° 24′, et on aura le point *e* d'intersection. Ayant ce point, le point *s* de 84° sur l'équateur, et la sécante de 84° 28′ pour rayon, on trouvera le point qui doit servir de centre pour décrire l'arc F*s*G qui représente la moitié de l'horizon cherché. On décrira l'arc ISH qui représente l'autre moitié, en prenant NH, TI égaux à GR, AF, et se servant du rayon qu'on aura employé pour décrire F*s*G.

D'après ces constructions, on voit qu'en supposant le soleil au point K du méridien de 174°, à 22° 36′ de distance boréale de l'équateur, l'hémisphere éclairé est FAG + ITH.

864. Nous avons traité de la projection stéréographique polaire et équatoriale des méridiens, des paralleles et des horizons. Pour avoir la projection stéréographique d'un petit cercle qui ne seroit ni parallele ni perpendiculaire au plan de projection, comme on a déjà vu (849) que le petit cercle dont le diamètre est par exemple la corde UH, a pour projection le cercle dont ST est le diametre, Fig. 91
il ne nous reste qu'à déterminer la valeur de ce diametre ST. Or ST = CS — CT = tang.$\frac{1}{2}$FH — tang.$\frac{1}{2}$FU. Pour déterminer la projection du diametre d'un petit cercle oblique au plan de projection, il faut donc connoître la plus grande distance FH et la plus petite distance FU de ce cercle au point F qui correspond au centre de la projection.

Et si le point F est entre les points H, U, il est évident qu'alors on a ST = tang.$\frac{1}{2}$FH + tang.$\frac{1}{2}$FU.

865. Pour décrire les cercles qui passent sur tous les points de

la Terre, desquels on peut voir l'entrée ou la sortie de Vénus lors de son passage sur le disque solaire ; M. de la Lande a donné, Liv. XI de son Astronomie, des méthodes fort simples, et il a réuni et exposé très clairement dans ce même Livre tous les principes nécessaires pour le calcul ou pour la représentation graphique de toutes les circonstances d'un passage.

Comme l'objet de ce Traité n'est pas de former un Astronome ou un Géographe, je me contenterai d'avoir donné quelques notions des deux sortes de projections qui sont les plus connues, dans la seconde desquelles l'application de mes formules peut contribuer à abréger le travail.

866. J'avois dessein de faire voir aussi comment on applique la Trigonométrie à la Gnomonique. Mais tous les problêmes de la Gnomonique peuvent se réduire et ont été réduits en effet par divers Auteurs à la résolution des triangles rectilignes rectangles. Il suffit donc, pour résoudre ces problêmes, d'employer les formules que j'ai données, et il n'en est aucun qui m'ait paru mériter ou exiger la recherche d'une solution particuliere.

APPENDICE.

CE Traité étoit à demi imprimé lorsque M. l'Abbé de Lambre a bien voulu s'unir à moi pour en suivre la révision. J'ai profité plus d'une fois de ses conseils pendant le cours de l'impression : mais n'ayant pu faire entrer dans le corps de l'Ouvrage quelques-unes de ses regles et formules, plus simples et plus commodes que les miennes, j'ai cru devoir y suppléer ici. Je donnerai en même temps quelques éclaircissements, ainsi que les corrections des erreurs qu'un examen scrupuleux a fait découvrir depuis l'impression.

Art. 4,

Art. 4, lig. 5 ; l'autre *lisez* le

Art. 6, lig. 7, et art. 25, ligne 2 ; quelque *lisez* quelle que

Art. 8. C'est dans cet article qu'il eût été à propos d'expliquer le signe δ que j'ai adopté pour désigner la *différentielle* ou finie ou infiniment petite, d'une quantité variable. Mais c'est dans le cours de l'impression que ce signe a été imaginé par M. Didot l'aîné. Toujours animé du zele qui le distingue, il a fait graver plusieurs caracteres nouveaux, pour que les signes algébriques fussent clairement indiqués.

Art. 27, lig. 2 ; et *lisez* ni

Page 10, lig. 3 ; $\frac{\sqrt{(RR - \cos.^2 A)}}{R \times \cos.A}$ *lisez* $\frac{R\sqrt{(RR - \cos.^2 A)}}{\cos.A}$

Art. 35, lig. 2. J'ajouterai pour les Commençants que quelques Auteurs prolongent le rayon de l'autre côté du centre, et qu'alors ils prennent la tangente de l'angle obtus dans la direction opposée à celle de la tangente de l'angle aigu. Par exemple, si TU est la tangente d'un angle aigu TCU, TZ sera la tangente de l'angle obtus TCM, en supposant que MCZ soit une ligne droite. Mais puisque, suivant la définition ordinaire (7), TZ est la tangente qui appartient à l'arc TS, il me semble qu'à la rigueur un arc $> 90°$ n'a point de lignes trigonométriques qui lui soient propres, et que s'il faut dès-lors qu'il les emprunte d'un autre arc, il vaut autant recourir à celui qu'indique le sinus. Au reste, pourvu qu'on parvienne à établir des regles exactes relativement aux signes, peu importe que l'on choisisse l'une ou l'autre méthode. Fig. 1.

Art. 43, ligne 2 ; $\frac{1}{2}$ *lisez* $\frac{1}{4}$

Art. 115, lig. 4 ; $\cos.120° = \cos.60°$ *lisez* $\cos.120° = -\cos.60°$

En effet $\cos.120° = \cos.(180° - 60°) = (54) \cos.180° \cos.60° + \sin.180° \sin.60° = (42) -1 \times \cos.60° + 0 \times \sin.60° = -\cos.60°$.

Pag. 35, lig. 18 ; tels *lisez* tel

lig. avant-derniere ; respectivement *lisez* relativement

Pag. 39, lig. 14; et pag. 41, lig. 17 et lig. derniere; infiniments *lisez* infiniment

Pag. 44, lig. 3.... 12. Ces préceptes se rapportent seulement aux opérations analytiques dans lesquelles les arcs se supposent toujours moindres que de 90°. On trouve plusieurs exemples de ces opérations aux articles 687, 692, 693, &c.

Art. 151, lig. 10; produit pour chaque facteur *lisez* produit, par chaque facteur,

Pag. 60, lig. 18; ces coëfficients *lisez* les valeurs des quantités

Pag. 71, lig. 24; $\frac{1}{300}$ *lisez* $\frac{3}{100}$

Art. 181 et 182. On observera que ces produits étant formés des valeurs de M et de $\frac{1}{M}$ prises avec 25 décimales seulement, on ne peut être sûr de l'exactitude du dernier chiffre, ni même quelquefois de l'avant-dernier.

Pag. 94, lig. 25; qu'on a ensuite *lisez* qu'on a ensuite avec 14 décimales

Pag. 95, lig. 22; racine *lisez* racine 5e

Pag. 96, lig. 3; $\frac{2b}{(m^2-m)\,a^{-2}}$ *lisez* $\frac{2b}{(m^2-m)\,a^{m-2}}$

Art. 253, lig. 3; (sin.C $\mp$ δC) *lisez* sin.(C $\mp$ δC)

Art. 255, lig. 8 et 15; (IV. 77°) *lisez* (III. 77°)

Pag. 134, lig. 1; influée *lisez* influé

Pag. 172; lig. 3; celui *lisez* ceux

Pag. 173, lig. 3. De cette formule on parvient aisément, en procédant comme je l'ai fait (463), à la suivante qui est plus commode pour le calcul; elle m'a été suggérée par M. de Lambre:

$$\sin.\tfrac{1}{2}\mathrm{AEP} = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(\mathrm{ARP}+\mathrm{RAE}-\mathrm{RPE})\,\sin.\frac{1}{2}(\mathrm{ARP}+\mathrm{RPE}-\mathrm{RAE})}{\cos.\mathrm{RAE}\,\cos.\mathrm{RPE}}}.$$

Fig. 35 Pag. 174, lig. 23; M. de Lambre trouve l'angle cherché EA*e* par une seule formule qu'il démontre fort simplement au moyen de la Trigonométrie sphérique. Comme nous ne devons faire usage dans cet article que de la Trigonométrie rectiligne, nous parviendrons comme il suit à la même formule.

Si du point r on suppose une perpendiculaire abaissée sur RE, elle sera parallele et égale à Ee, et on aura $Rr^2 = Ee^2 + (RE - re)^2 = Ee^2 + RE^2 + re^2 - 2RE \times re = Ee^2 + AR^2 - AE^2 + Ar^2 - Ae^2 - 2Re \times re$. Donc $AE^2 + Ae^2 - Ee^2 = AR^2 + Ar^2 - Rr^2 - 2RE \times re$; et par conséquent (232), $2AE \times Ae \times \cos.EAe = 2AR \times Ar \times \cos.RAr - 2RE \times re$, ou $\cos.EAe = \frac{AR \times Ar \times \cos RAr - RE \times re}{AE \times Ae} = \frac{\cos RAr - \sin.RAE \sin.rAe}{\cos.RAE \cos.rAe}$. J'applique à cette valeur de $\cos.EAe$ la méthode (463) qui me conduit à la formule de M. l'Abbé de Lambre,

$$\sin.\tfrac{1}{2}EAe = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(RAr + RAE - rAe)\sin.\frac{1}{2}(RAr + rAe - RAE)}{\cos.RAE \cos.rAe}}.$$

Art. 342. M. l'Abbé de Lambre résout ce problême de la maniere suivante, qui est plus courte et plus commode pour le calcul que ma solution.

$AD = \frac{AC \times \sin.ACD}{\sin.n} = \frac{AB \times \sin.ABD}{\sin.m}$. Donc $\sin.ABD : \sin.ACD$ Fig. 41 $:: AC \sin.m : AB \sin.n$, et par conséquent (II. 12*), $\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD + ACD)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)} = \frac{AC \times \sin.m + AB \times \sin.n}{AC \times \sin.m - AB \times \sin.n}$; puis en employant la méthode (209),

$$\text{tang.}a = \frac{AB \times \sin.n}{AC \times \sin.m}, \text{ et}$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(ABD - ACD) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(ABD + ACD)\cot.(45° + a).$$

La somme ABD + ACD est une quantité connue, puisque le quadrilatere ABDC donne ABD + ACD = 360° — BAC — BDC. On a donc, au moyen des deux formules ci-dessus, la valeur absolue de ABD et celle de ACD, et ces valeurs connues, la détermination des distances cherchées ne souffre plus de difficulté.

Lorsque le résultat donnera $\text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)$ négative, on écrira $+ \text{tang.}\frac{1}{2}(ACD - ABD)$ au lieu de $- \text{tang.}\frac{1}{2}(ABD - ACD)$, (154).

Art. 358, lig. 3. Je comprends, avec d'autres Auteurs, sous le nom général de *cas irréductible*, toutes les équations du troisieme degré qui ont trois racines réelles. Il étoit inutile, pour le but que je me propose, d'entrer dans les distinctions de l'analyse sur la définition précise de ce cas; d'autant plus qu'il est indifférent à la Trigonométrie que les racines soient commensurables ou incommensurables; elle les trouve toujours avec une égale facilité.

Art. 361, lig. 10; $x = -\sin.(180° + A)$ *lisez* $x = \sin.(180° + A)$

lig. 13; *lisez* $x = \sin.(300° + A) = \sin.(360° - 60° - A)$
$= -\sin.(60° - A)$

Et à la fin de cet article *ajoutez*: mA étant un multiple de A, et c la circonférence du cercle, les racines des équations (125) sont $\sin.A$, $\sin.\left(\frac{c}{m} + A\right)$, $\sin.\left(\frac{2c}{m} + A\right)$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à la derniere racine, qui est toujours $\sin.\left(\frac{(m-1)c}{m} + A\right)$.

Si dans ces expressions on substitue *cos.* à *sin.*, on aura les racines des équations qui donnent les valeurs des cosinus des arcs multiples.

Pag. 208, lig. 24 et 25; 60 *lisez* 60°

Pag. 224, lig. 3; *ajoutez*: En prenant la somme, on a une seconde valeur de A, laquelle satisfait à l'équation (F) qui est réellement du second degré, comme on le verra en substituant par exemple $\sqrt{(1 - \sin.^2 A)}$ au lieu de cos.A., puis résolvant l'équation selon les méthodes ordinaires, pour en tirer la valeur analytique de sin.A.

Art. 385, lig. 5; du *lisez* de

Pag. 246, lig. 7; que deux *lisez* qu'une seule.

lig. 9; puissent *lisez* puisse

Pag. 250, lig. 2; art. *lisez* n°.

Art. 463, lig. 10; (398). *lisez* (398): pourvu que l'arc cherché ne soit pas composé de la somme de deux arcs; car alors il peut être quelquefois plus grand que de 90°.

Art. 465, lig. 8 ; *par des voies plus laborieuses.* La méthode que j'ai suivie pour démontrer les analogies de Neper, est celle que M. Mauduit a employée (*Astronomie sphérique*).

Pag. 263, lig. 19 ; en dehors. *Ajoutez* : Voyez cependant une exception (497).

Art. 488, lig. 12. Au lieu de cette regle M. l'Abbé de Lambre a trouvé la suivante qui a cet avantage, que même avant qu'on ait calculé la valeur de l'angle cherché, elle fait connoître l'espece de cet angle toutes les fois que l'incertitude peut être levée : cela est utile sur-tout dans les problêmes (489, 490).

Un angle est de la même espece que le côté opposé, toutes les fois que l'un des côtés adjacents a une valeur ou intermédiaire entre la valeur du côté opposé et la valeur du supplément du côté opposé, ou égale à l'une de ces deux valeurs.

Par exemple soit AC $=$ 50°, et par conséquent 180° $-$ AC $=$ 130°. Si la valeur de AB n'est ni $<$ 50° ni $>$ 130°, l'angle C sera de la même espece que AB. Fig. 53

Cette regle peut se démontrer comme il suit. Puisque (VII. 11°), $\cos.C = \frac{\cos.AB - \cos.BC \cos.AC}{\sin.BC \sin.AC}$; il est clair que C sera de la même espece que AB, toutes les fois qu'on aura cos.AB $>$ cos.BC cos.AC. Or cela a lieu toutes les fois qu'on a AC $=$ AB, ou AC $=$ 180° $-$ AB, ou que la valeur de AC est entre celles de AB et de 180° $-$ AB : car dans tous ces cas cos.AB égale ou surpasse cos.AC, et l'on a alors cos.AB $>$ cos.BC cos.AC.

Je regrette de ne pouvoir insérer ici la démonstration synthétique de M. l'Abbé de Lambre, laquelle exigeroit une figure particuliere. De cette démonstration il suit 1°. que sa regle embrasse tous les cas dans lesquels on peut faire évanouir l'incertitude ; 2°. que la regle que j'ai donnée comprend de même tous ces cas.

Même article, ligne derniere ; des *lisez* de ces

Art. 492, lig. 6. M. l'Abbé de Lambre substitue encore ici la

regle suivante, laquelle est utile sur-tout dans les problêmes (493, 494).

Un côté est de la même espece que l'angle opposé, toutes les fois que l'un des angles adjacents a une valeur ou intermédiaire entre la valeur de l'angle opposé et la valeur du supplément de l'angle opposé, ou égale à l'une de ces deux valeurs.

Il est facile de déduire cette regle et sa démonstration de l'équation (VII. 29'), de la même maniere que nous l'avons fait tout-à-l'heure pour la regle relative à l'art. 488.

Même art., lig. derniere; des *lisez* de ces

Pag. 279, lig. 6; (489 à 494) *lisez* (489, 494)

Pag. 286, lig. 2; *supprimez la seconde virgule*

lig. 6; On a donc *lisez* Or on a

Pag. 298, lig. 2; adjacent AB *lisez* AB adjacent à l'angle donné

Art. 536, lig. 5; dixiemes *lisez* décimales

Pag. 308, lig. 1; au triangle *lisez* aux parties du triangle

Art. 632, lig. 2; — ∂BC — ∂A *lisez* — ∂BC : — ∂A

Art. 709, lig. 5; correspond *lisez* correspondant d'ailleurs

lig. 6 et 7; angle : de sorte que si *lisez* angle, si

Pag. 355, lig. 10; ∂B *lisez* B

Art. 762, lig. 3; (757 *lisez* (757)

Art. 771. Les deux équations de cet article donnent la valeur de $z \backsim u$ en parties de $R = 1$, telles que dans la table (AA). Si on veut la valeur de $z \backsim u$ en secondes, on multipliera par R'' chacun des coëfficients de sin.u, sin.$2u$, &c., et de sin.z, sin.$2z$, &c.

Pag. 396, lig. 14. M. l'Abbé de Lambre m'a fait observer que pour les étoiles circompolaires, comme la valeur de tang.*décl.* change rapidement et très inégalement, l'emploi de la déclinaison intermédiaire ne suffit pas pour donner très exactement la valeur de la précession en ascension droite, quand il s'agit d'un intervalle de plusieurs années. On pourroit y remédier en partageant l'intervalle en des intervalles moindres, et multipliant

les calculs. Mais au surplus je propose la formule suivante, qui est rigoureuse, et que je déduis de la premiere analogie (638) en changeant les lettres et en substituant les dénominations qu'elles désignent, ainsi que je l'ai fait (784).

$$\text{in.}\textit{préc.ascension droite} = 2\sin.\tfrac{1}{2}\textit{précession longitude} \times \frac{\cos.(\textit{asc.dr.} + \textit{préc.asc.dr.})}{\cos.(\textit{long.} + \textit{préc.long.})} \times$$

$$\cos.\textit{obl.}\cos.\textit{long.} + \tfrac{1}{2}\textit{préc.long.}\cos.\textit{asc.dr.} + \sin.\textit{long.} + \tfrac{1}{2}\textit{préc.long.}\sin.\textit{asc.dr.})$$

Au lieu de $\frac{\cos.(\textit{asc.dr.} + \textit{préc.asc.dr.})}{\cos.(\textit{long.} + \textit{préc.long.})}$, on peut substituer, si on le préfere, $\frac{\cos \textit{lat.}}{\cos.(\textit{décl.} + \textit{préc.décl.})}$.

Art. 788, *à la fin, ajoutez :* On peut employer au même usage une table de réduction de l'écliptique à l'équateur, telle que la table XVIII de M. de la Lande (*Astronomie*, Tom. I), pourvu qu'on prenne pour argument l'ascension droite de l'étoile, augmentée de 90°.

Art. 800, lig. 1; explications *ajoutez* (796)

Art. 806. M. l'Abbé de Lambre a composé douze formules nouvelles pour trouver la distance vraie entre deux astres, dont on aura observé la distance apparente. Je choisis une de ces formules, laquelle peut se déduire de celle de M. le Chevalier de Borda, et qui peut être préférée comme plus expéditive pour le calcul, quoiqu'elle exige la recherche de deux cosinus dans les tables trigonométriques en nombres naturels.

Soit D la distance apparente de deux astres, x leur distance vraie, A la hauteur apparente de l'un, a sa hauteur vraie, B la hauteur apparente de l'autre, b sa hauteur vraie. La formule de M. le Chevalier de Borda est celle-ci :

$$\sin.\tfrac{1}{2}x = \sqrt{\left(\cos.^2\tfrac{1}{2}\overline{a+b} - \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+D)\cos.\frac{1}{2}(A+B\curvearrowright D)\cos.a\cos.b}{\cos.A\ \cos.B}\right)},$$

et cette formule se calcule par les seules tables trigonométriques en logarithmes, en suivant la méthode (208).

Or si l'on exprime cette formule comme il suit : $\sin.^2\frac{1}{2}x =$

$\cos.^2\frac{1}{2}(a+b) = m$; on aura (L. 7°, 24°), $\frac{1-\cos.x}{2} = \frac{1+\cos.(a+b)}{2} - \frac{2m}{2}$, puis réduisant et transposant, $\cos.x = 2m - \cos.(a+b)$. Restituons dans cette équation la valeur de m, et nous aurons la formule de M. l'Abbé de Lambre :

$$\cos.x = \frac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+D)\cos.\frac{1}{2}(A+B\frown D)\cos.a\cos.b}{\cos.A\cos.B} - \cos.(a+b).$$

Art. 819, lig. 23; lal une *lisez* la lune

Pag. 450, lig. 7; tang.$\frac{1}{2}$(PCE + $\frac{1}{2}$ PCE) *lisez* tang.(PCE + $\frac{1}{2}$ PCE)

Art. 859, *à la fin, ajoutez :* On voit qu'en général *dans la projection stéréographique de la sphere, tout grand cercle a pour rayon de projection la sécante de son inclinaison sur le plan de projection.*

Art. 863; M. l'Abbé de Lambre a observé qu'on peut se dispenser de décrire les méridiens et le parallele dont je fais usage dans ma
Fig. 93 construction. Les points F, G étant à égale distance des pôles, il suffit de trouver cette distance; ces deux points connus et le
Fig. 92 rayon, on aura le centre du cercle à décrire. Or le triangle PMH, rectangle en H (859), donne (VI. 10°), cot.PM = cos.P cot.PH = cos.*long.* cot.*lat.*, et PM est précisément la distance cherchée.

Table I, *formule* 42e; $\sqrt{\frac{1+\cos.2A}{1-\cos.2A}}$ *lisez* $\sqrt{\frac{1-\cos.2A}{1+\cos.2A}}$.

TABLE (AA).

Valeur des arcs de cercle en parties du rayon, en supposant le rayon égal à l'unité. Voyez (146).

1° =	0,	017453	292519	943295	76923690	8	45° =	0,	785398	163397	448309	61566084	6
2	0,	034906	585039	886591	53847381	5	46	0,	802851	455917	391605	38489775	4
3	0,	052359	877559	829887	30771072	3	47	0,	820304	748437	334901	15413466	1
4	0,	069813	170079	773183	07694763	1	48	0,	837758	040957	278196	92337156	9
5	0,	087266	462599	716478	84618453	8	49	0,	855211	333477	221492	69260847	7
6	0,	104719	755119	659774	61542144	6	50	0,	872664	625997	164788	46184538	4
7	0,	122173	047639	603070	38465835	4	51	0,	890117	918517	108084	23108229	2
8	0,	139626	340159	546366	15389526	1	52	0,	907571	211037	051380	00031920	0
9	0,	157079	632679	489661	92313216	9	53	0,	925024	503556	994675	76955610	7
10	0,	174532	925199	432957	69236907	7	54	0,	942477	796076	937971	53879301	5
11	0,	191986	217719	376253	46160598	5	55	0,	959931	088596	881267	30802992	3
12	0,	209439	510239	319549	23084289	2	56	0,	977384	381116	824563	07726683	0
13	0,	226892	802759	262845	00007980	0	57	0,	994837	673636	767858	84650373	8
14	0,	244346	095279	206140	76931670	8	58	1,	012290	966156	711154	61574064	6
15	0,	261799	387799	149436	53855361	5	59	1,	029744	258676	654450	38497755	3
16	0,	279252	680319	092732	30779052	3	60	1,	047197	551196	597746	15421446	1
17	0,	296705	972839	036028	07702743	1	61	1,	064650	843716	541041	92345136	9
18	0,	314159	265358	979323	84626433	8	62	1,	082104	136236	484337	69268827	6
19	0,	331612	557878	922619	61550124	6	63	1,	099557	428756	427633	46192518	4
20	0,	349065	850398	865915	38473815	4	64	1,	117010	721276	370929	23116209	2
21	0,	366519	142918	809211	15397506	1	65	1,	134464	013796	314225	00039900	0
22	0,	383972	435438	752506	92321196	9	66	1,	151917	306316	257520	76963590	7
23	0,	401425	727958	695802	69244887	7	67	1,	169370	598836	200816	53887281	5
24	0,	418879	020478	639098	46168578	4	68	1,	186823	891356	144112	30810972	3
25	0,	436332	312998	582394	23092269	2	69	1,	204277	183876	087408	07734663	0
26	0,	453785	605518	525690	00015960	0	70	1,	221730	476396	030703	84658353	8
27	0,	471238	898038	468985	76939650	7	71	1,	239183	768915	973999	61582044	6
28	0,	488692	190558	412281	53863341	5	72	1,	256637	061435	917295	38505735	3
29	0,	506145	483078	355577	30787032	3	73	1,	274090	353955	860591	15420426	1
30	0,	523598	775598	298873	07710723	1	74	1,	291543	646475	803886	92353116	9
31	0,	541052	068118	242168	84634413	8	75	1,	308996	938995	747182	69276807	6
32	0,	558505	360638	185464	61558104	6	76	1,	326450	231515	690478	46200498	4
33	0,	575958	653158	128760	38481795	4	77	1,	343903	524035	633774	23124189	2
34	0,	593411	945678	072056	15405486	1	78	1,	361356	816555	577070	00047879	9
35	0,	610865	238198	015351	92329176	9	79	1,	378810	109075	520365	76971570	7
36	0,	628318	530717	958647	69252867	7	80	1,	396263	401595	463661	53895261	5
37	0,	645771	823237	901943	46176558	4	81	1,	413716	694115	406957	30818952	2
38	0,	663225	115757	845239	23100249	2	82	1,	431169	986635	350253	07742643	0
39	0,	680678	408277	788535	00023940	0	83	1,	448623	279155	293548	84666333	8
40	0,	698131	700797	731830	76947630	7	84	1,	466076	571675	236844	61590024	6
41	0,	715584	993317	675126	53871321	5	85	1,	483529	864195	180140	38513715	3
42	0,	733038	285837	618422	30795012	3	86	1,	500983	156715	123436	15437406	1
43	0,	750491	578357	561718	07718703	0	87	1,	518436	449235	066731	92361096	9
44	0,	767944	870877	505013	84642393	8	88	1,	535889	741755	010027	69284787	6

89° =	1,553343	034274	953383	462084784	99° =	1,727875	959474	386281	154453861
90	1,570796	326794	896619	231321692	100	1,745329	251994	329576	923690769
91	1,588249	619314	839915	000558599	120	2,094395	102393	195492	308428922
92	1,605702	911834	783210	769795507	150	2,617993	877991	494365	385536153
93	1,623156	204354	726506	539032415	180	3,141592	653589	793238	462643383
94	1,640609	496874	669802	308269322	210	3,665191	429188	092111	539750614
95	1,658062	789394	613098	077506230	240	4,188790	204786	390984	616857844
96	1,675516	081914	556393	846743138	270	4,712388	980384	689857	693965075
97	1,692969	374434	499689	615980045	330	5,759586	531581	287603	848179536
98	1,710422	666954	442985	385216953	360	6,283185	307179	586476	925286767

1′ =	0,000290	888208	665721	596153948	1″ =	0,000004	848136	811095	359935899
2	0,000581	776417	331443	192307897	2	0,000009	696273	622190	719871798
3	0,000872	664625	997164	788461845	3	0,000014	544410	433286	079807697
4	0,001163	552834	662886	384615794	4	0,000019	392547	244381	439743597
5	0,001454	441043	328607	980769742	5	0,000024	240684	055476	799679496
6	0,001745	329251	994329	576923691	6	0,000029	088820	866572	159615395
7	0,002036	217460	660051	173077639	7	0,000033	936957	677667	519551294
8	0,002327	105669	325772	769231588	8	0,000038	785094	488762	879487193
9	0,002617	993877	991494	365385536	9	0,000043	633231	299858	239423092
10	0,002908	882086	657215	961539485	10	0,000048	481368	110953	599358991
20	0,005817	764173	314431	923078969	20	0,000096	962736	221907	198717983
30	0,008726	646259	971647	884618454	30	0,000145	444104	332860	798076974
40	0,011635	528346	628863	846157938	40	0,000193	925472	443814	397435966
50	0,014544	410433	286079	807697423	50	0,000242	406840	554767	996794957
60	0,017453	292519	943295	769236908	60	0,000290	888208	665721	596153948

Additions à l'Errata des Tables de Logarithmes imprimées en 1 vol. in-12 par Desaint, 1768. Voy. (168).

Comme les pages des Tables dont on donne ici l'Errata ne sont point numérotées, on y a suppléé, pour la Table des Logarithmes des sinus, tangentes, &c., en indiquant les degrés et minutes du sinus qui commence la page où se trouve la faute observée.

Les pages de la Table des Logarithmes des nombres sont de même désignées par le nombre qui les commence.

Errata de la Table des Logarithmes des sinus, tangentes, etc.

1re sinus de la page.		Colonne.	Fautes.	Corrections.
Sin. 5°	30′	6 . . .	*Tang.* 4 . . .	*Tang.* 84
9	0	4	9.299713 . . .	9.199713
10	30	4	6.283907 . . .	9.283907
		7	9.691971 . . .	9.991971
11	30	4	9.326753 . . .	9.326853
17	30	6	0.487765 . . .	0.497765
20	30	5	0.642 . . .	0.641

1er sinus de la page.	Colonne.	Fautes.	Corrections.
*sin.*23° 30′	2me.	9.906179	9.606179
29 30	2	9.964342	9.694342
30 0		IV. X. 20	IV. X. 0
30 30	6	*Cotang.* 10	*Cotang.* 30
31 30		VI. X. 1.	IV. X. 1
33 0	3, 4e case.	0.323	0.322
33 30		VI. X. 26	IV. X. 26
39 0	7	sin.51	sin.50
42 0	4	9.954447	9.954437
42 30		I. VII.	I. VII. 17

Ajoutez une unité au dernier chiffre des logarithmes de cos.17° 13′, de cot.31° 27′, de tang.38° 28′ et de tang.38° 47′.

Errata de la Table des Logarithmes des nombres naturels.

1er nombre de la page.	Colonne.	Fautes.	Corrections.
810	8e	0.14′ 0″	0.14′ 30″
900	6	457	458
		454	455
990	3	435	436
	6	421	422
1530	3, 1re case.	283	284
	2e case.		283
1890	3	288	228
	5	3.280035	3.290035
2250	7	2339	2329
4320	2	0. 12′ 0″	1. 12′ 0″
4590	8	0.17′ 30″	1.17′ 30″
4770	1	4883	4783
5040	6	65	85
5400	7	5463	5473
5580	2	1. 33′ 30″	1. 33′ 0″
5670	7	5938	5738
6210	4	6279	6269
7110	1	7233	7133
8010	1	8012	8022
	8	9.908431	3.908431
8190	1	8211	8212
11070	2	5.044696	4.044696
	6	*Log.diff.*30	*Log.diff.*39
11880	3	11933	11913
11970	5	11052	12052
12240	5	11310	12310
14850	5	14239	14939
16830	6	4.238323	4.228323

Ajoutez une unité au dernier chiffre des Logarithmes des nombres 252, 450, 451, 531, 646, 13267, 15097, 15668.

Retranchez une unité du dernier chiffre des Logarithmes des nombres 1623, 2692, 6545, 17509, 19116.

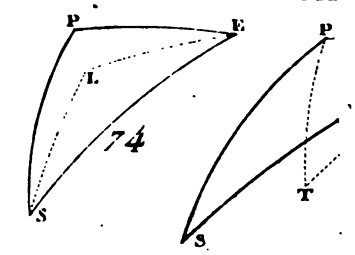
Transportez les différences 343, 261, 221, 217, 183, 175 des Logarithmes des nombres à la case blanche qui suit celle où se trouve chacune de ces différences.

TABLE (BB).

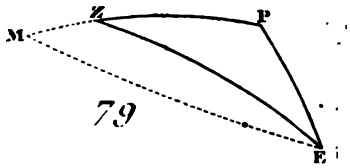
Logarithmes des nombres premiers, depuis 2 *jusqu'à* 1283. *Voy.*(190).

Dans cette Table les caractéristiques des Logarithmes sont omises.

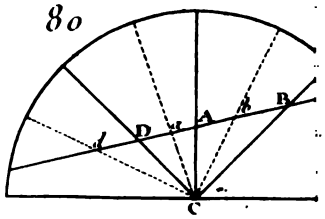
Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
2	30102	99956	63981	19521	197	29446	62261	61592	92737
3	47712	12547	19662	43730	199	29885	30764	09706	65010
5	69897	00043	36018	80479	211	32428	24552	97692	66508
7	84509	80400	14256	83071	223	34830	48630	48160	67348
11	04139	26851	58225	04075	227	35602	58571	93122	72010
13	11394	33523	06836	76921	229	35983	54823	39887	99413
17	23044	89213	78273	92854	233	36735	59210	26018	97219
19	27875	36009	52828	96154	239	37839	79009	48137	68500
23	36172	78360	17592	87887	241	38201	70425	74868	38408
29	46239	79978	98956	08733	251	39967	37214	81038	13934
31	49136	16938	34272	67967	257	40993	31233	31294	53716
37	56820	17240	66994	99681	263	41995	57484	89757	86897
41	61278	38667	19735	49451	269	42975	22800	02407	98009
43	63346	84555	79586	52641	271	43296	92908	74405	72952
47	67209	78579	35717	46441	277	44247	97690	64448	55378
53	72427	58696	00789	04563	281	44870	63199	05079	89286
59	77085	20116	42144	19026	283	45178	64355	24290	23556
61	78532	98350	10767	03389	293	46686	76203	54109	45624
67	82607	48027	00826	43415	307	48713	83754	77186	48475
71	85125	83487	19075	28609	311	49276	03890	26837	50555
73	86332	28601	20455	90107	313	49554	43375	46448	48481
79	89762	70912	90441	42799	317	50105	92622	17751	49455
83	91907	80923	76073	90383	331	51982	79937	75718	73861
89	94939	00066	44912	78472	337	52762	99008	71338	62619
97	98677	17342	66244	85178	347	54032	94747	90873	71854
101	00432	13737	82642	57428	349	54282	54269	59179	89654
103	01283	72247	05172	20517	353	54777	47053	87822	56550
107	02938	37776	85209	64083	359	55509	44485	78319	14782
109	03742	64979	40623	63520	367	56466	60642	52089	33799
113	05307	84434	83419	72280	373	57170	88318	08687	60551
127	10380	37209	55956	86425	379	57863	92099	68072	34193
131	11727	12956	55764	26081	383	58319	87739	68622	74038
137	13672	05671	56406	76856	389	58994	96013	25707	73624
139	14301	48002	54095	08046	397	59879	06067	63115	06588
149	17318	62684	12274	03826	401	60314	43726	20182	30654
151	17897	69472	93169	43687	409	61172	33080	07341	80361
157	19589	96524	09233	73676	419	62221	40229	66295	30985
163	21218	76044	03957	80764	421	62428	20958	35668	30744
167	22271	64711	47583	27998	431	63447	72701	60731	60075
173	23804	61031	28795	41456	433	63648	78963	53365	44270
179	25285	30309	79893	16957	439	64246	45202	42121	37063
181	25767	85748	69184	51029	443	64640	37262	23069	56023
191	28103	33672	47727	53764	449	65224	63410	03323	17492
193	28555	73090	07773	76060	457	65991	62000	69850	22235



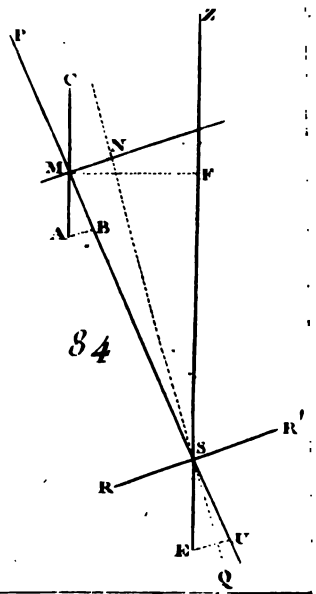
74



79



80



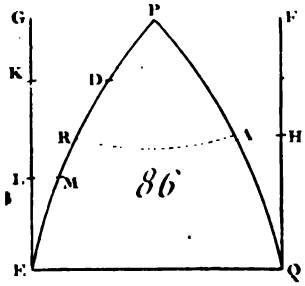
84

Nomb.	Logarithmes.				Nomb.	Logarithmes.			
1103	04257	55124	40190	59866	1201	07954	30074	02906	04893
1109	04493	15461	49160	06471	1213	08386	08008	66572	97420
1117	04805	31731	15609	05702	1217	08529	05782	30064	98886
1123	05037	97562	61457	78469	1223	08742	64570	36285	46333
1129	05269	39419	24967	86114	1229	08955	18828	86454	08564
1151	06107	53236	29791	80185	1231	09025	80529	31316	30782
1153	06182	93072	94699	02164	1237	09236	96996	29120	65363
1163	06557	97147	28448	41138	1249	09656	24383	74135	51203
1171	06855	68950	72363	12991	1259	10002	57301	07862	59756
1181	07224	98976	13514	79908	1277	10619	08972	63415	28661
1187	07445	07189	54591	22046	1279	10687	05444	78653	92264
1193	07664	04436	70341	87278	1283	10822	66563	74928	50365

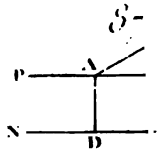
Facteurs des nombres composés qui ne sont divisibles ni par 2, *ni par* 3, *ni par* 5.

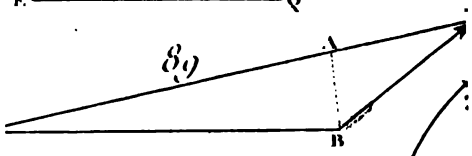
Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.	Nomb.	Facteurs.
49	= 7 . 7	377	= 13 . 29	637	= 7 . 7 . 13	871	= 13 . 67	1111	= 11 . 101
77	= 7 . 11	391	= 17 . 23	649	= 11 . 59	889	= 7 . 127	1121	= 19 . 59
91	= 7 . 13	403	= 13 . 31	667	= 23 . 29	893	= 19 . 47	1127	= 7 . 7 . 23
119	= 7 . 17	407	= 11 . 37	671	= 11 . 61	899	= 29 . 31	1133	= 11 . 103
121	= 11 . 11	413	= 7 . 59	679	= 7 . 97	901	= 17 . 53	1139	= 17 . 67
133	= 7 . 19	427	= 7 . 61	689	= 13 . 53	913	= 11 . 83	1141	= 7 . 163
143	= 11 . 13	437	= 19 . 23	697	= 17 . 41	917	= 7 . 131	1147	= 31 . 37
161	= 7 . 23	451	= 11 . 41	703	= 19 . 37	923	= 13 . 71	1157	= 13 . 89
169	= 13 . 13	469	= 7 . 67	707	= 7 . 101	931	= 7 . 7 . 19	1159	= 19 . 61
187	= 11 . 17	473	= 11 . 43	713	= 23 . 31	943	= 23 . 41	1169	= 7 . 167
203	= 7 . 29	481	= 13 . 37	721	= 7 . 103	949	= 13 . 73	1177	= 11 . 107
209	= 11 . 19	493	= 17 . 29	731	= 17 . 43	959	= 7 . 137	1183	= 7 . 13 . 13
217	= 7 . 31	497	= 7 . 71	737	= 11 . 67	961	= 31 . 31	1189	= 29 . 41
221	= 13 . 17	511	= 7 . 73	749	= 7 . 107	973	= 7 . 139	1199	= 11 . 109
247	= 13 . 19	517	= 11 . 47	763	= 7 . 109	979	= 11 . 89	1207	= 17 . 71
253	= 11 . 23	527	= 17 . 31	767	= 13 . 59	989	= 23 . 43	1211	= 7 . 173
259	= 7 . 37	529	= 23 . 23	779	= 19 . 41	1001	= 7 . 11 . 13	1219	= 23 . 53
287	= 7 . 41	533	= 13 . 41	781	= 11 . 71	1003	= 17 . 59	1241	= 17 . 73
289	= 17 . 17	539	= 7 . 7 . 11	791	= 7 . 113	1007	= 19 . 53	1243	= 11 . 113
299	= 13 . 23	551	= 19 . 29	793	= 13 . 61	1027	= 13 . 79	1247	= 29 . 43
301	= 7 . 43	553	= 7 . 79	799	= 17 . 47	1037	= 17 . 61	1253	= 7 . 179
319	= 11 . 29	559	= 13 . 43	803	= 11 . 73	1043	= 7 . 149	1261	= 13 . 97
323	= 17 . 19	581	= 7 . 83	817	= 19 . 43	1057	= 7 . 151	1267	= 7 . 181
329	= 7 . 47	583	= 11 . 53	833	= 7 . 7 . 17	1067	= 11 . 97	1271	= 31 . 41
341	= 11 . 31	589	= 19 . 31	841	= 29 . 29	1073	= 29 . 37	1273	= 19 . 67
343	= 7 . 7 . 7	611	= 13 . 47	847	= 7 . 11 . 11	1079	= 13 . 83		
361	= 19 . 19	623	= 7 . 89	851	= 23 . 37	1081	= 23 . 47		
371	= 7 . 53	629	= 17 . 37	869	= 11 . 79	1099	= 7 . 157		

FIN.

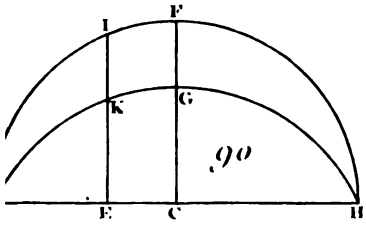
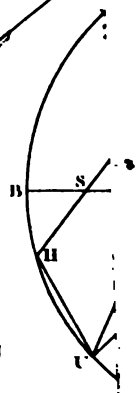
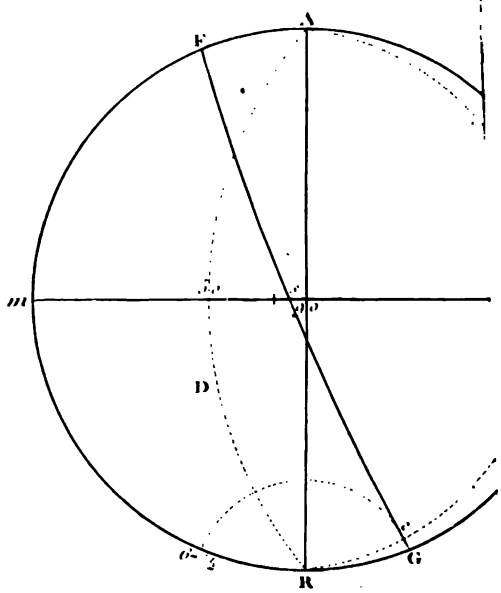
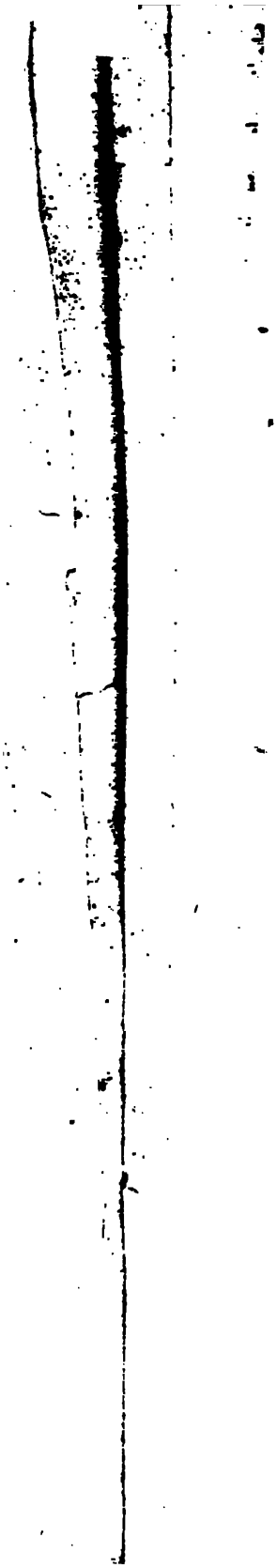
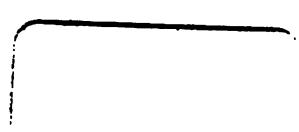


86





89



90